

بهبود قدرت تمايز تکنیک DEA با استفاده از ارزیابی برشی

علیرضا امیرتیموری^{*}، سهراب کردرستمی^۱، لیلا خوش اندام^۲، پیمان علیدوست ذوقی^۳

- ۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی
- ۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گروه ریاضی
- ۳- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لشت نشاء- زیباکنار، گروه ریاضی
- ۴- دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی

رسید مقاله: ۲۷ مرداد ۱۳۸۹

پذیرش مقاله: ۱۶ دی ۱۳۸۹

چکیده

ارزیابی برشی یک تعیین قوی از تکنیک تحلیل پوششی داده‌هاست به طوری که نه تنها یک رتبه‌بندی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند؛ بلکه الگوهای وزنی نامتناسب را نیز حذف می‌نماید. عاملی که ممکن است در استفاده از ارزیابی برشی مشکل ساز شود، وجود وزن‌های بهینه چندگانه می‌باشد؛ در نتیجه برای بهبود روش ارزیابی برشی، از توابع هدف ثانویه استفاده می‌شود. در این مقاله، یک روش، توسط دو تابع هدف ثانویه متفاوت معرفی خواهد شد و با حل این مدل‌ها، یک الگوی وزنی مناسب برای محاسبه ارزیابی برشی و در نهایت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری فراهم خواهد گردید.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، ارزیابی برشی، توابع هدف ثانویه.

۱ مقدمه

یکی از شاخه‌های کاربردی تحقیق در عملیات، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با چند ورودی و چند خروجی به کار می‌رود. چارنژ و همکاران [۱] نخستین بار با تعیین تحقیق فارل [۲] تکنیک DEA را معرفی کردند. DEA به هر واحد کارآآندازه کارآآبی یک و به هر واحد ناکارآآندازه کارآآبی کمتر از یک تخصیص می‌دهد. در اغلب کاربردهای عملی، بیش از یک واحد، کارآآرزیابی می‌شود و از این‌رو ایجاد تمايز و رتبه‌بندی این واحدها مبحث جالبی در حیطه تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. یکی از روش‌های رتبه‌بندی واحدها، روش ارزیابی برشی است. سکستون و همکاران [۳]. ارزیابی برشی دارای دو مزیت عمده می‌باشد: (۱) یک رتبه‌بندی یکتا از واحدها فراهم و (۲) الگوهای وزنی نامتناسب را حذف می‌کند. اندرسون و همکاران [۳]. رتبه کارآآبی برشی به دست آمده از مدل‌های DEA معمولاً یکتا نیستند و این

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ateimoori@iaurasht.ac.ir

ناشی از چندگانگی وزن های بهینه در DEA می باشد که ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. سکستون و همکاران و دویل و گرین [۴] پیشنهاد کردند که از اهداف ثانویه استفاده شود. برای این منظور آنها دو مدل Max و Min را مطرح نمودند. در مدل اول، علاوه بر این که کارآیی واحد تحت بررسی را ماقسیم می کند؛ میانگین کارآیی واحد های دیگر را نیز ماقسیم می نماید. در مدل دوم، علاوه بر این که کارآیی واحد تحت بررسی را مینیمم می کند؛ میانگین کارآیی واحد های دیگر را ماقسیم می نماید. در سال ۲۰۰۸ کوک و همکاران [۵]، با معرفی سه مدل با توابع هدف متفاوت، به صورت: (۱) مینیمم کردن انحراف کل از نقطه ایدهآل، (۲) مینیمم کردن ماقسیم انحرافات، (۳) مینیمم کردن میانگین قدر مطلق انحرافات، تعمیمی بر مدل دویل و گرین ارایه کردند.

در این مقاله به منظور بهبود ارزیابی بر شی، و در نهایت رسیدن به رتبه بندی، دو مدل با توابع هدف متفاوت ارایه می شود و سپس با ارایه یک مثال، نتایج حاصل بررسی خواهد شد.

۲ ارزیابی بر شی

فرض کنیم مجموعه ای از n واحد تصمیم گیری جهت ارزیابی وجود دارند. هر j ، DMU_j خروجی متفاوت را به کمک m ورودی متفاوت تولید می کند. i امین ورودی و r امین خروجی j ، DMU_j به ترتیب با x_{ij} ، y_{rj} و m ، s نشان داده می شوند.

ارزیابی بر شی اغلب به صورت یک فرآیند دو مرحله ای انجام می شود. در مرحله اول با استفاده از یکی از مدل های استاندارد DEA مانند مدل مضربی (CCR)، برای هر DMU یک بردار وزنی به دست می آید. برای هر DMU تحت ارزیابی میزان کارآیی، E_{pp}^* ، به دست آمده از مدل CCR به وسیله مساله بھینه سازی زیر داده می شود:

$$E_{pp}^* = \text{Max} \quad E_{pp} = \frac{\sum_{i=1}^s u_{ip} y_{ip}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip}}$$

s.t. (1)

$$E_{pj} = \frac{\sum_{i=1}^s u_{ip} y_{ij}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_{ip} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, j.$$

که در آن v_{ip} و u_{ip} به ترتیب اوزان مربوط به i امین ورودی و r امین خروجی می باشند. فرض کنیم v_{ip}^* ، u_{ip}^* جواب بھینه مدل (1) باشند. اندازه بر شی j DMU_j با استفاده از وزن های بھینه مدل (1) در ارزیابی DMU_p به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ij}}, \quad (j = 1 \dots n) \quad (2)$$

برای $j = 1 \dots n$ DMU_j میانگین تمام E_{pj} به عنوان میزان کارآیی ارزیابی برشی برای DMU_j معرفی می‌شود. بنابراین کارآیی ارزیابی برشی DMU_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{E}_j = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n E_{pj} \quad (3)$$

۳ ارزیابی برشی مبتنی بر هدف ثانویه

در روشنی که در ذیل توصیف خواهد شد، ابتدا به کمک یکی از مدل‌های اساسی DEA ، مثلاً مدل CCR ، اندازه کارآیی DMU ‌ها اندازه گیری می‌شود و به کمک آن، با حفظ شرایط کارآیی واحدها، طی یک فرآیند دو مرحله‌ای، اندازه برشی واحدها محاسبه می‌شود.
مدل مضربی CCR را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} e_p &= \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp} \\ &\text{s.t.} \\ &\quad \sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip} = 1, \\ &\quad \sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp} - \sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip} = 0, \\ &\quad u_{rp} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0 \quad \text{for all } i, r. \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن DMU_p تحت ارزیابی است. فرض کنیم e_p^* مقدار بهینه مدل (4) باشد. در مرحله‌ی بعد، به دنبال بردار وزنی هستیم که اولاً شرایط کارآیی واحد تصمیم گیری تحت ارزیابی، DMU_p ، را حفظ کند، ثانیاً بقیه واحدهای تصمیم گیری را تا حد ممکن به سطح کارآیی ایده آل نزدیک کند، برای این منظور تلاش

می‌کنیم فاصله $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}$ را تا حد ممکن کم کنیم. مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \rho \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \\
 & \rho \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} = e_p^*, \\
 & u_{rp} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, r.
 \end{aligned} \tag{5}$$

در مدل (5) با عنوان ρ به عنوان یک کران پایین برای هدف کاهش میزان پراکندگی زوج مرتبهای $(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj})$ در فضای مجموع توزین شده خروجی‌ها و مجموع توزین شده ورودی‌ها می‌باشد. محدودیت سوم در مدل (5) شرایط کارآیی DMU_p را حفظ می‌کند. در مدل (5)، احتمال صفر شدن وزن‌ها وجود دارد. در مرحله سوم به منظور جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، کران پایین وزن‌های v_{ip} و u_{rp} را ماکزیمم می‌کنیم. فرض کنیم ρ^* مقدار بهینه مدل (5) باشد. برای نیل به هدف، مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \phi \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \\
 & \rho^* \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} = e_p^*, \\
 & \phi \leq u_{rp}, \quad \phi \leq v_{ip}, \quad \text{for all } i, r.
 \end{aligned} \tag{6}$$

فرض کنیم DMU_j را به m جواب بهینه مدل (6) باشد. اندازه برشی v_{ip}^* ، s ، r ، u_{rp}^* صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_j^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ij}}, \quad p = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

n درایه $e_j^{(p)}$ ها ماتریس برشی مربعی $c = [e_j^{(p)}]$ را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$c = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(1)} & \cdots & e_n^{(1)} \\ e_1^{(2)} & e_1^{(2)} & \cdots & e_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1^{(n)} & e_1^{(n)} & \cdots & e_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

میانگین هر ستون ماتریس فوق اندازه کارایی برشی هر واحد تصمیم‌گیری را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\bar{e}_j = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n e_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، می‌توانیم مجموع وزن‌ها را با حفظ شرایط بهینگی بیشینه کنیم. برای این منظور مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \quad (9)$$

$$\rho^* \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{ij} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ip} = e_p^*,$$

$$u_{ip} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, r.$$

۴ مثال عددی

برای توصیف فرآیند محاسباتی روش معرفی شده، آن را روی یک مجموعه از داده‌ها اجرا می‌کنیم؛ هجده واحد تصمیم‌گیری با دو ورودی و سه خروجی را در نظر می‌گیریم. داده‌های ورودی و خروجی در جدول (۱) خلاصه شده است.

جدول ۱. ورودی ها و خروجی های مثال اول

DMU	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
۱	۲۸۷۴/۸	۱۹۷۳/۸	۱۶۰/۸۹	۸۰/۸۰۰	۵۰/۹۲
۲	۹۴۶/۳	۶۹۱	۲۱/۱۴	۱۸۱۷۲	۶۵۶۳
۳	۹۸۵۴/۰	۴۳۰۲۴	۳۷۵/۲۵	۱۴۴۵۳۰	۲۴۳۷
۴	۲۳۰۵/۱	۱۰۸۱۵	۱۷۶/۹۸	۷۰۳۱۸	۳۱۴۵
۵	۲۳۰۵/۱	۲۰۹۹	۱۰۲/۱۲	۵۵۴۱۹	۱۲۲۵
۶	۱۰۱۰/۳	۷۵۷	۹۵/۱۷	۲۷۴۲۲	۲۴۶
۷	۲۸۲/۳	۱۱۶۹/۰۰	۱۰۲۹/۰۹	۳۵۱۳۹۰	۱۴۹۰۴
۸	۱۷۴۷۸/۶	۲۰۲۴	۳۰/۰۷	۲۳۵۵۰	۱۱۲۶
۹	۶۶۱/۸	۳۲۱۸	۱۶۰/۵۸	۵۹۴۰۶	۲۲۳۰
۱۰	۱۵۴۴/۲	۵۷۴	۵۳/۶۹	۴۷۵۰۴	۴۳۰
۱۱	۴۲۸/۴	۲۹۸۴۲	۲۵۸/۰۹	۱۵۱۳۵۶	۴۶۴۹
۱۲	۶۹۷/۷	۳۳۹۴	۳۸/۰۲	۴۵۳۳۶	۱۵۵۵
۱۳	۱۰۶/۴	۳۶۷	۷/۰۷	۸۲۳۶	۱۲۱
۱۴	۴۵۳۹/۳	۴۵۸۰۹	۱۱۶/۶۴	۵۶۱۳۵	۹۵۶
۱۵	۹۵۷/۸	۱۶۹۴۷	۲۹/۲۰	۱۷۵۵۴	۲۳۱
۱۶	۱۲۰۹/۲	۱۵۷۴۱	۶۵/۳۶	۶۲۳۴۱	۶۱۸
۱۷	۹۷۲/۴	۲۳۸۲۲	۴۵/۵۲	۲۵۲۰۳	۵۱۳
۱۸	۲۱۹۲/۰	۱۰۹۴۳	۲۵/۲۴	۴۰۲۶۷	۸۹۵

با اجرای مدل (۴) مشخص شد سه واحد تصمیم گیری کارآ شدند. اندازه کارآیی واحدها در ستون دوم جدول (۲) گنجانده شده است. به کمک این مقادیر کارآیی و اجرای مدل (۵)، مقادیر بهینه ρ^* ها در ستون سوم جدول (۲) آمده است.

جدول ۲. میزان کارآیی واحدها و کران پایین تفاضل مجموع توزین شده ورودی ها و خروجی ها

DMU	e_p^*	ρ^*
۱	۰/۴۶۹۰	-۴/۲۱۵۷
۲	۱/۰۰۰۰	-۱۱/۸۸۰۷
۳	۰/۲۷۸۲	-۱/۶۴۲۹
۴	۰/۵۰۲۲	-۴/۸۸۱۶
۵	۰/۶۳۱۰	-۱۱/۹۹۹۵
۶	۱/۰۰۰۰	-۳۹/۷۶۸۴
۷	۰/۳۵۷۹	-۰/۶۴۲۱
۸	۰/۴۹۵۹	-۱۸/۳۱۸۳
۹	۰/۶۵۷۶	-۲۴/۱۴۹۳

DMU	e_p^*	ρ^*
۱۰	۱/۰۰۰۰	-۲۸/۳۰۷۱
۱۱	۰/۳۰۰۹	-۱/۹۴۶۵
۱۲	۰/۷۸۶۶	-۱۸/۵۰۷۶
۱۳	۰/۷۵۱۴	-۱۲۱/۳۶۱۳
۱۴	۰/۱۳۸۱	-۲/۶۷۰۲
۱۵	۰/۱۸۶۷	-۱۲/۶۵۱۷
۱۶	۰/۴۷۰۳	-۱۰/۶۷۸۰
۱۷	۰/۳۰۵۹	-۱۱/۵۵۴۰
۱۸	۰/۱۹۵۲	-۵/۸۹۰۸

در مرحله آخر برای یافتن وزن‌های بهینه، مدل (۶) را حل کرده؛ و با استفاده از این وزن ارزیابی برشی را محاسبه می‌کنیم و در نهایت رتبه‌بندی واحدها را انجام می‌دهیم. نتایج حاصل از این محاسبات در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳. میزان ارزیابی برشی و رتبه‌بندی واحدها توسط اوزان حاصل از مدل (۸)

DMU	ارزیابی برشی	رتبه
۱	۰/۳۹۴۴	۱۰
۲	۰/۹۱۸۵	۲
۳	۰/۲۱۵۳	۱۵
۴	۰/۳۹۸۹	۹
۵	۰/۵۷۷۷	۶
۶	۰/۹۱۳۳	۳
۷	۰/۲۶۲۹	۱۲
۸	۰/۴۲۰۳	۸
۹	۰/۵۲۳۳	۷
۱۰	۰/۹۲۸۴	۱
۱۱	۰/۲۵۲۹	۱۳
۱۲	۰/۶۱۰۹	۴
۱۳	۰/۵۹۵۸	۵
۱۴	۰/۱۱۲۹	۱۸
۱۵	۰/۱۴۴۱	۱۷
۱۶	۰/۳۵۲۷	۱۱
۱۷	۰/۲۳۳۶	۱۴
۱۸	۰/۱۴۴۴	۱۶

برای به دست آوردن کارآبی ارزیابی برشی از طریق وزن‌های بهینه مدل (۹)، مجدداً مراحل فوق را با استفاده از این وزن‌ها محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول (۴) آورده شده است.

جدول ۴. میزان ارزیابی برشی و رتبه بندی واحد ها توسط اوزان حاصل از مدل (۹)

DMU	ارزیابی برشی	رتبه
۱	۰/۳۹۷۸	۱۰
۲	۰/۹۴۸۶	۱
۳	۰/۲۲۲۵	۱۵
۴	۰/۴۱۲۶	۹
۵	۰/۵۹۰۲	۶
۶	۰/۹۴۸۵	۲
۷	۰/۲۷۳۹	۱۲
۸	۰/۴۱۷۰	۸
۹	۰/۵۵۷۵	۷
۱۰	۰/۸۹۱۷	۳
۱۱	۰/۲۵۴۲	۱۴
۱۲	۰/۵۹۱۰	۴
۱۳	۰/۵۶۳۴	۵
۱۴	۰/۱۱۵۰	۱۸
۱۵	۰/۱۴۷۰	۱۶
۱۶	۰/۳۴۶۳	۱۱
۱۷	۰/۲۴۵۹	۱۳
۱۸	۰/۱۳۶۵	۱۷

۴ نتیجه گیری

در این مقاله با تعمیم روش های دوبل و گرین (۱۹۹۴) و کوک و همکاران (۲۰۰۸)، از طریق معرفی یک تابع هدف ثانویه، به کارآیی برشی نهایی برای هر DMU دست پیدا کردیم. مدل های پیشنهادی به همراه توابع هدف مختلف شان، در شرایط مختلف به کار برده می شوند.

منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European Journal of Operational Research, 2, 429-4.
- [2] Farrell, M. J., (1957). The Measurement of productive Efficiency. Jurnal of the Royal Statistical Societ, 120, 253-281.
- [3] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis:critque and extention. In: Silkman, R.H. (Ed), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, vol. 32 Jossey-Bass, San Francisco,32, 73-105.
- [4] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and cross efficiency in DEA: Derivations, meaning and the uses. Journal of the Operational Research Society, 45 (5), 567-578.

- [5] Liang Liang, J. W., Wade, D. C., Joe, Z., (2008). Alternative secondary goals in DEA cross efficiency evaluation. Int. J. Production Economics, 113 1025-1030.
- [6] Anderson, T. R., Hollingsworth, K. B., Inman, L. B., (2002). The fixed weighting nature of cross-evaluation model. Jouornal of Productivity Analysis, 18(1) , 249-255