

## روشی برای حل مساله جدول برنامه هفتگی مدارس با استفاده از رویکرد تجزیه در برنامه ریزی ریاضی

امین وحیدی منفرد<sup>۱\*</sup>، علیرضا علی‌احمدی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکترا مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

۲- دانشیار دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۸ فروردین ۱۳۹۲

پذیرش مقاله: ۲۶ شهریور ۱۳۹۲

### چکیده

برنامه ریزی مدارس یکی از دغدغه های مدیران و حتی دبیران در ابتدای سال تحصیلی است. در مقاله‌ی حاضر با استفاده از برنامه ریزی ریاضی این مساله مدل شده است. به دلیل تعداد بسیار بالای متغیرهای ۰ و ۱ مساله، یک مساله NP-complete است و مدل سازی عادی چندان عملی نخواهد بود. سه تکه (تجزیه) کردن مساله می‌تواند راه حل مناسبی برای غلبه بر این مشکل باشد. در تکه (فاز) اول این مدل تعیین می‌شود که هر دبیر در چه روزهایی باید در این مدرسه باشد و در فاز دوم تعیین می‌شود که دبیر در هر یک از این روزهای تعیین شده چه درسی را باید به چه کلاسی بدهد و در فاز سوم تعیین می‌شود که این دروس تعیین شده در هر روز برای هر کلاس در چه ساعتی باید توسط دبیر مربوط تدریس شود.

**کلمات کلیدی:** جدول زمانی، برنامه ریزی صفر و یک، مدل سازی ریاضی، تجزیه.

### ۱ مقدمه

برنامه ریزی دبیران در مدارس یعنی مشخص کردن این که هر دبیر در چه روزی و در چه ساعتی چه درسی را به چه کلاسی بدهد به طوری که هر دبیر درسی را که تبحر دارد درس دهد [۱] و هم‌چنین زمان مورد نیاز هر کلاس برای هر درس تامین و همه‌ی ساعتی کار دبیران در یک مدرسه استفاده شود. حل این مساله‌ی پیچیده به صورت دستی مشکلات زیر را دارد:

۱. برنامه ریزی مدارس یکی از مشکلات ابتدای سال تحصیلی برای مدیران است. برنامه ریزی یک مدرسه نه چندان بزرگ چیزی حدود یک هفته از وقت یک فرد خبره را می‌گیرد.
۲. علاوه بر این جواب حاصل شده به دلایلی هم‌چون اشتباهات فردی و... لزوماً خوب نیست.
۳. گاهی اوقات در جواب حاصل شده به تغییر بی مورد روزهای مطلوب دبیران می‌انجامد.
۴. برخورد ناعادلانه با مدارس:

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: vahidi@iust.ac.ir

مدارس معتبرتر به راحتی و انعطاف پیشتری برنامه خود را تعیین می‌کنند و به علت اعتبار خود، دبیران را مجبور می‌نمایند و یا دبیران ترجیح می‌دهند برنامه این مدارس را همان‌گونه که مدیر این مدارس به آن‌ها می‌گویند پر کنند و روزهای مورد نظر مدیران را ارایه دهند و این باعث می‌شود برنامه مدارس پایین شهر و با اعتبار کمتر را تغییر دهند و برنامه این مدارس به سختی پر شود.

۵. چون در سازمان‌دهی دبیران رشته‌های مختلف به ترتیب سازمان‌دهی می‌شوند؛ ترجیحات دبیرانی که ابتدا سازمان‌دهی می‌گردند بدون دلیل بر ترجیحات دبیران بعدی ارجحیت می‌یابد.

در صورت انجام این کار به صورت کامپیوترا علاوه بر حل مشکلات مذکور سالانه حدوداً ۳۰۰ میلیون تومان از هزینه‌های آموزش و پژوهش در کل کشور کاسته می‌شود.

در این پژوهش با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی مساله مدل شده است. این مدل نوع گسترش یافته‌ای از مدل تخصیص است [۲] و برای مسایل جداول زمانی مانند جدول زمانی دروس دانشگاه و یا زمان‌بندی امتحانات نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. هم‌چنین این مدل شباهت بسیاری به برنامه‌ی سیستم‌های توزیع محصولات فاسدشدنی مانند لبیات دارد. به همین دلیل می‌توان از کلیت چنین مدلی برای حل این مساله نیز که یکی از مسایل اساسی در سیستم‌های توزیعی است؛ استفاده کرد [۳].

در پژوه حاضر با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی این مساله مدل شده است. به دلیل تعداد بسیار بالای متغیرهای ۰ و ۱ مساله، یک مساله NP-complete می‌باشد [۴]. سه تکه کردن مساله می‌تواند راه حل مناسبی برای غلبه بر این مشکل باشد. در تکه (فاز) اول این مدل تعیین می‌شود که هر دبیر در چه روزهایی باید در این مدرسه باشد و در فاز دوم تعیین می‌شود که دبیر در هر یک از این روزهای تعیین شده چه درسی را به چه کلاسی باید بدهد و در فاز سوم تعیین می‌شود که این دروس تعیین شده در هر روز برای هر کلاس در چه ساعتی باید توسط دبیر مربوط تدریس شود. علاوه بر این مدل جامعی برای حل فاز اول این مساله برای کل مدارس یک شهر ارایه شده است.

برای وارد کردن این مدل در کامپیوترا برنامه GAMS انتخاب شده زیرا با برنامه Access به راحتی ارتباط برقرار می‌کند و در قسمت‌هایی از کار لازم است که اطلاعات ورودی از Access خوانده و اطلاعات خروجی به Access داده شود. هم‌چنین این برنامه توان بالایی برای حل برنامه‌ریزی صفر و یک دارد. در این مقاله، یک دبیرستان (روزانه ۶ ساعت) با ۱۵ کلاس با ۱۵ درس در هر کلاس، ۳۰ دبیر و ۶ روز در هفته در نظر می‌گیریم و مدل مربوط به آن را ارایه می‌دهیم.

## ۲ مراحل حل فاز اول

در این فاز تعیین می‌کنیم هر دبیر در چه روزی در مدرسه است. متغیر صفر و یک  $X_{ij}$  مشخص می‌کند که آیا دبیر  $i$  در روز  $j$  در مدرسه کلاس دارد یا خیر. و متغیر صفر و یک  $X'_{ij}$  مشخص می‌کند که آیا دبیر  $i$  در روز  $j$  ام در روز زام

در مدرسه ساعت باقی ماندها را دارد یا خیر (ساعت باقی مانده یعنی باقی مانده‌ی تقسیم ساعت کل تدریس یک دبیر در مدرسه تقسیم بر ۶. این تقسیم‌بندی در جهت رفاه حال دیبران و حضور کمتر آنها انجام می‌گردد). حدود ۳۰ دبیر(i) و ۶ روز داریم پس در کل حدود ۱۸۰ متغیر صفر و یک  $X_{ij}$  و ۷۰ متغیر صفر و یک  $X'_{ij}$  در این فاز خواهیم داشت.

$P_i$ : اولویت دبیر  $i$  ام (که به صورت نسبی و با تکنیک‌هایی نسبت به سایر دبیران تعیین می‌شود).  
 $P_{ij}$ : ترجیح دبیر  $i$  ام برای حضور در روز  $j$  ام.

بنابراین هر چه  $P_i$  و  $P_{ij}$  بیشتر شوند در نتیجه مضرب این دو بیشتر می‌شود بنابراین احتمال یک شدن  $X_{ij}$  با توجه به نوع تابع هدف مساله بیشتر می‌شود.

$$\text{Max} \sum_i \sum_j P_i P_{ij} (X_{ij} + m_i * X'_{ij})$$

### تابع هدف

$m_i$  برابر است با ساعت باقی مانده‌ی دبیر  $i$  ام تقسیم بر کل ساعت یک روز (۶ ساعت). مثلاً اگر دبیر  $i$  ام کلاً

$$\text{ساعت کلاس داشته باشد} = m_i = \frac{5}{6} \text{ خواهد باشد.}$$

### محدودیت‌ها

رابطه‌ی ۱ یعنی هر دبیر به تعداد روزهای کاری کاملش (خارج قسمت تقسیم کل ساعت او بر ۶) در مدرسه باشد.

$$\sum_j X_{ij} = d_i \quad \forall i$$

رابطه‌ی ۲ یعنی دبیر  $i$  ام یک و فقط یک روز ناکامل (روزی که ساعت باقی ماندها را در آن روز تدریس می‌کند) داشته باشد.

$$\sum_j X'_{ij} = 1 \quad \forall i'$$

رابطه‌ی ۱ و ۲ سبب می‌شود هر دبیر به تعداد کل ساعتش در مدرسه کلاس داشته باشد.

رابطه‌ی ۳ بیانگر رابطه‌ی بین دو دسته متغیر است و به این معنی است که هر روز برای هر دبیر هم روز کامل و هم روز ناکامل نباشد.

$$X_{ij} + X'_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$$

رابطه‌ی ۴ بیانگر این است که تعداد دبیرهای کامل هر روز به تعداد کلاس‌های مدرسه باشد تا دبیرهای مورد نیاز هر روز تامین شود.

تعداد کلاس‌های این مدرسه:  $m$

$$\sum_i (X_{ij} + m_i * X'_{ij}) = n$$

## فاز دوم

با تخصیص دبیران به روزهای مختلف در این فاز به تخصیص دبیران به هر درس هر کلاس می‌پردازیم. برای این منظور متغیرهایی را برای فاز ۲ تعریف می‌کنیم که متغیرهای متناسب آنها در فاز اول ۱ شده است. متغیر صفر و یک  $X_{ilc}$  مشخص می‌کند که آیا دبیر ۱ام درس ۱ کلاس  $c$  را دارد یا خیر.

درس‌ها را به صورت زوج مرتب  $(l, c)$  در نظر می‌گیریم در این حالت  $1 = ۱$  در  $(۳, ۲)$  با  $2 = ۲$  در  $(۴, ۱)$  فرق خواهد داشت.

حدوداً ۳۰ دبیر (i) داریم که هر یک به طور میانگین ۲ درس را می‌توانند درس دهند (۱) و حدود ۱۵ کلاس داریم (c). پس این دسته متغیر حدود ۹۰۰ متغیر را شامل می‌شود. متغیر صفر و یک  $X_{ijlc}$  مشخص می‌کند که آیا دبیر ۱ام در روز زام یک زنگ درس ۱ را با کلاس  $c$  ام دارد یا خیر.

حدوداً ۳۰ دبیر (i) داریم که هر یک به طور میانگین ۲ درس را می‌توانند درس دهند (۱) و معمولاً ۳ روز از هفته را به این مدرسه می‌آید (j) و حدوداً به طور میانگین می‌تواند به ۱۰ کلاس نیز درس دهد (c)، پس این دسته متغیر حدود ۱۸۰۰ متغیر را شامل می‌شود و کل متغیرها ۲۷۰۰ متغیر خواهد بود.

## تابع هدف

تابع هدف در این فاز حداکثر کردن توانایی دبیران برای تدریس در رشته‌ها و پایه‌های مورد نظر و یکنواخت کردن سختی روزهای مختلف:

$$\text{Max} \sum_c \sum_l \sum_i (d_{ilc} X_{ilc}) - c * D$$

## محدودیت‌ها

$d_{ilc}$ : میزان توانایی دبیر ۱ام برای تدریس درس ۱ام در کلاس  $c$  ام (با توجه به رشته و پایه)  
 $D$ : یک متغیر است که نشان‌دهنده مراکزیم سختی دروس روزهای هفت‌های می‌باشد و  $c$  نیز ضریب وزن دادن به آن در تابع هدف است. این مولفه‌ی تابع هدف سبب می‌شود تا سختی بیشینه کاهش یابد و سختی دروس در روزهای مختلف به طور یکنواخت پراکنده شود.  $D$  نیز سختی درس ۱ام در کلاس  $c$  ام است:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_l X_{ijlc} * D_{lc} &\leq D & \forall j, c \\ \sum_i \left[ X_{ilc} * h_l - \left( \sum_j X_{ijlc} \right) \right] &= 0 & \forall (l, c) \\ \sum_i X_{ilc} &= 1 & \forall (l, c) \end{aligned}$$

رابطه‌ی ۵ یعنی هر درس را برای هر کلاس (هر  $(l, c)$ ) یک دبیر درس دهد یعنی مثلاً ریاضی کلاس ۱۰ ۱ام را فقط آقای فلانی درس دهد نه این که دو نفر این درس را به یک کلاس خاص بدهنند.

رابطه‌ی ۵ و ۶ بیانگر رابطه‌ی بین دو دسته متغیر مساله است و هم‌چنین سبب می‌شود هر درس هر کلاس را یک نفر درس دهد و هم‌چنین نیاز هر کلاس به ساعت‌های درس را نیز مرتفع می‌کند و سبب می‌شود دیگر ساعت صرف این درس کند:

$$\sum_i \sum_l X_{ijlc} = 3 \quad \forall j, c$$

رابطه‌ی ۷ یعنی در هر روز برای هر کلاس ۳ (به تعداد زنگ‌ها) دیگر باشد:

$$\sum_i X_{ijlc} = 1 \quad \forall j, l, c$$

$$\sum_c \sum_l X_{ijlc} = h_{ij} \quad \forall (i, j)$$

رابطه‌ی ۸ بیانگر این است که هر دیگر در هر روز به تعداد تعیین شده‌اش در فاز قبل ( $h_{ij}$ ) درس دهد. (در نرم‌افزارها مانند GAMS می‌توان برای کاهش حجم مساله این محدودیت را فقط بر روی زهای ممکن برای هر دیگر تعریف کرد. این محدودیت هم‌چنین سبب می‌شود هر دیگر در هر زنگ حداکثر در یک کلاس باشد و هم‌چنین هر کلاس در هر زنگ دیگر داشته باشد.

در صورت وجود درس تک‌زنگ برای این دروس به جای  $X_{ijlc}$ ،  $X'_{ijlc}$  قرار می‌دهیم که  $X'_{ijlc} = \frac{1}{2}(X_{ijlc} + X'_{ijlc})$  متغیر صفر و یکی است که نشان می‌دهد ساعت تک‌زنگ این درس در چه روزی است و نیز باید محدودیت زیر را قرار دهیم تا این متغیر فقط برای یک روز و یک دیگر یک شود:

$$\sum_j \sum_i X'_{ijlc} = 1 \quad \forall j, i$$

### فاز سوم

در این مرحله پس از تعیین این که هر دیگر چه درسی و چند ساعت و در چه روزی به چه کلاسی درس دهد؛ باید تعیین کیم که این درس را در چه زنگی درس دهد. در این مرحله چون نیازهای کلاس‌ها به دروس و روابط بین ساعت‌های مختلف یک درس در فاز قبل در نظر گرفته شده است؛ می‌توانیم روزها را به طور معجزا برنامه‌ریزی کنیم.  $X_{iikl}$  متغیری است که نشان می‌دهد دیگر  $\lambda$ ام در کلاس  $\lambda$ ام یک زنگ درس  $\lambda$ را در زنگ  $k$  دارد یا نه. البته این متغیر را برای متغیرهایی که متغیر متناسب با آن یک شود؛ تعریف می‌کنیم.

برای هر درس تک‌زنگ  $X'_{ijkc}$  را مشابه تعریف گفته شده در فاز قبل تعریف می‌کنیم و به جای  $X_{ijkc}$  قرار

می‌دهیم  $(X_{ijkc} + \frac{1}{2}X'_{ijkc})$ .

در کل این فاز حدود ۱۵۰ متغیر صفر و یک خواهد داشت.

### تابع هدف

تابع هدف در این فاز حداکثر کردن مطلوبیت دروس برای قرار گرفتن در ساعت‌ها مختلف روز مدنظر ( $u_{ijklc}$ ) است:

$$Max \sum_i \sum_k \sum_l \sum_c (u_{ijklc} * X_{iklc}) - c * D$$

### محدودیت‌ها

به علت مساوی بودن عرضه و تقاضای ساعت در هر زنگ یک نفر یا دو نفر تک‌زنگ خواهیم داشت:

$$\sum_c \sum_l X_{iklc} \leq 1 \quad \forall i, k$$

محدودیت ۹ بیانگر این است که هر نفر در هر زنگ فقط در یک کلاس باشد. به علت مساوی بودن عرضه و تقاضای ساعت، در هر زنگ یک نفر یا دو نفر تک‌زنگ خواهیم داشت و محدودیت ۹ را می‌توان حذف کرد:

$$\sum_i \sum_l X_{iklc} = 1 \quad \forall c, k$$

محدودیت ۱۰ بیانگر این است که هر کلاس در هر زنگ دبیر داشته باشد:

$$\sum_k \sum_c X_{iklc} = h_{ikc} \quad \forall i, l, c$$

تعداد زنگ دبیر آم برای درس آم کلاس در هر زنگ مشخص شده است.  $h_{ikc}$

### ۳ نتیجه‌گیری

#### ۱-۳ بررسی امکان آزادسازی خطی مساله

با توجه به این‌که باید مدل totally unimodular باشد تا چنین حالتی رخ دهد به بررسی این ویژگی در مدل‌ها می‌پردازیم [۵].

فاز یک ماتریس ضرایبش به شکل زیر می‌شود که دترمینان آن لزو ما ۱، ۱ و ۰ نمی‌گردد.

$$\left( \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & \circ & \cdots & \cdots & \circ \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \circ & \cdots & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \cdots & \circ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \cdots & \circ & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & \cdots & & & & & 1 \\ \vdots & & \cdots & & & & & \vdots \\ 1 & & \cdots & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & & & & & m_i & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right)$$

شکل ۱. ماتریس بررسی امکان آزادسازی خطی

به علت وجود ضریب  $m_i$  در مدل totally unimodular نیست. فاز دو نیز دترمینان آن لزوماً  $-1$  و  $0$  نمی‌شود؛ به علت وجود ضریب  $D_i$  و  $h_i$  در مدل totally unimodular  $X'_{ijkc}$  برای متغیرهای  $0/5$  نمی‌باشد. دترمینان فاز سه نیز به علت وجود ضریب  $1/3$  نمی‌باشد.

### ۳-۱۲ اگر مساله به جواب نرسید

می‌توان محدودیت‌های غیر اصلی را غیر فعال کرد.(به ترتیب اولویت محدودیت‌ها تا جایی که به جواب برسیم).

۱. ساعات مناسب‌تری از دیبرانی که به نظر گلوگاه می‌آیند؛ گرفت.
۲. اگر این روش جواب نداد؛ مجبوریم تعداد زنگ‌ها را به جای  $3, 6$  بگیریم.

### ۳-۳ محدودیت‌های فرعی

محدودیت‌های دیگری نیز در برنامه‌ریزی مدارس وجود دارد اما این محدودیت‌ها، محدودیت‌های اصلی این مساله نیستند و از مدرسه‌ای به مدرسه‌ای دیگر فرق می‌کنند که ما در اینجا تعدادی از مهم‌ترین‌های آن‌ها را ذکر کرده؛ مدل مربوط به آن‌ها را ارایه خواهیم کرد.

- مطلوبیت‌های دیگر مساله را هم می‌توان به صورت تابع هدف و یا آرمان در فاز مربوط به آن وارد نمود.
- اضافه کاری: برای افزودن ساعات اضافه کاری دیبران به برنامه باید ارجحیت (ضریب  $P_i$ ) کمتری برای دیبران اضافه کاری در نظر گرفت تا ابتدا ساعات مورد نظر دیبران موظفی پر شود.

اگر دبیری داشتیم که در مدرسه‌ای هم موظفی و هم اضافه‌کاری داشت می‌توان آن را دو دبیر مجزا در نظر گرفت و محدودیتی اضافه کرد که این دو دبیر مجازاً، مجزا بتوانند یک ساعت از درس را یکی و یک ساعت دیگر را دیگری درس دهد. البته پسیار کم پیش می‌آید که چنین حالتی رخ دهد.

- درس‌هایی که کمبود دبیر در آن در شهر است: به دبیران مربوط به این دروس ضرایب  $P_i$  بزرگ‌تری اختصاص می‌دهیم.

- محدودیت مکانی بعضی از دروس مانند کارگاه، آزمایشگاه، سایت و ورزش:  
مثالاً سایت:

$$\sum_i \sum_c (X_{ij_{kc}} \times X_{ilc}) = n_{site} \quad \forall j, k$$

$n_{site}$  تعداد سایتها مدرسه است.

- تداخل شیفت صبح و بعد از ظهر یک مدرسه: برای خالی شدن کلاس‌ها باید تعدادی از کلاس‌ها را به سایت، زمین ورزش، آزمایشگاه و یا کارگاه فرستاد.

فرض کنید شماره این ۴ درس از ۱ تا ۱ باشد:

$$\sum_i \sum_l (X_{ij_{lc}} \times X_{ilc}) = 1 \quad \forall c, j, l$$

از روزهایی که این حالت وجود دارد و  $C$  کلاس‌هایی که تداخل دارند.

عبارت داخل پرانتز یعنی دبیر ۱ با کلاس ۱ در زمان  $j$  دارد.

- دبیری کلاس، پایه، درس و یا زمان خاصی را نمی‌خواهد:  
مثالاً درس خاصی را نمی‌خواهد:

$$\sum_c X_{ilc} = 0$$

### ۳-۴ مزایای این روش به مدل عادی زمان‌بندی برای این مساله

اگر بخواهیم این مساله را به روش تخصیص معمولی حل کنیم حدود ۱۲۰۰۰۰ متغیر داریم که تعداد بسیار زیادی است.

$$120000 / 2700 = 45$$

تعداد متغیرهای این مساله ۴۵ حداکثر (فاز ۲) برابر بیشتر است.  $X_{iilk}$  متغیری است که نشان می‌دهد دبیر  $i$  ام در روز  $j$  ام در کلاس  $k$  ام یک زنگ درس ۱ را در زنگ  $k$  دارد یا نه و حتی اگر با استفاده از روش این مساله به ازای هر ن، فقط دو درس در نظر بگیرید در کل حدود ۱۶۰۰۰۰ متغیر خواهیم داشت.

تعداد متغیرهای این مساله حدود ۶ برابر بیشتر است.

$$160000 / 2700 \approx 6$$

## منابع

- [۱] سوادکوهی، عبدالعظیم، طراحی مدل برنامه‌ریزی آموزشی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه امیرکبیر.
- [۲] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., (2004). Linear Programming and Network Flows. Wiley-Interscience.
- [۳] Winston, W. L., Goldberg, J. B., (2004). Operations research: applications and algorithms. Thomson Brooks/Cole.
- [۴] Handbooks in operations research and management science contents of the previous volume. (1990). In D. P. Heyman & M. J. Sobel (Eds.), Handbooks in Operations Research and Management Science (Vol. Volume 2, pp. 725): Elsevier.
- [۵] Murty, K. G., (1983). Linear programming. Wiley.