*تلفیق شاخص کارایی فارل با رویکرد تابع هزینه و*

 *شاخص ورودی محور فارل*

**رضا کاظمی متین[[1]](#footnote-1)1، صدیقه­السادات نجفی2**

1- دانشیار گروه رياضي، دانشگاه آزاد اسلامي واحد کرج

2- کارشناس ارشد، گروه رياضي، دانشگاه آزاد اسلامي واحد کرج

**رسيد مقاله: 12 شهریور 1392**

**پذيرش مقاله: 9 بهمن 1392**

|  |
| --- |
| **چکیده***در این مقاله تلفیق شاخص کارایی فارل را مورد ارزیابی قرار می­دهیم و با توجه به این حقیقت که کمینه هزینه صنعتی با مجموع کمینه هزینه­های واحدها برابر است؛ شرایطی برای تلفیق کارایی فارل می­یابیم. از این تساوی برای محاسبه اندازه کارایی (تکنیکی یا کلی) صنعتی از اندازه کارایی (تکنیکی یا کلی) واحدها استفاده می­کنیم.***کلمات کلیدی: *کارایی هزینه، واحد تصمیم گیرنده، تلفیق، کارایی تکنیکی، کارایی تخصیصی*** |

**1 مقدمه**

*تعیین کارایی و عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است. در صنعت نیز که از مجموع چند واحد و از تلفیق آن­ها تشکیل شده و آن را می­توان به صورت یک واحد تصمیم­گیرنده (*DMUs*) جدید در نظر گرفت؛ ارزیابی کارایی و بررسی عملکرد آن همواره مورد توجه بوده است. لذا دستیابی به شرایطی که تحت آن‌ها تلفیق شاخص­های کارایی واحدها امکان­پذیر باشد و به­توان در نهایت کارایی صنعت را با توجه به کارایی واحدها ارزیابی نمود؛ مطلوب است.* فارل [1] برای معرفی کارایی ساختاری یک صنعت، کارایی تکنیکی یک صنعت نسبت به سطح تراز کارایی داده شده را میانگین وزنی کارایی تکنیکی واحدها نسبت به سطح تراز یکسان واحدهای تشکیل دهنده صنعت، تعریف کرد.

تفسیر و رویکردهای متفاوتی برای ارزیابی کارایی صنعتی در مقاله­ها به چشم می­خورد. فار و زلنیوک [2] با استفاده از برابری بیشینه درآمد صنعتی را با مجموع بیشینه درآمدهای واحدها، اندازه کارایی صنعتی برحسب اندازه کارایی واحدها ارزیابی کردند.

در این مقاله، این شیوه را با رویکرد تابع هزینه و شاخص ورودی محور فارل به کار می­بریم. ثابت می‌شود که کمینه هزینه صنعتی با مجموع کمینه هزینه­های واحدها برابر است. نتیجه این که کارایی تکنیکی صنعتی، یک تعمیم چند ورودی از کارایی ساختاری فارل برای یک صنعت می­باشد. *در بخش 2 بردار ورودی و خروجی واحدها و صنعت همچنین تکنولوژی واحدها و صنعت معرفی می­شود. در بخش 3 کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعت تعریف می­گردد. در بخش 4* برای پی­بردن به رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی، ابتدا نشان می­دهیم کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدهاست. با استفاده از آن نتیجه می‏شود که کارایی هزینه صنعتی، میانگین سهم وزنی از کارایی­های هزینه واحدهاست. در بخش 5 کارایی تکنیکی صنعت بر حسب کارایی تکنیکی واحدها ارزیابی می­شود. *در بخش 6* کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه‏های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه می­کنیم. *بخش 7 شامل مثال عددي و بخش 8 نيز نتيجه­گيري را ارایه مي­دهد.*

**2 برخی تعاریف و نمادگذاری­ها**

تکنولوژی هر واحد را با مجموعه ورودی­اش معرفی می‌کنیم:

(1)  می­تواند  را تولید کند

 در این بیان،  بردار ورودی واحد *k*­ام و بردار خروجی واحد ­*k*ام است و،...،. (، اگر  باشد صنعت شامل یک واحد است و هیچ تلفیقی صورت نمی­گیرد.)

بر این اساس تکنولوژی صنعت به صورت زیر تعریف می­شود:

(2) 

در این بیان مجموع به صورت برآیند تکنولوژی­هاست و هیچ تخصیص مجددی از خروجی­ها بین واحدها صورت نمی­گیرد. تکنولوژی صنعت تمام ویژگی­های تکنولوژی واحدهای مختلف را داراست.

**3 کارایی هزینه**

 بردار هزینه ورودی است با این فرض که برای همه واحدها یکسان است؛ در این صورت هزینه واحد،  و هزینه صنعتی برابر با  می­باشد. برای تعریف تابع هزینه صنعت و دستیابی به یک تئوری تلفیق ابتدا کمینه هزینه هر واحد و کارایی هزینه را تعریف مي­کنیم.

**کمینه هزینه هر واحد** به صورت زیر تعریف می­شود:

(3) 

**کارایی هزینه هر واحد** به صورت نسبتی از کمینه هزینه واحد  به هزینه مشاهده شده  است. یعنی:

(4) 

**کمینه هزینه صنعتی** به صورت زیر تعریف می­شود:

(5) 

**کارایی هزینه صنعتی** به صورت نسبتی از کمینه هزینه صنعتی به هزینه مشاهده شده صنعتی بیان می‌شود. یعنی:



**4 رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی**

برای پی­بردن به رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی، ابتدا نشان می­دهیم کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدها ست.

**قضیه1:** کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدهاست. یعنی:



**اثبات:** اگر  باشد؛ آنگاه. از آن­جایی  نشان دهنده کمینه هزینه صنعتی است:



حال از آن­جایی که  دلخواه است. داریم:

(6) 

**برعکس:** اگر  دلخواه باشد وجود دارد به طوری، بنابراین با توجه به اینکه  کمینه هزینه واحد k است داریم:





 دلخواه است و با توجه به تعریف داریم:

(7) 

از دو معادله(6) و (7) داریم:



بنابراین  □

با استفاده از نتیجه می­شود که کارایی هزینه صنعتی، میانگین سهم وزنی از کارایی­های هزینه واحدهاست. یعنی:

(8) 

که سهم­ها به صورت  تعریف می‌شود. برای نشان دادن این موضوع، روابط زیر را در نظر بگیرید:

 

در تساوی بالا  را در  ضرب می‌کنیم.



طرفین تساوی را بر تقسیم  می‌کنیم:



در نتیجه 

بلک­اربی و راسل *[3]* اصول موضوعه­ای برای تعیین تلفیق معرفی کردند که بر اساس نمادگذاری این مقاله به صورت زیر قابل بیان است:



یعنی صنعت کاراست اگر و تنها اگر هر واحد کارا باشد.

توجه داریم که اندازه‌های کاراییِ­های  و  کوچک­تر یا مساوی 1 هستند؛ زیرا در تعریف هر کدام صورت کسر کمینه هزینه است که از هزینه مشاهده شده کم­تر است. همچنین طبق نامساوی ماهلر:



برای همه  شدنی داریم  و  بنابراین نتیجه می‏شود:

  و 

در این صورت تساوی (8) مطابق اصول موضوعه تعیین تلفیق است؛ بنابراین می­توان تساوی (8) را به عنوان شاخص تلفیق با رویکرد تابع هزینه در نظر گرفت.

**5 ارزیابی کارایی تکنیکی صنعت بر حسب کارایی تکنیکی واحدها**

برای معرفی اندازه تکنیکی کارایی واحدها، توابع فاصله­ای ورودی محور روی  ،،...، و روی  را تعریف می‌کنیم.

(9) 

 (10) 

کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور سهم- وزنی را به صورت زیر تعریف نمودیم:

(11) 

 یک اندازه کامل برای کارایی تکنیکی نیست؛ زیرا شامل اطلاعات قیمت است و تابعی فقط بر حسب ورودی­ها و خروجی­ها نمی­باشد. اگر اصل موضوع تعیین تلفیق کارایی تکنیکی به لک اربی و راسل [3] را بیان کنیم خواهیم داشت:



آنگاه واضح است که اندازه در شرط فوق صدق می­کند؛ زیرا:

برای هر ورودی مشاهده شده  داریم: 

حال فرض کنیم . با ضرب طرفین رابطه در  خواهیم داشت:



و با جمع بندی:

 

بنابراین:



به عکس، فرض ­کنیم ، به جای 1 در تساوی فوق رابطه  را جای‏گزین می­کنیم. در این صورت خواهیم داشت:  بنابراین

 . از طرفین تساوی عبارت  را فاکتور می­گیریم: . در نتیجه  و از آن­جایی که  خواهیم داشت: ، به ازای هر ،...،. □

برای مقایسه دو اندازه کارایی تکنیکی، و معکوس  توجه کنید که در تک ورودی، آن­ها معادل اندازه کارایی هزینه صنعتی­اند و صریحاً آنچه را که فارل کارایی ساختاری صنعتی نامید، ارایه می­کنند. یعنی:



نشان می­دهیم این تساوی، در حالت کلی برای مورد چند ورودی برقرار نیست. برای بررسی این موضوع، ابتدا توجه کنید  به تکنولوژی صنعتی  تعلق دارد و اگر ورودی­ها دسترسی پذیر آزاد داشته باشند آنگاه  که  نیز متعلق به  است؛ زیرا:









بنابراین نتیجه می­گیریم:

(12) 

یعنی نمره کارایی تکنیکی صنعتی  حداکثر به بزرگی  است و ناکارایی صنعت حداکثر برابر با کم­ترین ناکارایی واحدها.

در ادامه با یک مثال نشان می­دهیم که نا­معادله زیر می­تواند به فرم اکید برقرار باشد؛ یعنی:

(13) 

(14) 

بر اساس (13) کمینه نمره کارایی واحدها می­تواند بزرگ­تر از نمره کارایی صنعت باشد. عبارت (14) نشان می‏دهد که  نمره کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور سهم­ -­­ وزنی ممکن است بزرگ­تر از ، اندازه کارایی تکنیکی فارل ورودی محور صنعتی باشد. شکل (1) این موارد را توضیح می­دهد.



**شکل 1.**کارایی تکنیکی صنعت و واحدها

بردارهای ورودی ، ، ، ،  و متعلق به مجموعه ورودی  اند. نقاط ***A***, ***B***, ***D***, ***F*** کارا هستند؛ بنابراین  و  .

اگر قیمت­های ورودی  باشد؛ آنگاه داریم:



















مشاهده می‌شود که .

بردار ورودی صنعت  متعلق به مجموعه ورودی  است و یک نقطه درونی، پس برابریو معکوس  در حالت کلی برای مورد چند ورودی نمی­تواند برقرار باشد.

**6 تجزیه کارایی هزینه صنعتی به مؤلفه­های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی**

حال کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه­های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه می­کنیم. با تبعیت از لی و انجی [4] اندازه تلفیق کارایی تخصیصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

(15) 

(16) 

و وزن­ها عبارت‌اند از:

(17) 

حال این نتیجه حاصل می­شود که تلفیق کارایی هزینه می­تواند به تلفیق کارایی تخصیصی  و تلفیق کارایی تکنیکی  به صورت زیر تجزیه شود:

(18) 

زیرا: 



اشاره می­کنیم که در بالا سهم­های  استفاده شده در تعریف اندازه کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور وابسته به قیمت هستند اما در مورد تک ورودی مستقل از قیمت­ها می­باشد.

زیرا در حالت تک ورودی داریم:

(19) 

اگر بخواهیم سهم- وزن­های­ مستقل از قیمت را برای مورد چند ورودی ایجاد کنیم؛ از کرنز [5] پیروی می­کنیم و قیمت­ها را به صورت  در نظر می گیریم. بر این اساس خواهیم داشت:

(20) 

یا  . در نتیجه وزن­های مستقل از قیمت برای هر واحد به صورتجمعی از سهم هر ورودی به مجموع ورودی­های آن واحد خواهند بود. ( که تعداد ورودی­های هر واحد می­باشد) همچنین وزن­ها نامنفی و مجموع­شان برابر 1 است. به طور مشابه، وزن­های مستقل قیمت برای تلفیقی از کارایی­های تخصیصی واحدها به صورت زیر است:

(21) 

در مثال این وزن­ها را با سهم- وزن­های وابسته به قیمت مقایسه می­کنیم.

**7 مثال عددی**

در این بخش با یک مثال عددی نشان می­دهیم که ممکن است کارایی صنعتی، با استفاده از کارایی­های واحدها محاسبه شود. فرض می­کنیم 6 واحد، هر کدام با مصرف دو ورودی  خروجی تولید می­کنند. قیمت­های ورودی و  می­باشد. برای محاسبه کارایی هزینه ، ابتدا  را برای هر واحد با استفاده از برنامه نرم افزار بهینه­سازی لینگو محاسبه کرده؛ سپس آن را بر ، هزینه مشاهده k ام تقسیم می­کنیم.

 با استفاده از تساوی (8) کارایی هزینه صنعتی  را محاسبه می­نماییم. همچنین مولفه­های کارایی تخصیصی و تکنیکی واحدها یعنی  و  را برای هر واحد محاسبه کرده سپس با توجه به   به ترتیب کارایی تخصیصی صنعتی وکارایی تکنیکی صنعتی را محاسبه می­کنیم. به عنون نمونه نحوه محاسبه این موارد را برای واحد **1** نشان می‏دهیم:

 کارایی هزینه واحد **1**: 

کارایی تکنیکی واحد **1**: 

کارایی تخصیصی واحد **1**: 

چهار مجموعه از وزن­ها را به صورت وزن­های وابسته به قیمت یعنی  ،  و وزن­های مستقل قیمت ، معرفی می‌کنیم که نحوه محاسبه آن­ها در مقاله ذکر شده است.

کارایی هزینه صنعتی: 

کارایی تکنیکی صنعتی:



کارایی تخصیصی صنعتی:



**جدول 1.** يك مثال فرضي: كارايي­هاي تخصيصي و تكنيكي هزینه براي صنعت و واحدها

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| واحدها |  |  |  | **کارایی** **هزینه** | **کارایی** **تکنیکی** | **کارایی** **تخصیصی** |  |  |  |  |
| 1 | 5/0 | 4 | 1 | 000000/1 | 000000/1 | 000000/1 | 06949/0 | 077282/0 | 159670/0 | 179575/0 |
| 2 | 1 | 5/2 | 1 | 720000/0 | 000000/1 | 720000/0 | 096525/0 | 1073370/0 | 129685/0 | 1458806/0 |
| 3 | 5/1 | 5/3 | 1 | 486486/0 | 700000/0 | 694980/0 | 142857/0 | 111201/0 | 185907/0 | 2091268/0 |
| 4 | 2 | 5/1 | 1 | 418604/0 | 000000/1 | 418604/0 | 166023/0 | 184619/0 | 138608/0 | 1560438/0 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | 281250/0 | 722222/0 | 389423/0 | 247104/0 | 310084/0 | 199400/0 | 2243716/0 |
| 6 | 5/3 | 1 | 1 | 250000/0 | 000000/1 | 250000/0 | 277992/0 | 3091308/0 | 1431784/0 | 2100648/0 |
| میانگین حسابی غیروزنی | 526056/0 | 903704/0 | 578834/0 |  |
| کارایی صنعتی | 416979/0 | 888493/0 | 507145/0 |  |
| کارایی صنعتی با وزن‌های مستقل قیمت | 493412/0 | 845360/0 | 507165/0 |  |

**8 نتیجه­گیری**

در این مقاله به تلفیق شاخص کارایی فارل پرداختیم. با اثبات این­که کمینه هزینه صنعتی برابر است با مجموع کمینه هزینه واحدها، کارایی صنعتی را با توجه به کارایی تکنیکی واحدها محاسبه کردیم. نشان داده شد که در حالت تک ورودی، کارایی تکنیکی  با معکوس  برابر است ولی در حالت چند ورودی این تساوی می تواند برقرار نباشد. سپس کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه­های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه نمودیم. نتیجه شدکه تلفیق کارایی هزینه می­تواند به تلفیق کارایی تخصیصی  و تلفیق کارایی تکنیکی تجزیه شود. همچنین با توجه به این­که وزن­های هر واحد یعنی ، که برای محاسبه کارایی تکنیکی صنعتی  و کارایی تخصیصی صنعتی  وابسته به قیمت­هااند؛ وزن­های مستقل از قیمت ، را ایجاد کردیم. سپس با استفاده از یک مثال عددی وزن­های وابسته به قیمت هر واحد یعنی ،  را با وزن­های های مستقل از قیمت  و مقایسه نمودیم.

**منابع**

1. Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of Royal Statistical Society, Series A, General 120 (part 3), 253–281.
2. F$\ddot{a}$re, R., Zelenyuk, V., (2003). On aggregation Farrell efficiencies. European Journal of Operational Research, 146, 615-620.
3. Blackorby, C., Russell, R. R., (1999). Aggregation of efficiency indices. Journal of Productivity Analysis 12(1), 5–20.
4. Li, S. K., Ng, Y. C., (1995). Measuring the productive efficiency a group of firms. International Advances in Economic Research 1 (4), 377–390.
5. Cornes, R., (1992). Duality and Modern Economics. Cambridge University Press, Cambridge.
1. عهده­دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiau.ac.ir [↑](#footnote-ref-1)