مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال دهم، شماره دوم (پیاپی ۳۷)، تابستان ۹۲، ص ص ۱۳۵-۱۱۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

استفاده از فرآیند شبیه سازی بوت استرپ برای برآورد مرز تولید کارای ناپارامتری
بررسی مشکلات موجود در فرآیند ارایه شده در مقاله سعید عبادی

علیرضا بهاری*[1]، سعید حسینی نهاد[2]، قاسم حبیبی‌نیا[3]
۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد قم، قم، ایران
۲- دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
۳- دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرکرد، شهرکرد، ایران

رسید مقاله: ۲۱ آبان ۱۳۹۱
پذیرش مقاله: ۲۲ فروردین ۱۳۹۲

چکیده

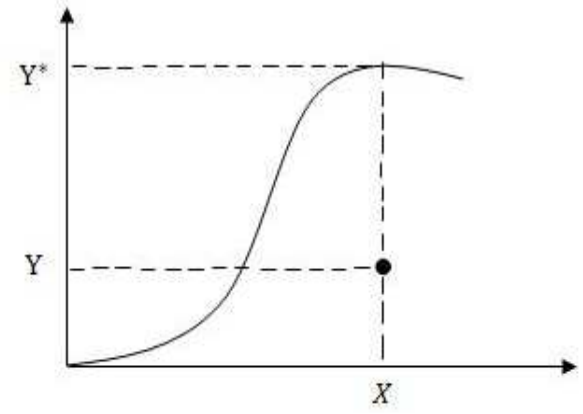
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ناپارامتری برای محاسبه‌ی (برآورد) کارایی گروهی از واحدهاست که فعالیت یکسانی را انجام می‌دهند. مرز به دست آمده از این روش یک مرز نسبی قابل دسترس در دنیای واقعی می‌باشد. درست برخلاف روش پارامتری که در آن واحدها نسبت به مرزی سنجیده می‌شوند که عموماً در دنیای واقعی، غیر قابل دسترس است. کارایی به دست آمده از این روش یک مقدار نسبی و نه مقدار واقعی آن می‌باشد. به عبارت دیگر کارایی به دست آمده از این روش برآوردی از مقدار واقعی کارایی است. به دلیل نامشخص بودن توزیع جامعه میزان دقت کارایی برآورد شده مورد سوال قرار می‌گیرد. فرآیند شبیه‌سازی بوت استرپ که توسط افرون [۱] معرفی شده است، می‌تواند برای بالا بردن میزان دقت کارایی برآورد شده مورد استفاده قرار گیرد. در این مقاله ضمن تشریح کامل فرآیند بوت استرپ و نحوه استفاده از آن، به اشکالات موجود در مقاله‌ی سعید عبادی که بدون توجه به برخی نارسایی‌های این روش، به کارگرفته شده است؛ اشاره می‌کنیم. در این مقاله از روش بوت استرپ ساده استفاده شده که با وجود تذکراتی که افرون در استفاده از این روش و به خصوص برای مدل‌های مرزی داده بود، فریر و هیرچبرگ به گونه‌ای دیگر از این روش استفاده کردند. علاوه بر این، در مقاله سعید عبادی [۲] هیچ اشاره‌ایی به پیشینه‌ی بوت استرپ نشده و خواننده گمان می‌کند که کار توسط نویسنده مقاله انجام شده است. اما این کار مربوط به مقاله فریر- هیرچبرگ [۳] می‌باشد که بعدها به دلیل برخی نارسایی‌ها این روش منسوخ شد [۴].

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، DEA، بوت استرپ، مرز کارای ناپارامتری.

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیک: ar_bahari@yahoo.com

۱ مقدمه

برای محاسبه‌ی کارایی واقعی نیاز داریم تا از بیشترین خروجی قابل تولید از یک ورودی اطلاع داشته باشیم. به عبارت دیگر، به یک تابع تحت عنوان تابع تولید نیاز داریم که مقدار تابع به ازای هر ورودی، نشان دهنده‌ی بیشترین میزان قابل تولید از آن ورودی باشد (شکل ۱). متاسفانه در دنیای واقعی، قادر به محاسبه بیشترین میزان تولید شده از یک ورودی مشخص نیستیم. به عبارت دیگر مرز کارایی واقعی نامشخص است.



شکل ۱. ورودی X برای تولید خروجی Y استفاده شده است و Y^* بیشترین میزان قابل تولید از ورودی X است.

برای فائق آمدن بر این مشکل و ارایه‌ی مقدار کارایی هر واحد، می‌توان تابعی را به عنوان تابع تولید مشخص کرد. به عبارت دیگر یک تخمین از مرز واقعی را به جای آن بنشانیم. این کار به دو روش پارامتری و ناپارامتری انجام می‌پذیرد.

در مدل‌های پارامتری، شکل تابعی خاصی با برخی پارامترهای مجهول برای کارایی در نظر گرفته می‌شود. در این روش هدف مشخص کردن پارامترهای مجهول به کمک داده‌های نمونه موجود می‌باشد. یکی از بزرگ‌ترین معایب روش پارامتری، تحمیل شکل تابعی خاصی به مدل است. علاوه بر آن واحدها نسبت به مرزی ارزیابی می‌شوند که معمولاً در دنیای واقعی غیر قابل دسترس می‌باشد. در روش ناپارامتری هیچ شکل تابعی خاصی به مدل تحمیل نمی‌شود و اجازه داده می‌شود تا داده‌های نمونه، خود شکل تابع تولید را مشخص کنند. در این روش به جای آنکه واحدها با یک مرز غیر قابل دسترس پارامتری ارزیابی شوند؛ با یک مرز قابل دسترس ساخته شده از داده‌ها ارزیابی می‌شوند. یکی از ضعف‌های این روش تغییر محسوس مقادیر کارایی، در صورت تغییر نمونه است که دلیل اصلی استفاده از بوت استرپ برای تخمین بهتر می‌باشد.

با توجه به آنچه گفته شد؛ در اینجا با مساله‌ی تخمین مرز کارایی مواجه هستیم. ابتدا می‌بایست برآوردی از مرز کارایی به دست آورده؛ سپس کارایی هر واحد را نسبت به آن مرز محاسبه کنیم. واضح است که هر چه مرز برآورد شده بهتر باشد؛ مقادیر کارایی به دست آمده، به مقادیر کارایی‌های واقعی نزدیک‌تر خواهد بود. در ادامه و در بخش ۲ به بررسی برخی خصوصیات مهم مرز تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در بخش ۳ ساختار کلی فرآیند بوت استرپ تشریح داده شده است. بخش ۴ اختصاص به روش‌های تولید داده (DGP) دارد. در این بخش

ابتدا در مورد روش بوت استرپ ساده (فرآیند استفاده شده در مقاله سعید عبادی) صحبت می‌کنیم و سپس دلایل عدم استفاده از این روش در مدل‌های مرزی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و در انتهای این بخش فرآیند اصلاح شده [۴] را تشریح می‌نماییم.

۲ برآورد مرز ناپارامتری

بنکر [۵] با در نظر گرفتن شکل تابعی زیر برای مرز کارایی، نشان داد که مرزی که به دست می‌آید؛ در واقع همان مرز مشخص شده به وسیله DEA است.

۱- $g(x)$ یکنواست. یعنی اگر $x'' \le x'$ آن‌گاه $g(x'') \le g(x')$.

۲- $g(x)$ محدب است. یعنی اگر x' و x'' در دامنه تابع باشند و $x = \gamma x' + (1-\gamma)x''$ که $0 < \gamma < 1$ آن‌گاه $g(x) \ge \gamma g(x') + (1-\gamma)g(x'')$.

۳- برای هر مشاهده (x_j, y_j) داریم $g(x_j) \ge y_j$ که $j = 1, \ldots, n$.

۴- برای هر تابع $g(x)$ که در شرایط مذکور صدق کند و برای هر x در دامنه آن، $g(x) \ge g(x)$.

او نشان داد که برآوردگر DEA سازگاری ضعیفی دارد و DEA برآوردگر بیشینه درست‌نمایی از مرز اصلی است.

بنکر[۶] اولین کسی بود که به ارایه‌ی استنباط‌های آماری روی مرز DEA پرداخت. تا قبل از ارایه‌ی نتایج بنکر، DEA به خاطر ناپارامتری بودن و عدم توانایی در ارایه‌ی تحلیل‌های آماری، مورد حمله و انتقاد بسیاری از محققان قرار گرفته بود. اگرچه بنکر نتایج قابل توجهی را برای DEA به دست آورد اما هیچ صحبتی از سرعت همگرایی مرز DEA به مرز ناشناخته اصلی نکرد.

کارستولوو همکارانش [۷ و۸] ضمن بررسی مجدد کار بنکر، سازگاری و سرعت همگرایی مرز DEA را به مرز ناشناخته اصلی در حالت یک خروجی، بررسی کردند. ضمناً آن‌ها نشان دادند که تحت برخی شرایط عمومی ضعیف، مرز DEA برآوردگر درست‌نمایی بیشینه از مرز اصلی است و منطبق بر نتیجه‌ای بود که بنکر به دست آورده بود.

سرعت همگرایی یک برآوردگر از پارامتر اصلی به معیار اندازه‌گیری اختلاف آن‌ها بستگی دارد. کارستلو و همکارانش از روش معمول اندازه لبگ تفاضل متقارن برای سنجش این اختلاف استفاده کردند:

$$d_{\Delta}(\Psi, \hat{\Psi}_{DEA-VRS}) = mes(\Psi, \hat{\Psi}_{DEA-VRS}) \quad (۱)$$

که

$$\Psi = \{(X,Y) \in R^{p+q} | \text{ } Y \text{ به وسیله یک } x \text{ قابل تولید باشد}\} \quad (۲)$$

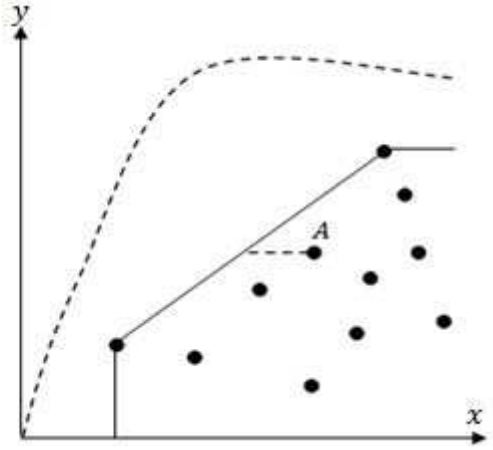
مجموعه امکان تولید اصلی و ناشناخته و

$$\Psi_{DEA-VRS} = \left\{ (X,Y) | X \ge \sum_{j=1}^{n} \eta_j X_j,\ Y \le \sum_{j=1}^{n} \eta_j Y_j,\ \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1 \right\}, \quad (۳)$$

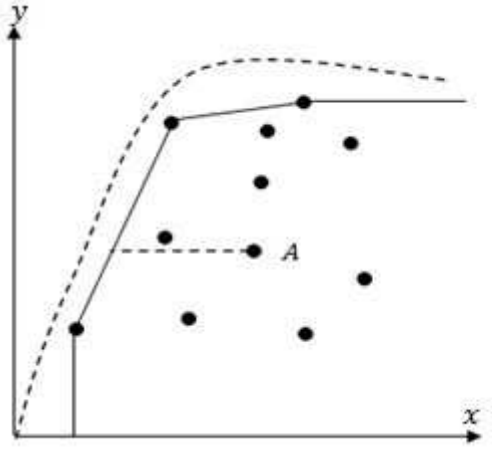
مرز DEA تحت فرض بازده به مقیاس متغیر است.

آن‌ها نشان دادند که $E_P(n^{-\frac{2}{p+2}} d_\Delta(\Psi,\hat{\Psi}_{DEA}))$ به طور مجانبی کراندار است؛ به این معنا که برای n های خیلی بزرگ، اختلاف بین Ψ و $\hat{\Psi}_{DEA}$ برابر با $O(n^{-\frac{2}{p+2}})$ است. علاوه بر این، آن‌ها نشان دادند که هر برآورد دیگری با مجموعه امکان تولید محدب و مرزهای یکنوا نمی‌تواند با سرعت بهتری نسبت به مرز DEA، به مرز اصلی همگرا باشد. با وجود این خصوصیات بارز برای مرز DEA، باید متذکر شویم که سرعت همگرایی آن کند بوده؛ علاوه بر آن با افزایش تعداد ورودی‌ها این نرخ کمتر نیز می‌شود.

به دو شکل زیر دقت کنید که در آن واحد A در دو نمونه ظاهر شده است.



شکل ۲. نمونه‌ی اول



شکل ۳. نمونه‌ی دوم

کارایی واحد A در نمونه‌ی دوم به طور محسوسی تغییر یافته است. این تغییر در مقدار کارایی ناشی از طبیعت ناپارامتری مدل DEA می‌باشد. مرز DEA وابسته به نمونه است و با تغییر نمونه مرز قبلی فرو می‌پاشد. اصطلاحاً گفته می‌شود که کارایی DEA نسبت به اندازه‌ی نمونه‌گیری، حساس است. البته همه ضعف این مدل، به دلیل ناپارامتری بودن آن نیست بلکه به اندازه نمونه نیز بستگی دارد و اینکه ما تنها یک نمونه از جامعه ناشناخته را در دست داریم. به هر حال یکی از نقاط ضعف اساسی مدل‌های DEA است که برخی محققان بدون در نظر گرفتن آن و بدون هیچ اقدامی در افزایش میزان دقت DEA به استفاده از این مدل‌ها برای تخمین کارایی دست می‌زنند [۹].

۳ ساختار کلی بوت استرپ

فعالیت یک سازمان تولیدی، به وسیله مجموعه امکان تولید Ψ که متشکل از تمام نقاط قابل تولید است؛ ارزیابی می‌شود.

$$\Psi = \{(X,Y) \in R^{p+q} | \text{باشد } X \text{ قابل تولید } Y \text{ به وسیله یک}\} \quad (۴)$$

این مجموعه اشتراک دو مجموعه امکان ورودی و مجموعه امکان خروجی است.

$$X(y)=\{x\in\mathbb{R}^p|(x,y)\in\mathbb{R}^{p+q}\} \quad (۵)$$

$$Y(x)=\{y\in\mathbb{R}^q|(x,y)\in\mathbb{R}^{p+q}\} \quad (۶)$$

تعاریف فوق منجر به مفهومی چون مرز کارای ورودی $\partial X(y)$ و مرز کارای خروجی $\partial Y(x)$ می‌شود که به ترتیب زیر مجموعه‌هایی از $X(y)$ و $Y(x)$ هستند.

$$\partial X(y)=\{x|x\in X(y),\ \theta x\in X(y);\circ<\theta<۱\} \quad (۷)$$

$$\partial Y(x)=\{y|y\in Y(x),\ \beta x\in X(y);۱<\beta\} \quad (۸)$$

با توجه به تعریف فوق، مقادیر کارایی ورودی- محور و خروجی- محور در نقطه (x_k,y_k) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta_k=\text{Min}\{\theta|\theta x_k\in X(y_k)\}, \quad (۹)$$

$$\beta_k=\text{Max}\{\beta|\beta y_k\in Y(x_k)\}. \quad (۱۰)$$

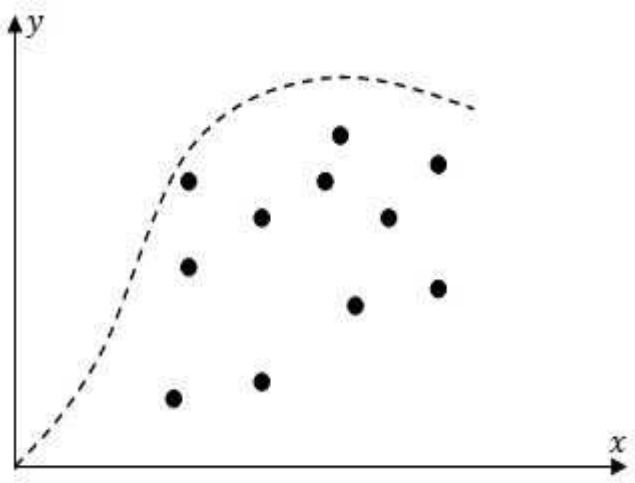
مقدار کارایی هر واحد، آن را به سطح کارای روی مرز منتقل می‌کند. این سطح کارایی ورودی- محور (خروجی- محور) موقعیت ورودی (خروجی) تصویر شده روی مرز است که با $X^{\partial}(x_k\,|\,y_k)$ نشان می‌دهیم:

$$X^{\partial}(x_k|y_k)=\theta x_k. \quad (۱۱)$$

متأسفانه مجموعه امکان تولید مشخص نیست. بنابراین مجموعه امکان ورودی X(y)، مجموعه امکان خروجی Y(x)، مرز کارایی ورودی $\partial X(y)$، مرز کارایی خروجی $\partial X(y)$، مقادیر کارایی ورودی- محور θ_k و خروجی- محور β_k، قابل شناسایی و اندازه‌گیری نیستند.

تنها اطلاعاتی که از جامعه ناشناخته Ψ در اختیار داریم؛ یک نمونه از داده‌هاست. بهترین کار، مشخص کردن یک مرز به عنوان مرز کارایی و ارزیابی واحدها نسبت به آن است. واضح است مقادیر کارایی که از مقایسه با این مرز حاصل می‌شود؛ به میزان سازگاری و میزان اریبی این مرز از مرز اصلی بستگی دارد. هر قدر که این مرز برآورد درستی از مرز کارایی اصلی باشد؛ مقادیر کارایی حاصل به همان اندازه به مقادیر کارای اصلی نزدیک‌تر است.

ارایه یک برآورد درست از پارامتر اصلی نه تنها به ساختار اصلی برآوردگر بستگی دارد، بلکه به نمونه در دست بررسی نیز بستگی دارد. اینکه یک نمونه چه‌قدر می‌تواند اطلاعاتی را در اختیار برآوردگر قرار دهد؛ باید مورد بحث و بررسی قرار گیرد. چیزی که واضح است، تعداد کم نمونه مشاهده شده و به عبارت دیگر کوچک بودن حجم نمونه برای برآورد درست می‌باشد. بنابراین باید دنبال روشی برای تولید داده از جامعه‌ی ناشناخته باشیم تا مشکل کمبود نمونه را رفع کنیم. بوت استرپ که توسط افرون [۱] معرفی و توسط افرون تیبشیرانی [۱۰] توسعه یافت؛ بر پایه شبیه سازی فرآیند تولید داده‌ها (DGP) بنا نهاده شده است.



شکل ٤. یک نمونه‌ی مشاهده شده از جامعه‌ی ناشناخته

فرض کنید $\chi = \{(x_i, y_i) \mid i = ۱,\ldots,n\}$ تنها نمونه‌ای از جامعه اصلی است که در اختیار داریم. با توجه به توضیحات بالا مطمئناً برآورد مرز کارایی با این داده‌ها نتیجه‌ی مطمئنی حاصل نخواهد شد. فرض کنید داده‌های نمونه به وسیله روش تولید داده ρ، از جامعه اصلی استخراج شده باشد. اگر بتوانیم این فرآیند استخراج را شناسایی کنیم؛ می‌توانیم مشکل کمبود نمونه را با تولید داده‌های بیشتر حل نماییم. برای برآورد کردن پارامتر مشخصی از جامعه نیاز به یک روش مشخص $\mathcal{M}$ داریم تا به کمک آن بتوانیم این پارامتر را به دست آوریم. به کمک روش $\mathcal{M}$ برآوردی از مجموعه‌های $\hat{\Psi}$، $\widehat{X(y)}$ و $\widehat{\partial X(y)}$ را به دست می‌آوریم. بنابراین طبق (۹) کارایی ورودی- محور واحد kام به صورت زیر قابل برآورد است.

$$\hat{\theta}_k = \mathrm{Min}\left\{\theta \;\middle|\; \theta x_k \in \widehat{X(y_k)}\right\} \qquad (۱۲)$$

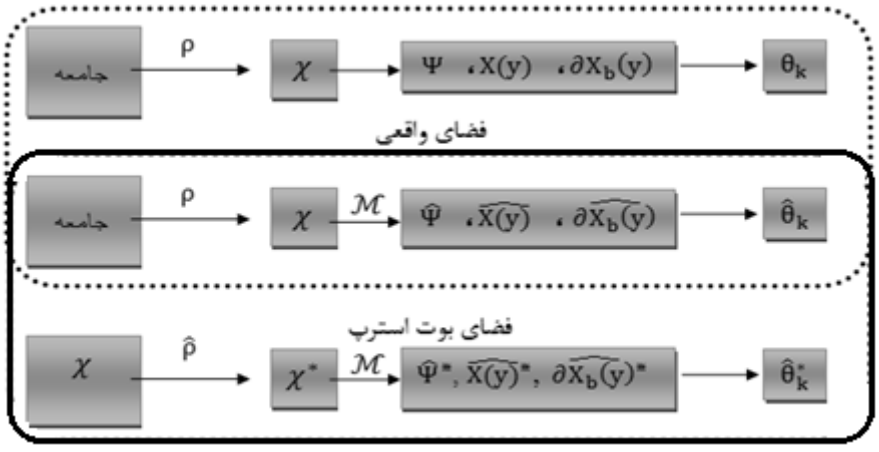
$\hat{\theta}_k$ برآوردی از مقدار واقعی θ_k است. مقدار درستی این برآورد به دو عامل روش $\mathcal{M}$ و حجم نمونه بستگی دارد. باید این نکته را یادآور شد که خصوصیات نمونه‌ای $\hat{\Psi}$، $\widehat{X(y)}$ و $\widehat{\partial X(y)}$ و در نتیجه $\hat{\theta}_k$، به مولد داده ρ بستگی دارد که ناشناخته است. فرض کنیم با اطلاعاتی که از ρ داریم؛ با استفاده از داده‌های χ، می‌توانیم برآوردگر معقول $\hat{\rho}$ از ρ را بسازیم. مجموعه داده‌های را که به وسیله $\hat{\rho}$ تولید شده است؛ در نظر می‌گیریم. این نمونه‌ی ساختگی به کمک روش $\mathcal{M}$، مجموعه‌های $\hat{\Psi}^*$، $\widehat{X(y)}^*$ و $\widehat{\partial X(y)}^*$ متناظر با مجموعه ساخته شده از χ^* را تعریف می‌کند. به ویژه اینکه برای واحد تحت بررسی (x_k, y_k) اندازه کارایی $\hat{\theta}_k^*$، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\theta}_k^* = \mathrm{Min}\left\{\theta \;\middle|\; \theta x_k \in \widehat{\partial X(y_k)}^*\right\}. \qquad (۱۳)$$

از معلوم بودن $\hat{\rho}$ توزیع نمونه‌ای $\hat{\Psi}^*$، $\widehat{X(y)}^*$ و $\widehat{\partial X(y)}^*$ به طور مشروط روی χ مشخص است. هرچند شاید به طور تحلیلی، محاسبه آن سخت باشد. در مرحله بعد با به کار بستن روش مونت کارلو، توزیع نمونه‌ای به آسانی قابل تخمین است.

در اینجا نمونه‌ی اصلی χ در نقش جامعه قرار می‌گیرد و کارایی $\hat{\theta}_k^*$ یک برآورد از مقدار مشخص $\hat{\theta}_k$ است. به عبارت دیگر در فضای بوت استرپ، χ به عنوان جامعه مشخص و χ^* یک نمونه از آن در فضای بوت استرپ است، اما $\hat{\theta}_k^*$ تنها از یک نمونه حاصل شده (شکل ۵). برای برآورد بهتر، دوباره اقدام به ساخت نمونه‌های ساختگی می‌کنیم. با استفاده از $\hat{\rho}$، B نمونه χ^*_b، $b=1,...,B$ را تولید می‌نماییم. روش $\mathcal{M}$ را برای هر کدام از این نمونه‌های ساختگی به کار می‌گیریم تا هر کدام از این نمونه‌های ساختگی، برآوردگرهای $\hat{\Psi}_b^*$، $\widehat{X_b(y)}^*$ و $\widehat{\partial X_b(y)}^*$، $b=1,...,B$ را مشخص کند. در مرحله‌ی بعد با استفاده از برآوردگر اصلی، برای هر واحد تحت بررسی (x_k , y_k)، مقادیر متناظر کارایی $\{\hat{\theta}_{k,b}^*\}_{b=1}^B$ را تعیین می‌کنیم. تابع چگالی تجربی مربوط به $\{\hat{\theta}_{k,b}^*\}_{b=1}^B$، تقریب مونت کارلو از توزیع $\hat{\theta}_k^*$، روی $\hat{\rho}$ است. اگر $\hat{\rho}$ یک برآوردگر منطقی و سازگار از ρ باشد؛ آن‌گاه توزیع بوت استرپ، توزیع اصلی نامشخص را برآورد می‌کند (شبیه‌سازی می‌کند). به عبارت دیگر اگر $\hat{\rho}$ برآورد درستی از ρ باشد آن‌گاه رفتار $\hat{\theta}_k^*$ نسبت به $\hat{\theta}_k$ در فضای بوت استرپ، شبیه به رفتار $\hat{\theta}_k$ نسبت به θ_k در فضای واقعی خواهد بود. با در نظر گرفتن جزییات بیشتر می‌توان گفت، برای اندازه کارایی θ_k متناظر با واحد تحت بررسی (x_k , y_k) داریم:

$$(\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_k) | \hat{\rho} \sim (\hat{\theta}_k - \theta_k) | \rho \qquad (۱۴)$$



شکل ۵. فرآیند تولید داده

که θ_k، $\hat{\theta}_k$ و $\hat{\theta}_k^*$ از روابط (۹)، (۱۲) و (۱۳) حاصل می‌شود. به یاد داشته باشید که رابطه‌ی (۱۴) زمانی برقرار است که $\hat{\rho}$ برآورد سازگاری از ρ باشد.

محاسبه‌ی میزان اریبی یک برآوردگر، می‌تواند مقدار برآورد شده را بهبود بخشد و برآورد بهتری از پارامتر مورد نظر ارایه کند. پس

$$\text{bias}_{\rho,k} = E\left(\hat{\theta}_k\right) - \theta_k \qquad (۱۵)$$

θ_k نامشخص است و از این‌رو مقدار اریبی نیز مجهول است. در فضای بوت استرپ مقدار اریبی برآوردگر $\hat{\theta}_k^*$ مشخص است و می‌توان آن را اندازه‌گیری نمود.

$$\text{bias}_{\hat{\rho},k} = E\left(\hat{\theta}_k^*\right) - \hat{\theta}_k \qquad (۱۶)$$

مقدار مورد انتظار برای $\hat{\theta}_k^*$ را می‌توان با تعریف مونت-کارلو از آن جای‌گزین کرد.

$$\overline{\theta}_k^* = \frac{۱}{B}\sum_{b=۱}^{B}\hat{\theta}_{k,b}^* = E\left(\hat{\theta}_k^*\right) \qquad (۱۷)$$

بنابراین

$$\text{bias}_{\hat{\rho},k} = \frac{۱}{B}\sum_{b=۱}^{B}\hat{\theta}_{k,b}^* - \hat{\theta}_k \qquad (۱۸)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۴) می‌توان برآوردی از (۱۵) را با استفاده از (۱۸) به دست آورد. بنابراین

$$\text{bias}_{\rho,k} \approx \frac{۱}{B}\sum_{b=۱}^{B}\hat{\theta}_{k,b}^* - \hat{\theta}_k \qquad (۱۹)$$

با اصلاح مقدار اریبی از برآوردگر اصلی ($\hat{\theta}_k$)، برآوردگر اریب- اصلاح شده‌ی بهتری حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_k &= \hat{\theta}_k - \text{bias}_{\rho,k} \approx \hat{\theta}_k - \left(\frac{۱}{B}\sum_{b=۱}^{B}\hat{\theta}_{k,b}^* - \hat{\theta}_k\right) \\ &\approx ۲\hat{\theta}_k - \frac{۱}{B}\sum_{b=۱}^{B}\hat{\theta}_{k,b}^* \\ &\approx ۲\hat{\theta}_k - \overline{\theta}_k^*\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

عبارت برآوردگر اریب- اصلاح شده را از این جهت به کار می‌گیریم که مقدار اریبی به دست آمده برای این برآوردگر مقدار دقیق آن نیست؛ بلکه یک مقدار تقریبی از آن است. از این‌رو مقدار اریبی برآوردگر از بین نمی‌رود و تنها اصلاح می‌شود.

خطای استاندارد $\hat{\theta}_k^*$ برابر است با

$$\widehat{\text{se}}_{\rho,k} = \{\frac{۱}{B-۱}\sum_{b=۱}^{B}(\hat{\theta}_{k,b}^{*} - \overline{\theta}_k^{*})\}^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۲۱)$$

سرانجام بعد از اعمال مقدار اریبی به تابع توزیع به دست آمده، بازه‌های اطمینان را محاسبه می‌کنیم. در نظر داریم که تابع توزیع تخمین زده شده طوری قرار گیرد که مرکز آن $\tilde{\theta}_k$ باشد. بنابراین باید تابع توزیعی را که برای $\hat{\theta}_k$

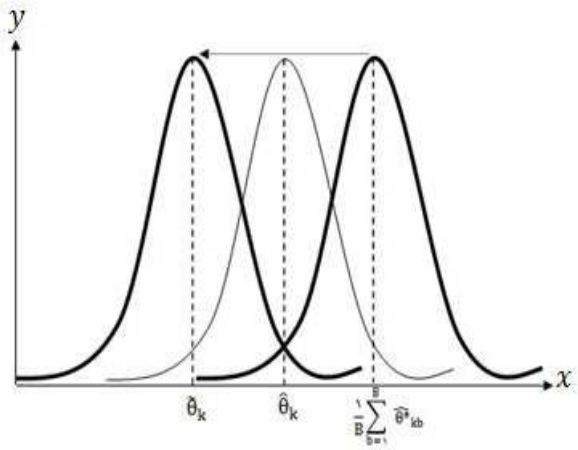
به دست می‌آید؛ به اندازه $\widehat{\text{bias}}_k$ به‌سمت چپ منتقل کنیم (اصلاح مقدار اریبی $\hat{\theta}_k$). تابع توزیع به دست آمده به مرکز تقریبی $\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\widehat{\theta^*}_{kb}$ می‌باشد و برای مرکزیت قرار دادن $\hat{\theta}_k$، باید مقدار اریبی را اصلاح کرد. بنابراین بعد از به دست آوردن تابع توزیع $\{\widehat{\theta^*}_{kb}\}_{b=1}^{B}$، آن را به اندازه $2\widehat{\text{bias}}_k$، به سمت چپ منتقل کنیم (شکل ۶).
برآوردگر اصلاح شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{\theta}^*_{k,b} = \hat{\theta}^*_{k,b} - 2\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\hat{\theta}^*_{k,b}. \qquad (۲۲)$$

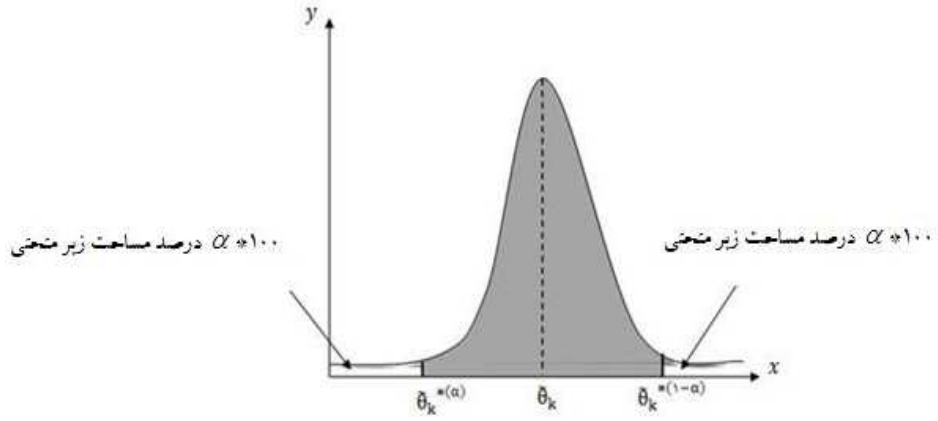
بازه‌ی اطمینان درصدی معمولی برای $\hat{\theta}_k$ که در آن طول بازه $\alpha-1$ است؛ به صورت زیر تعریف می‌شود:

که $\tilde{\theta}_k^{*\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$، $100\left(\frac{\alpha}{2}\right)$-ام تابع چگالی تجربی $\{\tilde{\theta}^*_{k,b}\}_{b=1}^{B}$ می‌باشد (برای تفسیر شهودی آن به شکل فرضی ۷ مراجعه کنید).
اگر تابع چگالی تجربی $\hat{\theta}^*_{kb}$ اریب باشد؛ شاید بهتر باشد که $\tilde{\theta}_k$ در مرکز تابع توزیع باشد [۴].

$$\left(\hat{\theta}_{k,low}, \hat{\theta}_{k,up}\right) = \left(\tilde{\theta}_k^{*\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \tilde{\theta}_k^{*\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right). \qquad (۲۳)$$



شکل ٦. اصلاح اریبی تابع توزیع



شکل ۷. ساخت بازه‌ی اطمینان

اصلاح مقدار اریبی، ممکن است موجب بروز خطای میانگین ریشه دوم بزرگی در برآورد و هم‌چنین باعث افزایش واریانس برآوردگر شود. اگر مقدار اریبی محاسبه شده (۱۹) در مقایسه با خطای استاندارد (۲۱) مقدار کوچکی باشد. در این‌صورت نیاز به اصلاح مقدار اریبی نیست و بهتر است توزیع به مرکزیت $\hat{\theta}_k$ باشد [۱۱].

افرون و تیبشیرانی [۱۱] پیشنهاد دادند که اگر نسبت $\frac{\widehat{bias}_{\rho,k}}{\widehat{se}_{\rho,k}}$ از ۰/۲۵ تجاوز نکند؛ آن‌گاه بهتر است اصلاح مقدار اریبی صورت نگیرد و $\hat{\theta}_k$ مرکز توزیع تجربی قرار گیرد.

تنها سوالی که در اینجا باقی می‌ماند روش تولید داده $\hat{\rho}$ است.

٤ تخمین یک مولد منطقی از مولد داده‌ی واقعی

در بخش قبل به معرفی کلیت کار بوت استرپ پرداختیم. تنها بحث باقی مانده از بخش قبل، تخمین یک برآورد منطقی از مولد داده ρ است. بوت استرپ در چارچوب مدل‌های مرزی ناپارامتری توسط سیمار [۱۲] معرفی و توسط سیمار- ویلسون [۴] توسعه یافت. سیمار و ویلسون [۴و۱۳]، یک چارچوب کلی برای روش تولید داده در مدل‌ها مرزی ناپارامتری ترسیم کردند.

مجموعه داده‌ی $\chi_n = \{(x_i, y_i) | i = ۱,\dots,n\}$ به وسیله مولد داده‌ی ρ از جامعه ناشناخته‌ی Ψ استخراج شده است. این مولد داده‌ی ρ به صورت کامل به وسیله‌ی Ψ و تابع چگالی احتمال $f(x,y)$ مشخص می‌شود.

$$\rho = \rho\left(\Psi,\ f(x,y)\right) \qquad (۲۴)$$

اگر $\hat{\rho}(\chi_n)$ برآورد درستی از مولد داده اصلی باشد؛ آن‌گاه

$$\hat{\rho}(\chi_n) = \rho\left(\hat{\Psi},\ \hat{f}(x,y)\right). \qquad (۲۵)$$

در فضای واقعی $f(x,y)$ و Ψ ناشناخته است. تنها نمونه χ مشخص است و باید برای برآورد ρ، Ψ و θاستفاده شود.

یک فضای مجازی شبیه‌سازی شده مانند فضای بوت استرپ را در نظر بگیرید. آنچه در فضای بوت استرپ اتفاق می‌افتد؛ اتفاقات فضای واقعی را تقلید می‌کند. در فضای بوت استرپ، $\hat{\rho}$، $\hat{\Psi}$ و $\hat{\theta}_k$ مشخص هستند و جای‌گزین ρ، Ψ و θ_k، در فضای واقعی می‌شوند. در فضای واقعی، ρ مولد داده‌ی واقعی و مجهول و $\hat{\rho}$ مولد داده‌ی برآورد شده از ρ، اما در فضای بوت استرپ، $\hat{\rho}$ مولد داده‌ی واقعی و مشخص می‌باشد.

در اینجا روش $\mathcal{M}$ که در بخش قبل برای برآورد Ψ و سایر مجموعه‌های متناظر با آن استفاده شد؛ DEA است. مجموعه‌های برآورد شده توسط روش $\mathcal{M}$ که در بخش قبل دیدیم را بار دیگر و این بار به کمک DEA بیان می‌کنیم.

$$\hat{\Psi}_{DEA-VRS} = \left\{(X,Y) | X \geq \sum_{j=۱}^{n} \eta_j X_j,\ Y \leq \sum_{j=۱}^{n} \eta_j Y_j,\ \sum_{j=۱}^{n} \eta_j = ۱\right\} \qquad (۲۶)$$

$$\begin{cases} \widehat{X(y_k)} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^p | (x, y_k) \in \hat{\Psi}_{DEA} \right\} \\ \widehat{Y(x_k)} = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^q | (x, y_k) \in \hat{\Psi}_{DEA} \right\} \end{cases} \quad (۲۷)$$

$$\partial \widehat{X(y_k)} = \{ x | x \in X(y_k),\ \theta x \notin X(y) \quad \forall ۰ < \theta < ۱ \} \quad (۲۸)$$

$$\hat{\theta}_k = \text{Min}\{ \theta | \theta x_k \in X(y_k) \} \quad (۲۹)$$

ویا

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}_k = \text{Min} \quad \theta, \\ &\text{s.t.} \\ &\quad Y_k \le \sum_{j=۱}^{n} \gamma_j Y_j, \\ &\quad \theta X_k \ge \sum_{j=۱}^{n} \gamma_j X_j, \\ &\quad \sum_{j=۱}^{n} \gamma_j = ۱, \\ &\quad \gamma_j \ge ۰, \quad i = ۱, \ldots, n. \end{aligned} \quad (۳۰)$$

و

$$\hat{X}^{\partial}(x_k | y_k) = \hat{\theta}_k x_k \quad (۳۱)$$

٤-۱ بوت استرپ ساده و تشریح عدم استفاده از این روش برای مدل‌های مرزی

در این بخش ابتدا به تشریح فرآیند بوت لسترپ ساده (خام) می‌پردازیم و نشان می‌دهیم استفاده از این روش که در مقاله سعید عبادی از آن استفاده شده منجر به نتایج نامعتبری خواهد شد.

٤-۱-۱ بوت استرپ ساده

از آنجا که ρ، مجموعه داده‌های $\chi_n = \{(X_i, Y_i) | i = ۱, \ldots, n\}$ را تولید می‌کند؛ بهترین برآوردگر تابع توزیع اصلی در این زمینه، تابع توزیع تجربی است که در هر نقطه جرم احتمال $\frac{۱}{n}$ را اختیار می‌کند. در فضای یک بعدی، تابع توزیع تجمعی تجربی، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F_n(x) = \sum_{i=۱}^{n} I(x_i \le x) \quad (۳۲)$$

در این صورت، نمونه ساختگی را می‌توان با انتخاب تصادفی و با جای‌گذاری از مجموعه χ_n به دست آورد.

ایده اصلی نمونه‌سازی از طریق انتخاب تصادفی و با جای‌گذاری، به این حقیقت مربوط است که در صورت بزرگ بودن حجم نمونه، توزیع تجربی $F_n(x)$ به توزیع اصلی ناشناخته $F(x)$ نزدیک می‌شود.

با توجه به تعریف (۹) از کارایی، کارایی نقطه (X_k, Y_k) که طی این فرآیند ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ (فرآیند بوت استرپ برای هر واحد باید به طور جداگانه عملی شود.) با توجه به نمونه استخراج شده به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\hat{\theta}_k^* = \text{Min} \quad \theta, \\
&\text{s.t.} \\
&Y_k \le \sum_{j=1}^{n} \gamma_j Y_j^*, \\
&\theta X_k \ge \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j^*, \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1, \\
&\gamma_j \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

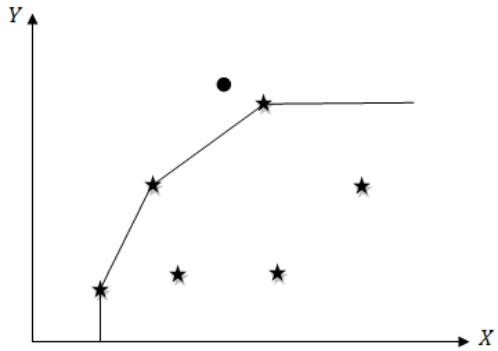
تابع توزیع اصلی ناشناخته است و چون تابع توزیع تجربی هر نمونه از جامعه به تابع توزیع جامعه همگراست؛ بنابراین تابع تجربی، برآورد درستی از تابع اصلی F و نیز $\hat{\Psi}$ برآورد سازگاری از Ψ است (مجموعه $\hat{\Psi}$ به وسیله DEA برآورد شده که در دیدیم، برآورد درستی از مجموعه امکان تولید است). بنابراین مولد داده $\hat{\rho}(\chi_n)$، یک برآورد درست از مولد داده اصلی ρ است [۴].

θ_k در فضای واقعی نامشخص و $\hat{\theta}_k$ مقداری مشخص و به عنوان تخمینی از آن در نظر گرفته می‌شود. در فضای واقعی نیز $\hat{\theta}_k$ مقدار درست کارایی و مشخص و $\hat{\theta}_k^*$ تخمینی از $\hat{\theta}_k$ در فضای بوت استرپ است. $\hat{\rho}(\chi_n)$ یک برآورد درست از ρ است. پس رابطه (۱۴) بر قرار می‌باشد؛ یعنی در فضای بوت استرپ رفتار $\hat{\theta}_k^*$ نسبت به $\hat{\theta}_k$، مشابه رفتار $\hat{\theta}_k$ نسبت به θ_k در فضای واقعی است. از این‌رو عملیات توضیح داده شده در بخش قبل، برای یافتن تخمین بهتر کارایی و ساختن بازه‌های اطمینان، عیناً انجام می گیرد.

استراتژی معرفی شده بسیار جالب است اما متاسفانه برای مدل‌های مرزی کاربرد ندارد؛ چراکه اندازه ناکارایی فارل را که همان انحراف شعاعی x از $\partial X(y)$ است؛ به درستی منعکس نمی کند [۴].

برای برخی مجموعه‌های تولید شده χ_n^* از توزیع تجربی، $\partial X(y)$ قابل تعریف نیست. بنابراین مقدار متناظر با آن قابل اندازه‌گیری نخواهد بود.

شکل ۱ نشان می‌دهد که برای واحد تحت بررسی، اندازه‌ی کارایی ورودی محور قابل محاسبه نیست. وقتی در چارچوب رگرسیون کار می کنیم؛ بهتر است؛ بوت استرپ روی باقی‌مانده‌ها عملی شود [۱۰و۱۴] که در اینجا باقیمانده‌ها، همان مقادیر θ_kها می‌باشند.



شکل ۸. شکست مدل در محاسبه‌ی کارایی ورودی محور

■: واحد تحت بررسی

✱: نقاط تولید شده به وسیله‌ی اتخاب تصادفی و با جای‌گذاری از نمونه اصلی

DGP را می‌توان به این صورت تعریف کرد که برای یک مقدار مشخص y، می‌دانیم $x \in X(y)$ به دلیل ناکارا بودن این نقطه، نمی‌تواند متعلق به $\partial X(y)$ باشد و روی یک شعاع دور شونده از $X^{\partial}(x_k|y_k)$ قرار دارد. بنابراین یک واحد مشخص (x_k , y_k)، به صورت نقطه‌ای تولید شده در نظر گرفته می‌شود که سطح خروجی آن y_k و ورودی آن به یک نسبت تصادفی، افزایش یافته است؛ یعنی $x_i^* = \frac{X^{\partial}(x_i|y_i)}{\theta_i}$. فرض کنید که فرآیند تولید داده‌ها، مقادیر ناکارایی‌های $\theta_k \in (0,1]$ زیر را تولید کرده باشد:

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \sim \text{i.i.d.F} \qquad (۳۴)$$

که F تابع چگالی روی $(0,1]$ می‌باشد. همان‌طور که در بالا گفته شد هر نقطه را در سطح ثابت خروجی y_i به صورت نقطه‌ی $x_i^* = \frac{\hat{X}^{\partial}(x_i|y_i)}{\theta^*_i}$ تولید شده درنظر می‌گیریم که θ_i اندازه‌ی شعاعی فاصله آن از سطح کارایی $X^{\partial}(x_i|y_i)$ باشد. $\mathcal{P}_i$ را مولد داده‌ی متناظر با (x_i, y_i) در نظر می‌گیریم. بنابراین هر نقطه را می‌توان با $X^{\partial}(x_k|y_k)$ و F نمایش داد:

$$\rho_i = \left(X^{\partial}(x_i|y_i), F\right) \qquad (۳۵)$$

که در نهایت، کل مولد داده، برابر با مجموعه $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ خواهد بود. اگر $\partial X(y_k)$ و $X^{\partial}(x_k|y_k)$ مشخص باشد؛ مقدار $\theta_k = \frac{X^{\partial}(x_k|y_k)}{x_k}$ نیز مشخص می‌شود و F را با تابع توزیع تجربی آن‌ها جای‌گزین می‌کنیم (به عنوان برآوردی از آن). متأسفانه $\partial X(y_k)$ نامشخص است اما می‌توانیم از $\widehat{\partial X(y_i)}$ و $\hat{X}^{\partial}(x_k|y_k)$ به عنوان تخمینی از $\partial X(y_k)$ و $X^{\partial}(x_k|y_k)$ استفاده نماییم و مقدار $\hat{\theta}_k$ را محاسبه کنیم. ساده‌ترین برآورد از F، توزیع تجربی $\hat{\theta}_k$ها می‌باشد:

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} n^{-1} & if \quad t = \hat{\theta}_k, \; i = 1, \ldots, n \\ 0 & O.W \end{cases} \qquad (۳۶)$$

بعد از مشخص شدن $\hat{F}$ و $\hat{X}^{\partial}(x_i|y_i)$ تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\rho}_i = \left(\hat{X}^{\partial}(x_i|y_i), \hat{F}\right). \quad (۳۷)$$

با استفاده از تعریف فوق، می‌توان با سطح خروجی y_k ، x_k^* را ساخت. حال به طور تصادفی و با جای‌گذاری مقادیر θ_i^* را از θ_i انتخاب کنیم:

$$\left(\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*\right) \sim \text{i.i.d.F.} \quad (۳۸)$$

بنابراین ورودی‌های تولید شده به صورت زیر خواهد بود

$$x_i^* = \frac{\hat{X}^{\partial}(x_i|y_i)}{\theta^*_i} = \frac{\hat{\theta}_i}{\theta^*_i} x_i. \quad (۳۹)$$

ادامه کار همان روند توضیح داده شده در بخش قبل است یعنی به کارگیری روش DEA و به دست آوردن کارایی $\hat{\theta}_i^*$ و ادامه همین روند به تعداد B بار و سپس محاسبه‌ی مقدار اریبی، اصلاح مقدار اریبی و ساختن بازه‌های اطمینان.

فرآیند تولید داده بالا، بازهم برای مدل‌های با مرز ناپارامتری قابل استفاده نیست. سیمار - ویلسون [۴] دلیل ناکارآمدی این روش را برشمرده‌اند که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم.

٤-۱-۲ اشکالات موجود در روش بوت استرپ ساده

برآوردگر DEA و FDH، تعداد زیادی واحد با کارایی واحد تولید می‌کنند که تعداد این واحدها با افزایش تعداد ورودی‌ها، افزایش می‌یابد. در نتیجه F_i برآورد کم ارزشی از F را در نزدیکی کران بالا $(\theta = ۱)$ ارایه می‌کند. افرون و تیبشیرانی [۱۰] نشان دادند که در نزدیکی کران بالا، تابع توزیع تجربی، برآورد سازگاری از F نمی‌دهد. اگر F روی $[۰,۱)$ به طور پیوسته فرض شود؛ در نزدیکی $\theta = ۱$، تجمع زیادی ایجاد خواهد شد که این مساله باعث ناکارآمدی برآوردگر می‌شود. علاوه براین، برآورد F با $\hat{F}$، در قسمت خطوط کرانه‌ای وقتی که تکیه‌گاه کراندار باشد؛ کار مشکلی است. در تخمین مرز کارایی تنها کران‌های بالایی $(\theta = ۱)$ مشکل ساز است و اگر مشکل آن برطرف نشود برآوردگر بوت استرپ، ناسازگار خواهد بود [۴].

سیمار- ویلسون [۴] نشان دادند که در صورت استفاده از بوت استرپ ساده، خواهیم داشت:

$$\text{Prob}\left(\hat{\theta}^*(x,y) = \theta(x,y) \mid \chi_n\right) = ۱ - (۱ - n^{-۱})^n > ۰ \quad (۴۰)$$

که

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left(\hat{\theta}^*(x,y) = \theta(x,y) \mid \chi_n\right) = ۱ - e^{-۱} = ۰/۶۳۲ \quad (۴۱)$$

مطلقاً هیچ دلیلی موجود نیست که مقدار احتمال بالا برابر ۰/۶۳۲ باشد؛ حتی بدون در نظر گرفتن هیچ مشخصه‌ای از فرآیند تولید داده، این امکان وجود ندارد. اگر تابع چگالی احتمال مقادیر کارایی، پیوسته باشد؛ مقدار احتمال بالا برابر صفر خواهد بود [۴].

$$\text{Prob}(\hat{\theta}^*(x,y) = \theta(x,y)) = ۰ \quad (۴۲)$$

هم‌چنین اگر تابع چگالی احتمال اصلی در هر نقطه دارای مقدار جرم $\frac{1}{n}$ باشد؛ هیچ دلیلی وجود ندارد که این مقدار برابر ۰/۶۳۲ باشد.

برای رفع این مشکل، سیمار و ویلسون یک نسخه‌ی هموار از بوت استرپ را ارایه کردند که به تفصیل در بخش ۴-۲ به آن خواهیم پرداخت.

٤-۲ بوت استرپ هموار

در بخش قبل در مورد بوت استرپ ساده بحث کردیم. دیدیم که این روش برای تخمین مرز کارایی ناکارآمد است و منجر به برآورد ناسازگاری از مرز کارایی می‌شود. مشکل به وجود آمده ناشی از این حقیقت می‌باشد که مرزکارایی واقعی پیوسته را با یک تخمین ناپیوسته از آن که در هر نقطه احتمال $\frac{1}{n}$ را اختیار می‌کند؛ جای‌گزین کرده‌ایم.

سیمار و ویلسون [۴] یک نسخه هموار از بوت استرپ را ارایه کردند که تفاوت آن با نسخه قبلی در فرآیند تولیدهاست. در این روش یک برآوردگر هموار از تابع چگالی احتمال مقادیر کارایی ساخته می‌شود. که تولید داده به کمک آن صورت می‌گیرد.

فرض کنیم تابع چگالی احتمال مقادیر کارایی $f(\theta)$ پیوسته باشد. برآوردگر چگالی هسته‌ی استاندارد از $f(\theta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{f}_h(t) = (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t-\hat{\theta}_i}{h}\right) \qquad (۴۳)$$

که h پارامتر هموارسازی یا پهنای باند و $K(\circ)$ تابع هسته است؛ به طوری‌که $K(t)=K(-t)$، $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$ و $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt = \circ$. $\hat{f}_h(\theta)$ میانگین n تابع چگالی $K(\circ)$ به مرکزیت مقادیر کارایی $\hat{\theta}_i$ها می‌باشد. برای مشخص کردن برآوردی از تابع چگالی، دو انتخاب باید صورت بگیرد: اولی انتخاب تابع هسته و دومی انتخاب پارامتر هموارسازی. برای تابع هسته معمولاً تابع چگالی احتمال استاندارد (گوسی) انتخاب می‌شود (از اینجا به بعد تابع هسته‌ای که برای مولد داده استفاده می‌کنیم؛ تابع چگالی احتمال استاندارد (گوسی) است). دقت در انتخاب پارامتر هموارسازی از اهمیت بیشتری نسبت به انتخاب تابع چگالی هسته برخوردار است؛ چراکه تاثیر زیادی در کیفیت برآوردگر دارد [۹]. در ادامه در مورد چگونگی انتخاب پارامتر هموارسازی بحث خواهد شد.

با وجود ارایه‌ی یک برآورد هموار از تابع چگالی احتمال، بازهم شرایط مرزی $t<1$ یکی از مشکلاتی است که به دلیل کراندار بودن فضا هم‌چنان پابرجاست [۴].

روش بازتابی تشریح شده به وسیله سیلورمن [۱۴]، ابزار ساده‌ای برای غلبه بر این مشکل است. برای هر نقطه $\hat{\theta}_i \le 1$، تصویر متقارن آن نسبت به ۱، یعنی $2-\hat{\theta}_i \le 1$، $i=1,...,n$ در نظر گرفته می‌شود. سپس تابع چگالی هسته را از مجموعه $2n$ نقطه‌ای به صورت زیر برآورد می‌کنیم:

$$\hat{G}_h(t)=\frac{1}{2nh}\sum_{i=1}^{n}\left(K\left(\frac{t-\hat{\theta}_i}{h}\right)+K\left(\frac{2-t+\hat{\theta}_i}{h}\right)\right). \quad (44)$$

حال تعریف می کنیم

$$\hat{f}_{s,h}(t)=\begin{cases}2\hat{G}_h(t) & \text{اگر } t\le 1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \quad (45)$$

$\hat{f}_{s,h}(t)$ یک تابع متقارن حول ۱ است که سمت چپ آن منطبق بر تابع $f(\theta)$ می‌باشد.

شوستر [۱۵] نشان داد برای هر $t\le 1$، $\hat{f}_{s,h}(t)$ یک برآوردگر سازگار از f می‌باشد.

حال با استفاده از $\hat{f}_{s,h}(t)$ اقدام به تولید نمونه‌های ساختگی می کنیم. فرض کنید، $\beta^*_1,\beta^*_2,\ldots,\beta^*_n$، نمونه به دست آمده از $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n$ به وسیله انتخاب تصادفی با جای‌گذاری باشد. با اطلاعات مقدماتی آمار و احتمال می‌توان نشان داد:

$$t_i=\beta^*_i+h\epsilon_i^* \sim \hat{G}_{1,h}(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}K\left(\frac{t-\hat{\theta}_i}{h}\right) \quad (46)$$

که ϵ_i^* به صورت تصادفی و از توزیع نرمال استاندارد استخراج شده است.

به طور مشابه برای نقاط منعکس شده می‌توان نشان داد:

$$t_i^R=2-\beta^*_i-h\epsilon_i^* \sim \hat{G}_{2,h}(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}K\left(\frac{t-2+\hat{\theta}_i}{h}\right). \quad (47)$$

حال با توجه به رابطه

$$\hat{f}_{s,h}(t)=\hat{G}_{2,h}(t)+\hat{G}_{1,h}(t) \quad (48)$$

و با در نظر گرفتن مولد تصادفی زیر

$$\tilde{\theta}_i^*=\begin{cases}\beta^*_i+h\epsilon_i^* & \beta^*_i+h\epsilon_i^*\le 1\\ 2-\beta^*_i-h\epsilon_i^* & \text{O.W}\end{cases} \quad (49)$$

خواهیم داشت،

$$\tilde{\theta}_i^* \sim \hat{F}_{s,h}(t). \quad (50)$$

که به آسانی و با توجه به روابط اخیر قابل اثبات است. بنابراین نمونه جدید نیز از توزیع نمونه اصلی پیروی می کند.

سوالی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا روند تولید داده‌ی فوق یک سیر منطقی دارد؟ آیا روابط (۴۴) و (۴۷) باید برقرار باشند؟ و اینکه چرا باید این روابط برقرار باشند؟ چرا در قسمت قبل که تابع توزیع تجربی را به عنوان برآوردی از تابع توزیع اصلی قرار دادیم؛ به صورت تصادفی و با جای‌گذاری اقدام به تولید داده‌ها کردیم؟

نشان دادن این که رابطه‌ی (۵۰) برقرار است از ملزومات ادامه روند شبیه‌سازی است؛ چراکه گفتیم $\hat{f}_h(t)$ (نیمه سمت چپ تابع $\hat{f}_{s,h}(t)$) را به عنوان برآوردی از تابع $f(\theta)$ در نظر می‌گیریم. یعنی توزیع مقادیر کارایی بدین صورت است. بنابراین داده‌های شبیه‌سازی شده باید از این توزیع پیروی کنند. هم‌چنین، در بوت استرپ ساده، تابع توزیع تجربی که در آن هر نقطه احتمال $\frac{1}{n}$ را اختیار می‌کند؛ به عنوان برآوردی از تابع ناشناخته اصلی در نظر گرفته می‌شود و با انتخاب تصادفی و با جای‌گذاری احتمال انتخاب هر نقطه $\frac{1}{n}$ می‌باشد. بنابراین نمونه به دست آمده، مجدداً از توزیع تجربی پیروی می‌کند.

با بررسی بیشتر در خصوصیات آماری نمونه تولید شده به روابط زیر می‌رسیم [۴]

$$E\left(\tilde{\theta}_i^* \mid \hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)=\hat{\mu} \qquad (۵۱)$$

$$V\left(\tilde{\theta}_i^* \mid \hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)=\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2+h^2 \qquad (۵۲)$$

که $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2$ واریانس جامعه $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$،...، $\hat{\theta}_n$، یعنی

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_i^2-\bar{\hat{\theta}}_i^2\right) \qquad (۵۳)$$

و $\hat{\mu}$ میانگین نمونه می‌باشد. اگر برآوردگر هسته را مورد استفاده قرار دهیم واریانس دنباله بوت استرپ به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\theta^*_i=\beta^*_i+\frac{1}{(1+\frac{h^2}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2})^{\frac{1}{2}}}\left(\tilde{\theta}_i^*-\bar{\beta}_i^*\right) \qquad (۵۴)$$

که $\bar{\beta}_i^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*$.

می‌توان به وسیله محاسبات دستی مستقیمی نشان داد که

$$E\left(\theta^*_i \mid \hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)=\hat{\mu} \qquad (۵۵)$$

$$V\left(\theta^*_i \mid \hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n\right)=\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2\left(1+\frac{h^2}{n\left(\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2+h^2\right)}\right) \qquad (۵۶)$$

از این نظر که واریانس نمونه مجانباً کراندار است؛ دنباله θ^*_i به دست آمد از بوت استرپ هموار، خصوصیات بهتری نسبت به $\tilde{\theta}_i^*$ دارد [۴].

برای برآوردگر DEA، الگوریتم کامل بوت استرپ در گام‌های زیر خلاصه شده است (شکل ۹).

برای هر (x_k, y_k)، $k=1,2,\ldots,n$، $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$،...، $\hat{\theta}_n$ را به وسیله برنامه‌ریزی خطی (۳۳) حل کنید.

با استفاده از روند توضیح داده شده در این بخش، برای بوت استرپ یک نمونه تصادفی به حجم n از مجموعه اصلی یعنی θ^*_1،...، θ^*_n را تولید کنید.

مجموعه $X^{*}_{b}=\{(x^{*}_{i,b}, y_i)\}_{i=1}^{n}$ که $x^{*}_{i,b}=\frac{\hat{\theta}_i}{\theta^{*}_{i,b}}x_i$ ، را مشخص کنید.

برای هر $\hat{\theta}_k$ که $k=1, 2, ...,n$ ، برآورد بوت استرپ $\hat{\theta}^{*}_{k,b}$ را با کمک حل برنامه‌ریزی خطی زیر به دست آورید.

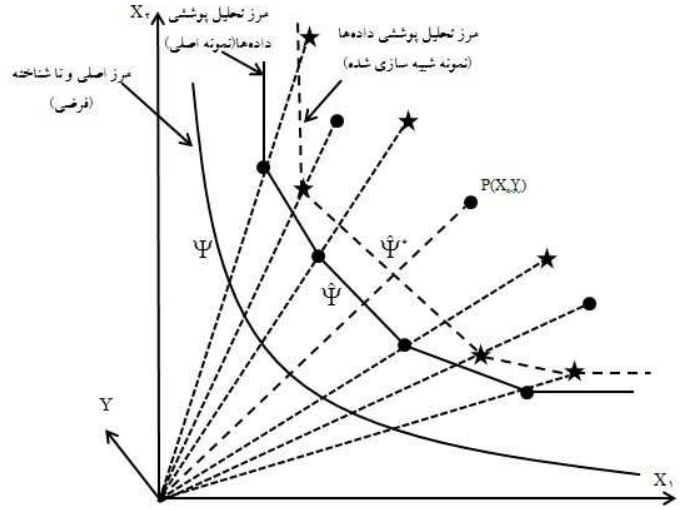
$$\widehat{\theta^{*}}_{k,b}=\text{Min}\{\theta \mid y_k \le \sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i^{*};\ \theta x_k \ge \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_{i,b}^{*},\ \theta \ge 0;\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i=1, \gamma_i \ge 0,\ i=1,\ldots,n\} \qquad (57)$$

مراحل ۲-۴ را به تعداد B بار تکرار کنید تا برای مجموعه برآورد زیر به دست آید:

$$\{\widehat{\theta^{*}}_{k,b}\}_{1}^{n}.$$

برای مجموعه داده‌های بزرگ، انتخاب B محدود به منابع رایانه‌ای موجود خواهد شد. هال [۱۶] پیشنهاد کرد که B=۱۰۰۰ انتخاب گردد تا از همگرایی بازه‌های اطمینان، یقین حاصل شود. شکل ۹ یک نمایش گرافیکی مربوط به یک حلقه از فرآیند بوت استرپ است.

اگر فرآیند تولید داده انتخاب شده برآورد سازگاری از فرآیند تولید داده اصلی باشد؛ آن‌گاه رابطه‌ی (۱۴) برقرار است. با توجه به این رابطه و شکل ۹ می‌توان گفت؛ اگر فرآیند تولید داده انتخاب شده برآورد سازگاری از فرآیند تولید داده اصلی ناشناخته باشد؛ آن‌گاه رفتار مرز DEA نمونه‌ی ساختگی (مرز نقطه چین) نسبت به مرز DEA نمونه‌ی اصلی (مرز خط شکسته)، مشابه با رفتار مرز DEA نمونه‌ی اصلی نسبت به مرز اصلی و ناشناخته (منحنی) خواهد بود. رفتار اول در فضای بوت استرپ، مشخص و رفتار دوم در فضای واقعی ولی به دلیل ناشناخته بودن مرز واقعی، نامشخص است. با این تفاسیر بار دیگر به این نتیجه می‌رسیم که اگر برآورد درستی از DGP ارایه کنیم؛ می‌توانیم به جای بررسی اتفاقات فضای واقعی، به طور مشابه به بررسی وقایع فضای بوت استرپ بپردازیم.



شکل ۹. فرآیند کامل بوت استرپ [۹]

● : داده‌های مربوط به نمونه‌ی اصلی

★ : داده های مربوط به نمونه‌ی ساختگی

سیمار- ویلسون [۴] برای اولین بار از بوت استرپ برای تحلیل حساسیت و ساخت بازه‌های اطمینان برای مقادیر کارایی استفاده کردند. برای این کار آن‌ها داده‌های استفاده شده توسط فار و همکارانش [۱۷] را که این داده‌ها از ۱۹ عامل تأسیسات برقی در سال ۱۹۸۷ گرفته شده بود؛ مورد استفاده قرار دادند. داده‌ها شامل اطلاعاتی در خصوص یک خروجی (قدرت برق بر حسب KWH) و سه ورودی (کارگران بر حسب میانگین استخدام سالانه، سوخت و سرمایه) هستند.

جدول ۱. نتایج مربوط به فرآیند بوت استرپ [۴]

						۲/۵%	۹۷/۵%	۲/۵%	۹۷/۵%
K	$\hat{\theta}_k$	$\bar{\theta}_k$	$Bias_k$	Median of $\hat{\theta}_k^*$	Std. Dev.	Bias Corrected		Centered on $\hat{\theta}_k$	
۱	۸۶۹۲/۰	۸۵۱۹/۰	۰۱۷۳/۰	۸۴۸/۰	۰۱۴۳/۰	۸۸۵۴/۰	۰/۸۳۶۰	۰/۸۳۷۲	۰/۹۰۵۷
۲	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۰۷	۰/۰۶۹۳	۰/۹۱۴۵	۰/۰۶۱۴	۱/۰۵۶۴	۰/۸۶۳۱	۰/۸۶۴۶	۱/۰۸۰۰
۳	۱/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۷	۰/۰۵۴۳	۰/۹۳۹۶	۰/۰۴۷۵	۱/۰۵۷۴	۰/۸۹۳۲	۰/۸۹۷۳	۱/۰۶۴۷
۴	۰/۹۳۷۰	۰/۹۲۳۷	۰/۰۱۳۳	۰/۹۱۴۸	۰/۰۰۹۴	۰/۹۴۰۰	۰/۹۰۵۹	۰/۹۰۷۶	۰/۹۵۳۶
۵	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۴۹	۰/۰۶۵۱	۰/۹۱۷۷	۰/۰۵۷۳	۱/۰۵۷۳	۰/۸۷۱۷	۰/۸۷۳۰	۱.۰۸۰۷
۶	۰/۹۰۷۱	۰/۸۹۰۶	۰/۰۱۶۵	۰/۸۸۴۹	۰/۰۱۵۱	۰/۹۲۸۶	۰/۸۷۵۶	۰/۸۷۷۷	۰/۹۵۵۲
۷	۰/۸۹۱۵	۰/۸۷۵۹	۰/۰۱۵۶	۰/۸۶۹۳	۰/۰۱۸۵	۰/۹۳۵۳	۰/۸۶۱۵	۰/۸۶۵۲	۰/۹۸۶۱
۸	۰/۸۲۱۰	۰/۸۰۷۵	۰/۰۱۳۵	۰/۸۰۴۱	۰/۰۱۱۸	۰/۸۳۸۷	۰/۷۹۵۵	۰/۷۹۶۷	۰/۸۶۳۰
۹	۰/۸۸۹۲	۰/۸۶۲۴	۰/۰۲۶۸	۰/۸۴۸۸	۰/۰۳۰۱	۰/۹۴۳۴	۰/۸۳۷۰	۰/۸۴۰۵	۰/۹۸۱۶
۱۰	۰/۸۴۶۹	۰/۸۳۷۴	۰/۰۰۹۵	۰/۸۳۵۹	۰/۰۰۶۴	۰/۸۵۴۱	۰/۸۲۹۴	۰/۸۳۰۴	۰/۸۵۹۸
۱۱	۰/۹۵۳۴	۰/۹۴۲۳	۰/۰۱۱۱	۰/۹۳۹۶	۰/۰۱۰۴	۰/۹۷۲۰	۰/۹۳۲۵	۰/۹۳۳۹	۳۷۶۳۱
۱۲	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۳۵	۰/۰۶۶۵	۰/۹۱۵۳	۰/۰۵۹۱	۱/۰۴۸۴	۰/۸۶۸۹	۰/۸۷۰۰	۱/۰۷۴۹
۱۳	۰/۹۶۰۲	۰/۹۴۳۴	۰/۰۱۶۸	۰/۹۳۸۹	۰/۰۱۴۰	۰/۹۷۶۴	۰/۹۲۸۲	۰/۹۳۰۴	۱/۰۰۴۹
۱۴	۱/۰۰۰۰	۰/۹۲۵۸	۰/۰۷۴۲	۰/۹۰۳۶	۰/۰۶۷۶	۱/۰۷۸۶	۰/۸۵۳۴	۰/۸۵۴۵	۱/۰۸۷۲
۱۵	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۳۴	۰/۰۶۶۶	۰/۹۰۸۵	۰/۰۶۴۰	۱/۰۷۸۶	۰/۸۶۸۳	۰/۸۶۹۷	۱/۱۰۲۹
۱۶	۰/۸۸۸۵	۰/۸۷۶۸	۰/۰۱۱۷	۰/۸۷۴۲	۰/۰۰۹۱	۰/۹۰۲۲	۰/۸۶۶۴	۰/۸۶۸۴	۰/۹۱۶۹
۱۷	۱/۰۰۰۰	۰/۹۳۷۸	۰/۰۶۲۲	۰/۹۱۷۵	۰/۰۵۶۱	۱/۰۶۰۸	۰/۸۷۷۴	۰/۸۷۸۳	۱/۰۷۷۴
۱۸	۱/۰۰۰۰	۰/۹۴۲۴	۰/۰۵۷۶	۰/۹۳۲۵	۰/۰۴۹۹	۱/۰۵۲۷	۰/۸۸۶۶	۰/۸۸۷۱	۱/۰۶۴۶
۱۹	۰/۹۴۴۱	۰/۹۳۲۸	۰/۰۱۱۳	۰/۹۳۰۵	۰/۰۰۸۳	۰/۹۵۴۶	۰/۹۲۲۸	۰/۹۲۳۸	۰/۹۶۴۵

نتایجی که ما با اجرای فرآیند بوت استرپ روی داده‌های فوق به دست آوردیم؛ با صرف نظر از اختلاف ناچیز آن‌ها، می‌توان گفت که دقیقاً همان نتایج مربوط به سیمار- ویلسون [۴] می‌باشد. این اختلاف در نتایج، حاصل استفاده از فرآیند انتخاب تصادفی از بین داده‌ها و توزیع نرمال استاندارد است. جدول ۱ نتایج مربوط به آزمایش بوت استرپ را با B=۱۰۰۰ و h=۰/۰۱۴، نشان می‌دهد. ستون ۱ نمایش مربوط به واحدهاست که تعداد آن‌ها ۱۹ واحد می‌باشد و ستون‌های ۲ تا ۶ مقادیر برآورد کارایی DEA اصلی، برآورد با اریب اصلاح شده، برآورد اریب بوت استرپ، مقادیر میانگین بوت استرپ و انحراف استاندارد آن‌ها را نمایش می‌دهد. چهار ستون آخر یک بازه اطمینان ۹۵٪ را نمایش می‌دهد. بازه اطمینان اولی بر اساس اصلاح مقدار اریبی که در (۲۳) آمده و بازه دومی با اصلاح مقدار اریبی از بازه‌های اولیه به دست آمده است. از آنجا که مقادیر اریبی، مقادیر کوچکی هستند؛ دو بازه به دست آمده بسیار شبیه به هم است.

نتایج ثبت شده در جدول ۱ حساسیت اندازه کارایی را نسبت به تعدد نمونه‌گیری آشکار می‌کند. با توجه به نتایج جدول ۱ این نکته را در نظر بگیریم که در رتبه‌بندی نسبی واحدها بر حسب مقادیر کارایی اصلی باید کمی با دقت عمل کنیم. برای مثال واحد یک دارای کارایی DEA، $\hat{\theta}_1 = ۰/۸۹۶۲$، در حالی‌که واحد ۲ دارای کارایی DEA $\hat{\theta}_1 = ۱.۰$ است. باتوجه به مقادیر اندازه کارایی اریب- اصلاح شده ستون ۳ مشاهده می‌کنیم که اختلاف بسیار ناچیز است، اما به هر حال بین آن‌ها تفاوتی وجود دارد. در چهار ستون آخر که نمایش‌دهنده‌ی بازه‌ی اطمینان برای مقادیر کارایی است نقاط اشتراک زیادی بین بازه‌های اطمینان واحد ۱ و بازه‌های اطمینان واحد ۲ وجود دارد. بنابراین نمی‌توان گفت که این دو واحد به خاطر داشتن مقادیر کارایی DEA اصلی متمایز، آشکارا متمایزند (از لحاظ کارایی).

۳-٤ چارچوب کلی برای شبیه سازی در زمینه‌ی مرزهای ناپارامتری

متدولوژی ارایه شده در بخش قبل، با توجه به فرض‌های محدودکننده‌ای به دست آمده بود (فرض همگن بودن توزیع مقادیر کارایی). سیمار- ویلسون [۱۳] یک چاچوب کلی برای پیاده‌سازی بوت استرپ، در چارچوب مدل‌های مرزی ناپارامتری ارایه کردند. آن‌ها فرض‌های متعددی روی DGP بنا نمودند که حالت عمومی‌تری نسبت به قبل داشت.

مدل آماری معرفی شده توسط سیمار و ویلسون، شامل فرض‌های زیر است که توسط نیپ [۱۸] و همکارانش استفاده شده بود.

الگوریتم به صورت زیر است:

۱- مقادیر کارایی $\hat{\theta}_k$ را برای هر مشاهده و $\hat{\delta}_k = \frac{۱}{\hat{\theta}_k}$ را محاسبه می‌کنیم.

۲- با استفاده از روش بازتابی سیلورمن این مقادیر را نسبت به $\hat{\delta}=۱$ منعکس کرده تا مجموعه زیر به دست آید.

$$\{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \ldots, \hat{\delta}_n, ۲-\hat{\delta}_1, ۲-\hat{\delta}_2, \ldots, ۲-\hat{\delta}_n\}$$

۳- یک نمونه‌ی تصادفی و با جای‌گذاری به حجم n از مجموعه به دست آمده در مرحله قبل استخراج می‌کنیم.

$\{\hat{\delta}_1^*, \hat{\delta}_2^*, \ldots, \hat{\delta}_n^*\}$

۴- با استفاده از مجموعه‌ی مرحله‌ی ۳، مجموعه‌ی نقاط هموار $\{\tilde{\delta}_1^*, \tilde{\delta}_2^*, \ldots, \tilde{\delta}_n^*\}$ را می‌سازیم.

$$\tilde{\delta}_i^* = \hat{\delta}_i^* + \varepsilon_i^* h$$

که ε_i^* به صورت تصادفی از توزیع نرمال استاندارد انتخاب می‌شود.

۵- در این مرحله با تصحیح میانگین و واریانس مقادیر هموار مرحله‌ی ۴، مقادیر به دست آمده را اصلاح می‌کنیم.

$$\tilde{\tilde{\delta}}_i^* = \bar{\tilde{\delta}} + \frac{\tilde{\delta}_i^* - \bar{\tilde{\delta}}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{s^{*2}}}}$$

۶- بر خلاف بخش قبل که نیمه سمت چپ تابع برآوردگر $\hat{f}_{s,h}(t)$، برآوردگر تابع ناشناخته اصلی بود؛ به دلیل تفاوت در شرط مرزی، در اینجا نیمه سمت راست تابع $\hat{f}_{s,h}(t)$، برآوردگر اصلی است. لذا می‌بایست به نقاط بزرگ‌تر از ۱ برگردیم. از این‌رو:

$$\check{\delta}_i^* = \begin{cases} 2 - \tilde{\tilde{\delta}}_i^* & \tilde{\tilde{\delta}}_i^* < 1 \\ \tilde{\tilde{\delta}}_i^* & \text{O.W} \end{cases}$$

۷- نمونه بوت استرپ به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\chi_n^* = \left\{ \left(X_i^*, Y_i \right) \mid X_i^* = \frac{\check{\delta}_i^* X_i}{\hat{\delta}_i},\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

۸- با استفاده از برآوردگر DEA مقادیر برآوردهای بوت استرپ را برای نمونه ساختگی χ_n^* و واحد دلخواه و ثابت k ام محاسبه می‌کنیم؛ یعنی:

$$\hat{\hat{\delta}}_b^k = \sup\left\{ \theta \mid \frac{X}{\theta} \in \Psi^* \right\}.$$

۹- با تکرار مراحل بالا به تعداد B بار مجموعه $\{\hat{\hat{\delta}}_b^k\}_{b=1}^B$ به دست می‌آید.

۱۰- توزیع تجربی $\{\hat{\hat{\delta}}_b^k\}_{b=1}^B$ تخمین بوت استرپ از توزیع نمونه‌ای $\hat{\delta}_k$ می‌باشد.

تنها مطلبی که در این بخش باقی می‌ماند؛ نحوه‌ی انتخاب پارامتر هموارسازی است. برای این کار باید دقت زیادی به خرج داد؛ چراکه اگر مقدار h کوچک انتخاب شود به طوری‌که در شرایط حدی نزدیک صفر باشد؛ آن‌گاه تابع $\hat{f}_h(t)$ به تابع چگالی تجربی گسسته و اگر h مقدار بزرگی انتخاب شود؛ به طوری‌که در شرایط حدی به بی‌نهایت میل کند؛ آن‌گاه تابع $\hat{f}_h(t)$ به یک تابع چگالی یکنواخت صاف همگرا می‌شود. سیلورمن [۵] نشان داد

که اگر $f(\circ)$ گوسی باشد؛ آن‌گاه مقدار بهینه‌ی h، خطای مربع مجموع میانگین بین $f(\delta)$ و $\hat{f}(\delta)$ را کمینه می‌کند که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h = ۱/۰۶\ s_n n^{\frac{-۱}{۵}}. \qquad (۵۷)$$

که s_n انحراف استاندارد تجربی n مقدار $\hat{\delta}_k$هاست و قانون مرجع نرمال نامیده می‌شود. هم‌چنین سیلورمن نشان داد که

$$h = ۱/۰۶\ \min(s_n, \frac{r_n}{۱/۳۴}) n^{\frac{-۱}{۵}}, \qquad (۵۸)$$

که r_n محدوده‌ی درون چارک n داده $\hat{\delta}_k$هاست و قانون مرجع نرمال تنومند نامیده می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری برای محاسبه‌ی اندازه کارایی یک گروه از واحدهایی است که فعالیت یکسانی را انجام می‌دهند. کارایی به دست آمده از این روش یک اندازه نسبی است و به تغییرات نمونه حساسیت شدیدی نشان می‌دهد. بوت استرپ که برای اولین بار توسط سیمار در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مورد استفاده قرار گرفت؛ ابزار سودمندی برای بهبود مقادیر کارایی به دست آمده از این روش می‌باشد. این فرآیند ضمن ساخت بازه‌های اطمنیان برای اندازه کارایی و مقادیر کارایی بهبود یافته قدری از شرایط عدم اطمینان کاسته و شرایط بهتری برای مقایسه و رتبه‌بندی واحدها فراهم می‌کند. هم‌چنین بازه‌های اطمینان میزان حساسیت کارایی هر واحد را به تغییر نمونه نشان می‌دهد. هرچه طول بازه کارایی کمتر باشد؛ حساسیت اندازه کارایی به مدل کمتر بوده؛ میزان اعتماد به مقدار کاریی به دست آمده برای واحد بیشتر خواهد بود. از بازه‌های اطمینان می‌توان برای رتبه‌بندی واحدها نیز استفاده نمود. برای این‌کار باید به برخی موارد دقت کرد. طول بازه اطمینان (در مواردی که کارایی به دست آمده از DEA برای دو واحد متفاوت نزدیک به هم باشد)، محدوده بازه اطمینان و میزان اشتراک بازه‌ها اطمینان، واحدهایی که با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

تحلیل پوششی داده‌ها ابزار قدرتمندی برای محاسبه کارایی است. با این وجود حساسیت مدل‌های آن به تغییر نمونه سبب کاهش اطمینان به مقادیر کارایی‌های به دست آمده از این روش می‌شود (در مواردی که حجم نمونه زیاد باشد؛ مرز کارایی به دست آمده، تنومندتر بوده؛ نسبت به تغییر نمونه حساسیت کمتری دارد. لذا استفاده از بوت استرپ برای چنین مواردی توصیه نمی‌شود). در چنین مواردی پیشنهاد می‌شود فرآیند شبیه‌سازی بوت استرپ، برای تحلیل میزان حساسیت کارایی به تغییر نمونه، مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

[۲] عبادی، س.، (۱۳۹۰). روشی برای رتبه‌بندی نمرات کارایی با استفاده از بوت استرپ، مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، ۸(۲)، ۴۴-۲۹.

[1] Efron, B. (1979), Bootstrap methods: another look at the jackknife, Annals of Statistics 7, 1-16.

[3] Ferrier, G. D. and J.G. Hirschberg (1997), Bootstrapping confidence intervals for linear programming efficiency scores: With an illustration using Italian bank data, Journal of Productivity Analysis 8, 19-33.

[4] Simar, L. and Wilson, P.W. (1998*a*), "Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models", Management Science, vol. 44, 1, 49-61.

[5] Banker, R.D. (1993), Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: A statistical foundation, Management Science 39, 1265-1273.

[6] Banker, R.D. (1996), Hypothesis tests using data envelopment analysis, Journal of Productivity Analysis 7, 139-159.

[7] Korostelev, A., L. Simar, and A.B. Tsybakov (1995a), efficient estimation of monotone boundaries, The Annals of Statistics 23, 476-489.

[8] Korostelev, A., L. Simar, and A.B. Tsybakov (1995b), On estimation of monotone and convex boundaries, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, XXXIX, 18-31.

[9] Advanced robust and non-parametric method in efficiency analaysis; methodology and applications, Cinzia Daraio and Leopold Simar (2007).

[10] Efron, B. and R.J. Tibshirani (1993), An Introduction to the Bootstrap, London: Chapman and Hall.

[11] S.C., Ray (2004), Data Envelopment Analysis Theory and Techniques for Economics and Operations Research, university of Connecticut.

[12] Simar, L. (1992), Estimating efficiencies from frontier models with panel data: A comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping, Journal of Productivity Analysis 3, 167-203.

[13] Simar, L. and Wilson, P.W. (2000*b*), "A general methodology for bootstrapping in non-parametric frontier models", Journal of Applied Statistics, vol. 27, 6, 779-802.

[14] Silverman, B.W. (1986), Density Estimation for Statistics and Data Analysis, London: Chapman and Hall.

[15] Schuster, E. F.(1985), Incorporating support constraint into nonparametric estimate of densities, communications in statics- theory and method,14, 1123-1136.

[16] Hall, P.(1986), On the number of bootstrap simulations required to construct a confidence interval , Ann. Statistics, 14, 1453-1462.

[17] Fare, R., Grosskopf, S., (1985). A nonparametric cost approachto scale efficiency. Scandinavian Journal of Economics 87, 594-604.

[18] Kneip, A., L. Simar, and P.W. Wilson (2003), \Asymptotics for DEA Estimators in Nonparametric Frontier Models," Discussion paper #0317,Institut de Statistique, Universit_e Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.

[19] Simar, L. and Wilson, P.W. (1999b), "Of Course we Can Bootstrap DEA scores! But does it mean anything? Logic Trumps and Wishful Thinking", The Journal of Productivity Analysis, 11, 67-80.