مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره چهارم (پیاپی ۳۹)، زمستان ۹۲، ص ص ۱۳۷-۱۲۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدل اصلاح شده کراندار در ارتباط با داده‌های منفی

رضا کاظمی متین*[۱]، لیلا صالحی[۲]
۱– دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج
۲– کارشناس ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

رسید مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۳۹۲
پذیرش مقاله: ۲۰ مهر ۱۳۹۲

چکیده

در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، مدل‌های مختلفی جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با داده های منفی مطرح شده است. مدل اصلاح شده کراندار (BAM) از خانواده مدل‌های جمعی توسط کوپر و همکاران (۲۰۱۱) معرفی شد. این مدل در تمامی انواع بازده به مقیاس قابل اجراست و اندازه کارایی با خواص مطلوب ارایه می‌دهد. در این مقاله ویژگی‌های این مدل را در حضور داده‌های منفی بررسی نموده، ارتباط ساختاری آن را با مدل‌های دیگر این زمینه نظیر RDM و MSBM نشان می‌دهیم. سپس نتایج هر سه مدل را در ارزیابی یک سیستم بانکداری شامل داده‌های منفی ارایه خواهیم داد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های منفی، مدل‌های جمعی، مدل کراندار، اندازه کارایی.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها، توسط فارل (۱۹۵۷) معرفی شد و توسط مقاله بنیادین چارنز و کوپر و ردز (۱۹۷۸) بسط و گسترش پیدا کرد [۱]، هدف آن ارزیابی عملکرد واحدهای تحت بررسی است که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها نامنفی در نظر گرفته شده‌اند [۲]، اما در مدل‌بندی مسائل کاربردی استفاده از اعداد منفی اجتناب ناپذیر است. به عنوان نمونه نرخ رشد اشتغال در یک کشور فاکتوری است که می‌تواند در بعضی موارد به خروجی شامل اعداد منفی در نظر گرفته شود. در به کارگیری داده‌های منفی در DEA دیدگاه‌های مختلفی مطرح شده است. پاستور (۱۹۹۴) و لوول (۱۹۹۵) و سیفورد (۲۰۰۲) به منظور بر طرف کردن مقادیر منفی مقدار بسیار کوچک مثبت را به جای خروجی منفی به‌کار بردند. این رویکرد بر پایه این حقیقت استوار است که مدل‌های ارزیابی کارایی در DEA عملکرد هر DMU را با بهترین منبع ممکن نشان می‌دهد. بنابراین از متغیر خروجی با مقدار منفی یا مثبت خیلی کوچک انتظار نمی رود که در نرخ کارایی واحد تاثیر اساسی داشته باشند [۳]. پیشنهاد دیگر در این زمینه، در نظر گرفتن خروجی‌های منفی به عنوان ورودی و کاهش سطح آن‌ها است [۴]. اما این دو دیدگاه مطرح

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiau.ac.ir

شده، نتایج متفاوتی تولید می‌کنند که ناشی از ضعف ساختاری آن‌ها است. از جمله مدل‌های کلاسیک در به‌کارگیری داده‌های منفی هستند، مدل جمعی چارنز و همکاران (۱۹۸۵) [۴] تحت بازده به مقیاس متغیر است که به دلیل پایایی نسبت به انتقال که توسط علی و سیفورد (۱۹۹۰)[۵] مطرح شد، قادر است داده‌های منفی را با عدد به اندازه کافی بزرگ مثبت جمع کند و این داده‌ها را از سطح منفی به سطح مثبت منتقل کند بدون آن‌که نتایج حاصل از مدل تغییر یابند. هرچند مدل جمعی مستقیماً روی داده‌های منفی اجرا نمی شود اما می‌تواند به درستی کارایی پارتو کوپمن و ناکارایی ترکیبی واحدهای تحت بررسی را نشان دهد [۶].

مدل جمعی با دو ایراد بزرگ مواجه است [۴]:

- اندازه کارایی برای واحدهای تحت بررسی ارایه نمی‌دهد.
- نتایج حاصل از آن به واحد اندازه‌گیری کمیت‌ها وابسته است.

از دیدگاه توسعه نظری و کاربردی DEA در سال‌های اخیر محققین متعددی به موضوع (DEA) با داده‌های منفی پرداخته‌اند. شل (۲۰۰۱) پیشنهاد می‌کند که از مقادیر قدر مطلق خروجی‌های منفی به عنوان ورودی و قدر مطلق ورودی‌های منفی به عنوان خروجی استفاده شود [۷]. پرتلا و همکاران (۲۰۰۴) [۸] روش RDM را برای به کارگیری اعداد منفی معرفی کردند. شارپ و همکارانش (۲۰۰۶) [۹] مدل اصلاحی بر مبنای اندازه کارایی مبتنی بر متغیرهای کمکی موسوم به MSBM معرفی کردند. این مدل، اصلاح شده‌ی مدل بر پایه متغیر کمکی SBM است که توسط تن (۲۰۰۱) مطرح شده است [۱۰]. شارپ با اصلاح (SBM) این مدل را آماده پذیرش داده‌های منفی نمود.

جهت ارایه یک مدل جدید، در این مقاله مدل اصلاح شده کراندار BAM را که کوپر و همکارانش (۲۰۱۱) [۱۱] معرفی نمودند برای داده‌های منفی به‌کار می‌بریم. نشان می‌دهیم که در حضور داده‌های منفی این مدل هنوز اندازه کارایی با خواص قابل قبولی ارایه می‌دهد. سازگاری این مدل با تکنولوژی‌های با بازده به مقیاس ثابت و متغیر، از مزیت‌های این مدل به حساب می‌آید. مقایسه ساختاری بین اندازه کارایی این مدل با دو مدل MSBM و RDM ارایه خواهیم کرد. هم‌چنین این مدل را روی داده‌های بانک‌های کشورهای حاشیه خلیج فارس که شامل خروجی‌های با هر دو مقدار مثبت و منفی هستند اجرا نموده و به بررسی نتایج می‌پردازیم.

در این راستا، ادامه مطالب مقاله چنین تنظیم شده است. در بخش دوم مروری مختصر بر مدل‌های DEA با داده منفی خواهیم داشت. در بخش سوم به بررسی مدل BAM با داده منفی می‌پردازیم. در بخش چهارم به بررسی مثال عملی در ارتباط با داده بانک‌های حاشیه خلیج فارس خواهیم پرداخت بخش پنجم را به نتیجه‌گیری اختصاص می‌دهیم.

۲ مروری بر مدل‌های (DEA) با داده منفی

۲-۱ مدل RDM

سیلوا پرتلا و همکارانش در سال (۲۰۰۴) روش RDM را برای به‌کارگیری اعداد منفی به‌صورت زیر معرفی کردند. برای مجموعه‌ی واحدها فرض می‌کنیم یک نقطه آرمانی به صورت زیر داشته باشیم:

$$I=\left(Maxy_{rj}, r=1,\dots,s, Minx_{ij}, i=1,\dots,m\right) \qquad (1)$$

نقطه آرمانی می‌تواند یکی از (DMU) ها باشد ولی در حالت کلی ممکن است این نقطه ایده‌ال درون مجموعه امکان تولید نباشد. بردارهای P_{ro} و P_{io} که به آن‌ها دامنه‌ی SP گویند میزان بهبود واحد تحت بررسی است و به صورت زیر معرفی می‌شود [۸]:

$$\begin{aligned} P_{ro} &= \max\left\{y_{rj}\right\}-y_{ro} && r=1,\dots,n \\ P_{io} &= x_{io}-\min\left\{x_{ij}\right\} && i=1,\dots,m \end{aligned} \qquad (2)$$

بر این اساس، مدل (RDM) *به‌صورت* زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} &Max \quad \beta \\ &s.t. \\ &\qquad X\lambda \le x_o-\beta \mathrm{P}_o^-, \\ &\qquad Y\lambda \ge y_o+\beta \mathrm{P}_o^+, \\ &\qquad e\lambda = 1, \\ &\qquad \lambda,\beta,\mathrm{P}_o^-,\mathrm{P}_o^+ \ge 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

این مدل نسبت به انتقال و تغییر واحد پایا است [۸]. با توجه به این ویژگی و این نکته که دامنه SP همواره نامنفی است، در مدل RDM می‌توان اعداد منفی را به‌کار برد. از آن‌جا که در جواب بهینه‌ی مدل یکی از قیود مساله مثل قید iام ورودی نافذ است، داریم $\beta=\dfrac{(x_{io}-x_i^*)}{p_{io}}$ و اگر قید rام خروجی نافذ باشد داریم $\beta=\dfrac{\left(y_r^*-y_{ro}\right)}{p_{ro}}$.

۲-۲ مدل MSBM

شارپ با قرار دادن جهت‌های بهبود معرفی شده، در مدل RDM، $\left(p_{ro}^+, p_{io}^-\right)$ به جای خود مقادیر مشاهدات، در تابع هدف مدل SBM، تعدیلی را ایجاد نمود طوری‌که برای داده‌های منفی مناسب باشد. این مدل جدید به MSBM شناخته می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \rho = \frac{1-\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i s_i^-}{p_{io}^-}}{1+\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r s_r^+}{p_{ro}^+}} \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- = x_{io}, \quad i=1,\dots,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\lambda_j + s_r^+ = y_{ro}, \quad r=1,\dots,s, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \quad \sum_{r=1}^{s} v_r = 1, \\
&\quad w_i, v_r, \lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \quad r=1,\dots,s, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن w_i و v_r وزن‌هایی هستند که از قبل توسط تصمیم‌گیرنده (DM) معین می‌شوند. جایی‌که P_{io}^- و P_{ro}^+ صفر هستند، فرض می‌کنیم عبارت $\frac{w_i s_i^-}{\mathrm{P}_{io}^-}$ و $\frac{v_r s_r^+}{\mathrm{P}_{ro}^+}$ از صورت و مخرج حذف می‌شوند. اندازه‌ی کارایی MSBM در محدوده‌ی $[0,1]$ قرار می‌گیرد [۹]. هم‌چنین مدل نسبت به انتقال پایاست [۱۲] و قابل اجرا برای داده‌های منفی.

۳ مدل BAM با داده منفی

کوپر و همکاران برای ایجاد یک اندازه‌ی جدید در حالت با داده‌های نامنفی، محدوده‌هایی با حد پایین برای ورودی‌ها و محدوده‌هایی با حد بالا برای خروجی‌ها در نظر می‌گیرد[۱۱]:

$$\begin{aligned}
U_{ro}^+ &= \overline{y}_r - y_{ro}, \qquad r=1,2,\dots,s \\
L_{io}^- &= x_{io} - \underline{x}_i, \qquad i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{۵}$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم حد چپ برای هر ورودی تنها به کران پایین ورودی‌ها و ورودی واحدهای ارزیابی شده بستگی دارد. در حالی‌که حد راست برای هر خروجی فقط به کران بالایی خروجی‌ها و خروجی (DMU) مورد بررسی وابسته است، به همین دلیل کوپرو همکاران اندازه‌ی جدید را BAM، به معنای اندازه‌ی تعدیل شده‌ی کراندار نامیدند. در ضمن به‌واسطه مینیمم مقداری که در حداکثر تغییر متغیر کمکی ورودی و ماکزیمم مقداری که درحداکثر تغییر متغیر کمکی خروجی قرار دارد، مقدار L_{io}^- و U_{ro}^+ در صورتی که داده‌ها منفی باشند همواره مثبت خواهد بود، بنابر این همواره بهبود در وضعیت ورودی‌ها و خروجی‌ها رخ خواهد داد.

اندازه‌ی ناکارایی BAM توسط مدل جمعی زیر ارزیابی می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_{io}^{-}}{(m+s)L_{io}^{-}}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_{ro}^{+}}{(m+s)U_{ro}^{+}}\right)\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_{io}^{-}=x_{io}, \qquad i=1,2,\dots,m,\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_{ro}^{+}=y_{ro}, \qquad r=1,2,\dots,s,\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1, \qquad j=1,2,\dots,n,\\
&\qquad \lambda_j\geq 0, \qquad \forall j,\\
&\qquad s_{io}^{-}\geq 0; s_{ro}^{+}\geq 0 \qquad \forall i,r.
\end{aligned} \tag{۶}$$

و اندازه‌ی کارایی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{BAM}=1-\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_{io}^{-*}}{(m+s)L_{io}^{-}}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_{ro}^{+*}}{(m+s)U_{so}^{+}}\right) \tag{۷}$$

این اندازه خوش تعریف است هر گاه اگر برای هر واحد (x_o,y_o) در ورودی i، $\underline{x_i}=x_{io}$ یعنی از کم‌ترین ورودی استفاده شده است پس هیچ فضایی برای بهبود وجود نخواهد داشت به عبارت دیگر $s_{io}^{-*}=0$ و $\frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^{-}}=0$ و به‌طور مشابه اگردر خروجی r رابطه $y_{ro}=\overline{y_r}$ برقرار باشد، می‌پذیریم $\frac{s_{ro}^{+*}}{U_{ro}^{+}}=0$.

قضیه زیر خواص مطلوب اندازه کارایی BAM را در حضور داده‌های منفی مورد بازبینی قرار می‌دهد.

قضیه ۱: مدل BAM با داده‌های دلخواه (مثبت و منفی) دارای ویژگی زیر است:

(P_1) $0\leq\Gamma_{BAM}\leq 1$

(P_2) $\Gamma_{BAM}=1 \Leftrightarrow DMU_O$ کارای کامل است. $\Gamma_{BAM}=0 \Leftrightarrow DMU_O$ ناکارای کامل است.

(P_3) Γ_{BAM} دارای پایایی نسبت به تغییر واحد است.

(P_4) Γ_{BAM} یکنوا است.

(P_5) Γ_{BAM} دارای پایایی نسبت به انتقال است.

اثبات: برای P_1:

$$
\begin{aligned}
&\circ \le S_{io} = x_{io} - \sum_{j=\backslash}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io} - \sum_{i=\backslash}^{n} \lambda_j \underline{x_i} \\
&\sum_{i=\backslash}^{n} \lambda_j = \backslash \\
&\circ \le s_{io} \le x_{io} - \underline{x_i} \Rightarrow \circ \le s_{io} \le L_{io} \\
&\circ \le \frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^{-}} \le \backslash \Rightarrow \sum_{i=\backslash}^{m} \circ \le \sum_{i=\backslash}^{m} \frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^{-}} \le \sum_{i=\backslash}^{m} \backslash \\
&\circ \le \sum_{i=\backslash}^{m} \frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^{-}} \le m
\end{aligned} \tag{۸}
$$

با جمع روابط (۸) و (۹) داریم:

$$
\circ \le \frac{\backslash}{m+s}\left(\sum_{i=\backslash}^{m} \frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^{-}} + \sum_{r=\backslash}^{s} \frac{s_{ro}^{+*}}{U_{ro}^{+}} \right) \le \backslash
$$

بــرای $P_۲$: فــرض کنــیم $\Gamma_{BAM} = ۱$، پــس تمــام متغیرهــای کمبــود و مــازاد و برابــر صــفر هســتند و اگــر کــارایی کامـل باشـد و دیگـر هـیچ جـای بهبـودی وجـود نداشـته باشـد یعنـی $s_{io}^{-*} = \circ$ و $s_{ro}^{+*} = \circ$ و در ایـن-صــورت $\Gamma_{BAM} = ۱$ اســت. اگــر $\Gamma_{BAM} = \circ$ باشــد، یعنــی s_{io}^{-*} و s_{ro}^{+*} در مــاکزیمم مقــدار خــود قــرار دارند و ناکارایی کامل است و اگر ناکارایی کامل باشد، یعنی:

$$
\begin{aligned}
&\circ \le s_{io}^{*} \le L_{io} \Rightarrow s_{io}^{*} = L_{io} \\
&\circ \le s_{ro}^{+*} \le U_{ro}^{+} \Rightarrow s_{ro}^{+*} = U_{ro}^{+}
\end{aligned}
$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma = \backslash - \left(\sum_{i=\backslash}^{m} \frac{s_{io}^{-*}}{(m+s) L_{io}^{-}} + \sum_{i=\backslash}^{m} \frac{s_{ro}^{+*}}{(m+s) U_{ro}^{+}} \right) \\
&\Gamma = \backslash - \left(\frac{m}{m+s} + \frac{s}{m+s} \right) = \circ
\end{aligned}
$$

در مــورد $P_۳$: فــرض کنــیم $i = ۱,...,m$ $\alpha_i > ۱$، $r = ۱,...,s$ $\beta_r > ۱$ و جــایگزینی‌هــای $x_{ij} \to \alpha x_{ij}$ و $y_{rj} \to \beta_r y_{rj}$ را داشته باشیم. در این صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
&L^{-}{}_{i} = x_{io} - \underline{x_i} \to L^{-}{}_{i} \to \alpha_i L^{-}{}_{i} \\
&U_r^{+} = \overline{y}_r - y_{ro} \to U_r^{+} \to \beta_i U_r^{+} \\
&\Gamma_{BAM} = \backslash - \left(\sum_{i=\backslash}^{m} \frac{\alpha_i s_{io}^{-*}}{(m+s)\alpha_i L_i^{-}} + \sum_{r=\backslash}^{s} \frac{\beta_r s_{ro}^{+*}}{(m+s)\beta_r U_r^{+}} \right)
\end{aligned}
$$

مقادیر مساوی از صورت و مخرج حذف می شوند. در نتیجه: Γ_{BAM} نسبت به تغییر واحد پایا است.

برای p_4: (x,y) را یک واحد ناکارا در نظرمی‌گیریم و اولین ورودی آن‌را با یک کمیت مثبت افزایش می‌دهیم. $(h>0)$ نقطه‌ی جدید (x',y') ظاهر می‌شود. از آن‌جایی که نقطه‌ی جدید به روشنی از نقطه‌ی قبلی حاصل شده است مغلوب نقطه‌ی اولیه می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\Gamma_{BAM}(x,y)\ge\Gamma_{BAM}(x',y')$ است و یا به طور معادل نشان می‌دهیم:

$$1-\Gamma_{BAM}(x,y)\le 1-\Gamma_{BAM}(x',y') \qquad (10)$$

در صورت موفقیت، با تکرار این عمل برای هر یک از ورودی‌های باقیمانده، افزایش هر یک با کمیتی مثبت و در مورد هر خروجی کاهش هر یک از آنها توسط یک کمیت مثبت، اثبات کامل خواهد شد. تصویر (x,y) با مقادیرکمکی بهینه $\left(s_1^{-*},s_2^{-*},\dots,s_m^{-*},s_1^{+*},s_2^{+*},\dots,s_s^{+*}\right)$ را در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی جدید (x',y') را با مقادیر کمکی بهینه $\left(s_1^{-*}+h,s_2^{-*},\dots,s_m^{-*},s_1^{+*},s_2^{+*},\dots,s_s^{+*}\right)$ مد نظر قرار می‌دهیم. باید ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}1-\Gamma_{BAM}(x,y)&=\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{(m+s)L_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{(m+s)U_r^+}\\&\le 1-\Gamma_{BAM}(x',y')\end{aligned}$$

با جای‌گذاری داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{(m+s)L_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{(m+s)U_r^+}\le\frac{s_r^{+*}+h}{(m+s)(L_1^-+h)}+\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{(m+s)L_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{(m+s)U_r^+}$$

$$s_1^{-*}\cancel{L_1^-}+s_1^{-*}\cancel{h}\le\cancel{L_1^-}s_1^{-*}+L_1^-\cancel{h}$$

و پس از ساده سازی این نامعادله بر قرار است اگر و فقط اگر $\frac{s_1^{-*}}{L_1^-}\le 1$ که بدیهی است.

در مورد p_5: فرض کنیم $\alpha_i>0,\ i=1,\dots,m$ و $\beta_r>0,\ r=1,\dots,s$ و جای‌گزینی‌های $x_{ij}\to x_{ij}+\alpha_i$ و $y_{rj}\to y_{rj}+\beta_r$ را داشته باشیم. در این صورت

$$\Gamma_{BAM}=1-\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{-*}}{(m+s)L_i^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{+*}}{(m+s)U_r^+}\right)$$

$$\begin{aligned}x_{io}-s_i^-&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\to x_{io}+\alpha_i-s_i^-\\&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{ro}+s_r^+&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\to y_{ro}+\beta_r+s_r^+\\&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}+\beta_r\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,\ \ \lambda_j \geq 0, \quad j=1...,n$$

$$L_i^- = x_{io} + \alpha_i - \underline{x_i} - \alpha_i \quad \text{و} \quad U_r^+ = \overline{y}_r + \beta_r - y_{ro} - \beta_r$$

در این انتقال، s_i^{-*} و s_r^{+*} و L_i^- و U_r^+ تغییر نمی‌کنند، پس مدل نسبت به انتقال پایا است. ■

مدل BAM نسبت به انتقال و تغییر واحد پایا است. بنا بر این مدل توانایی به‌کارگیری در با داده های منفی را داراست. هم‌چنین در حالتی که ورودی‌ها و خروجی‌ها هر کدام مقادیر مثبت و منفی را اختیار می‌کنند ویژگی‌های فوق در مدل BAM دستخوش تغییر نخواهد شد. در ادامه رابطه‌ای بین اندازه کارایی در مدل‌های BAM، RDM و MSBM را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲: فرض کنیم اندازه کارایی مدل (MSBM) را بر ρ^*، اندازه کارایی مدل (BAM) برابر Γ_{BAM} و اندازه کارایی مدل (RDM) برابر $1-\beta^*$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\rho^* \leq \Gamma_{BAM} \leq 1-\beta^*$$

اثبات :ابتدا نشان می‌دهیم: $\rho^* \leq \Gamma_{BAM}$. لازم به ذکر است که:

$$p_{io}^- = L_{io}^- = x_{io} - \underline{x_i}$$
$$p_{ro}^+ = U_{ro}^+ = y_{ro} - \overline{y} \qquad (11)$$

در این بررسی تمامی وزن‌ها را برابر در نظر می گیریم. باید نشان دهیم:

$$\frac{1-\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i s_i^-}{L_{io}^-}}{1+\sum_{r=1}^{s}\frac{v_r s_r^+}{U_{ro}^+}} \leq 1-\frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)$$

$$1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-} \leq 1-\frac{1}{m+s}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}-\frac{1}{m+s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}-\frac{1}{s(m+s)}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}-\frac{1}{s(m+s)}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-} \leq \left(1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)\left(1-\frac{1}{m+s}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}-\frac{1}{m+s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \geq \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)-\frac{1}{s(m+s)}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}}{1-\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}} \geq \frac{1}{m+s}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{L_{io}^-}+\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{U_{ro}^+}\right)$$

رابطه‌ی آخر همواره برقرار است.

حال نشان می‌دهیم: $\Gamma_{BAM} \leq 1-\beta^*$ در مدل (RDM)، مقدار متغیرهای کمکی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$s^{+} = \beta^{*} L_{ro}^{+} + t^{+*}$$
$$s^{-} = \beta^{*} L_{io}^{-} + t^{+*}$$

در مدل (BAM) به‌جای s^{+} و s^{-} مقادیر مساوی را از رابطه‌ی (۱۱) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\Gamma_{BAM} &= ۱ - \frac{۱}{m+s}\left(\sum_{i=۱}^{m}\frac{\beta^{*}L_{io}^{-}+t^{-*}}{L_{io}^{-}} + \sum_{r=۱}^{s}\frac{\beta^{*}L_{ro}^{+}+t^{+*}}{U_{ro}^{+}}\right)\\ &= ۱ - \frac{۱}{m+s}\left(\sum_{i=۱}^{m}\beta^{*} + \sum_{i=۱}^{m}\frac{t^{-*}}{L_{io}^{-}} + \sum_{r=۱}^{s}\beta^{*} + \sum_{r=۱}^{s}\frac{t^{+*}}{L_{ro}^{+}}\right)\\ &= ۱ - \frac{۱}{m+s}\left((m+s)\beta^{*} + \sum_{i=۱}^{m}\frac{t^{-*}}{L_{io}^{-}} + \sum_{r=۱}^{s}\frac{t^{+*}}{L_{ro}^{+}}\right)\\ &= ۱ - \beta^{*} - \frac{۱}{m+s}\left(\sum_{i=۱}^{m}\frac{t^{-*}}{L_{io}^{-}} + \sum_{r=۱}^{s}\frac{t^{+*}}{L_{ro}^{+}}\right) \le ۱ - \beta^{*}\end{aligned}$$

بنابراین قضیه، مدل BAM از نظر تشخیص منابع ناکارایی جایگاهی میانی بین دو مدل دیگر خواهد داشت.

٤ مثال کاربردی

برای توضیح نتایج اخیر، عملکرد مدل BAM را بر روی داده‌های مربوط به تعدادی از بانک‌های کشورهای حاشیه خلیج فارس پیاده کردیم. این مجموعه داده‌ها در مقاله‌ی کاظمی متین و عزیزی (۲۰۱۱) استفاده شده است [۱۳]. در این ارزیابی سه ورودی و دو خروجی در نظر گرفته شده است. خروجی‌ها در برخی موارد همزمان مقادیر مثبت و منفی را اختیار کرده‌اند. نتایج این بررسی در جدول (۱) قابل مشاهده است. این جدول نشان می‌دهد که مدل BAM در حضور اعداد منفی نیز عدد کارایی قابل قبولی را ارایه می‌دهد. جهت مقایسه اندازه کارایی این مدل را همراه با اندازه کارایی دو مدل RDM و MSBM در جدول قرار داده‌ایم. مشاهده می‌کنیم هر سه مدل در تشخیص واحدهای کارا و ناکارا یکسان عمل کرده‌اند. هم‌چنین اندازه کارایی مدل BAM را کوچک‌تر از اندازه کارایی مدل RDM و بزرگ‌تر از اندازه کارایی مدل MSBM نشان می‌دهد.

جدول ۱. اندازه کارایی مدل‌های *BAM*، *MSBM* و *RDM* برای داده‌های با مقادیر منفی

شماره واحد	BAM	MSBM	RDM	شماره واحد	BAM	MSBM	RDM
۱	۱	۱	۱	۳۰	۰/۷۷۷	۰/۳۳۷	۰/۹۹۳
۲	۰/۶۸۲	./۱۸۴	۰/۸۶۵	۳۱	۰/۸۰۳	۰/۴۲۳	۰/۹۷۰
۳	۱	۱	۱	۳۲	۰/۱۸۳	۰/۱۸۳	۰/۹۶۸
۴	۰/۰۶۵	./۱۶۴	۰/۸۷	۳۳	۰/۶۴۹	۰/۱۸۲	۰/۸۴۴
۵	۱	۱	۱	۳۴	۰/۲۳۸	۰/۲۰۸	۰/۹۷۵
۶	۰/۵۸۲	۰/۱۶۰	۰/۸۴	۳۵	۰/۷۵۴	۰/۲۳۱	۰/۸۶۹
۷	۱	۱	۱	۳۶	۰/۵۶	۰/۱۷۰	۰/۹۱۰

شماره واحد	BAM	MSBM	RDM	شماره واحد	BAM	MSBM	RDM
۸	۰/۴۸۵	۰/۱۶۱	۰/۹۳۱۸	۳۷	۰/۵۴۳	۰/۱۴۱	۰/۵۸۹
۹	۱	۱	۱	۳۸	۰/۷۰۹	۰/۲۴۳	۰/۹۸۷
۱۰	۰/۶۲۱	۰/۱۶۸	۰/۷۳۹	۳۹	۰/۷۲۲	۰/۲۳۵	۰/۹۸۹
۱۱	۰/۷۴۲	۰/۳۸۹	۰/۹۹۷	۴۰	۱	۱	۱
۱۲	۰/۳۱۹	۰/۱۷۵	۰/۹۸۷	۴۱	۰/۶۵۸	۰/۲۳۵	۰/۹۹۲
۱۳	۰/۵۷۴	۰/۱۶۸	۰/۹۵۳	۴۲	۱	۰/۱۹۴	۱
۱۴	۰۱/۸۳۱	۰/۳۶۰	۰/۹۹۷	۴۳	۰/۷۳	۰/۱۹۴	۰/۹۸۸
۱۵	۰/۸۷۹	۰/۲۴۱	۰/۹۸۸	۴۴	۱	۱	۱
۱۶	۰/۶۲۹	۰/۱۷۸	۰/۹۰۹	۴۵	۰/۷۲۲	۰/۲۰۵	۰/۹۷۷
۱۷	۰/۶۲۱	۰/۱۶۲	۰/۸۷۵	۴۶	۱	۱	۱
۱۸	۰/۳۵۵	۰/۱۸۱	۰/۸۸۶	۴۷	۱	۱	۱
۱۹	۰/۶۵۲	۰/۲۱۹	۰/۷۳۳	۴۸	۰/۶۵۸	۰/۱۷۹	۰/۸۴۷
۲۰	۰/۶۱۸	۰/۱۶۰	۰/۸۱۴	۴۹	۰/۵۷۴	۰/۱۳۷	۰/۴۴۱
۲۱	۰/۶۷۷	۰/۲۱۲	۰/۸۶۷	۵۰	۰/۶۲۸	۰/۱۷۸	۰/۵۸۹
۲۲	۰/۲۷۳	۰/۱۵۸	۰/۹۵۸	۵۱	۰/۶۵۵	۰/۲۲۳	۰/۸۲۳
۲۳	۰/۶۴	۰/۱۷۸	۰/۹۴۱	۵۲	۱	۰/۳۲۹	۰/۹۴۳
۲۴	۱	۱	۱	۵۳	۰/۶۳۳	۰/۱۸۵	۰/۸۴۷
۲۵	۰/۷۳۷	۰/۶۱۰	۰/۹۹۵	۵۴	۱	۱	۱
۲۶	۰/۶۶	۰/۱۷۵	۰/۹۷۱	۵۵	۰/۷۰۵	۰/۱۹۸	۰/۹۲۷
۲۷	۰/۶۶۳	۰/۲۰۲	۰/۸۴	۵۶	۱	۱	۱
۲۸	۰/۵۳۲	۰/۱۴۰	۰/۵۵۱	۵۷	۰/۰۰۹	۰/۱۶۵	۰/۹۵۱
۲۹	۰/۰۸۳	۰/۲۹۶	۰/۸۹۱				

۵ نتیجه‌گیری

مدل BAM در جهت اصلاح مدل جمعی، توسط کوپر و همکاران (۲۰۱۱) معرفی شد. مزیت این مدل نسبت به مدل‌های دو مدل RDM و MSBM این است که در تکنولوژی با هر بازده به مقیاس چه ثابت و چه متغیرقابل اجراست. نشان دادیم این مدل با داده‌های منفی هم عدد کارایی قابل قبولی را ارایه می‌دهد و نیز ویژگی‌های مطلوب آن حفظ می‌شود.از نظر جایگاه تشخیص ناکارایی نشان داده شد که بین مدل‌های RDM و MSBM قرار می‌گیرد.

منابع

[1] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). Data Envelopment Analysis: a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd Edn. Springer, New York.

[2] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T., (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for use with Additive Models and Relations to other Models and in DEA. Journal of Productivity Analysis, 11(1):5–42.

[3] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., (2005). On the Treatment of Negative Data in DEA. Working Paper,Centro de Investigacion Operativa, Universidad Miguel Hernandez, Spain.
[4] Pastor, J. T., (1994). New Additive DEA Models for Handling Zero and Negative Data. Working Paper, Universidad de Alicante, Spain.
[5] Ali, AI., Seiford, L. M., (1990). Translation Invariance in Data Envelopment. Operations Research letters, 9, 403-405.
[6] Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J., (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto- Koopmans Efficient Empirical Productions Function. Journal of Econometrics, 30, 91-107.
[7] Scheel, H., (2001). Undesirable Outputs in Efficiency Evaluations. European Journal of Operational Research, 132400-410.
[8] Silva-Portela, M. C. A., Thanassoulis, E., Simpson, G., (2004). Negative Data in DEA: A Directional Distance Function Approach Applied to Bank Branches. Journal of Operations Research Society, 55:1111–1121.
[9] Sharp, J. A., Meng, W., Liu, W., (2007). A Modified Slack-Based Measure Model for Data Envelopment Analysis with Natural Negative Outputs and Inputs. Journal of Operations Research Societyt, 58:1672–1677.
[10] Ton, K., (2001). A slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment. European Journal of Operational Research, 130:498-509.
[11] Cooper, W. W., Borras, F., Aparicio, J., Pastor, J. T., Pastor, D., (2011). BAM: A Bounded Adjusted Measure of Efficiency for use with Bounded Additive Models. Journal of Productivity Analysis, 35:85-9.
[12] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T., (2001). The Response to the Comment by Steinmann and Zweifel. Journal of Productivity Analysis.
[13] Kazemi Matin, R., Azizi, R., (2011). a Two-phase approach for setting targets in DEA with negative data. Applied Mathematical Modelling, 35(2011) 5794-5803.