مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، شماره اول (پیاپی ۳۲)، بهار ۹۱، ص ص ۱۳۵-۱۱۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل چند متغیره خی-دو با پارامترهای متغیر

**اصغر سیف***
گروه ریاضیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان

رسید مقاله: ۴ مهر ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: ۶ بهمن ۱۳۹۰

## چکیده

روش معمول هنگام به‌کارگیری نمودار کنترل $T^2$ برای پایش فرایندهای چند متغیره، گرفتن نمونه‌هایی به اندازه‌ی $n_o$ هر $h_o$ ساعت، ازفرایند می‌باشد. مطالعات اخیر نشان داده است که به‌کارگیری طرح‌هایی با پارامترهای متغیر(VP)، منجر به توان آماری بیشتری، جهت کشف تغییرات کوچک تا متوسط بردار میانگین فرایند، می‌شود. در این مقاله نمودار کنترل $VPT^2$ جهت پایش میانگین فرایند، طراحی اقتصادی شده است. مدل پیش‌نهادی لورنزن و وانس مورد استفاده قرار می‌گیرد و با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک(GA) کمینه خواهد شد.

**کلمات کلیدی:** الگوریتم ژنتیک، زنجیر مارکوف، نمودارهای کنترل چند متغیره، طراحی آماری- اقتصادی.

## ۱ مقدمه

امروزه کیفیت به‌عنوان راهبردی تجاری شناخته می‌شود و عنوان غول صنعتی نه به کشورهایی با تولید انبوه، بلکه به کشورهایی با بالاترین درجه‌ی کیفیت در محصول‌ها، صنایع و خدمات رسانی اطلاق می‌گردد. حفظ دستاوردهای مرحله‌ی بهینه‌سازی قبل از ساخت در مرحله‌ی حین ساخت توسط فنون آماری به نام نمودارهای کنترل در مبحث کنترل آماری فرایند[1] (SPC) انجام می‌گیرد. نمودارهای کنترل آماری فرایند، به منظور نشان دادن این که آیا فرایند مورد نظر دارای وضعیت پایداری در رابطه با مشخصه‌های کیفیت مورد برسی هست یا نه، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بسیاری از شرایط واقعی صنعتی، متغیرهایی که در فرایند کنترل می‌شوند ماهیتاً چندمتغیره‌اند. برای مثال، در عملیات مونتاژ بدنه‌ی خودرو، ارتباط ابعاد قطعه‌های مونتاژ و کل بدنه چندمتغیره و بسیار همبسته‌اند. در صنایع شیمیای، بسیاری از متغیرهای فرایند، مانند دما، فشار و غلظت نیز چندمتغیره و بسیار

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: erfan.seif@gmail.com

[1] Statistical process control



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

همبسته هستند [۱]. در میان نمودارهای کنترل چندمتغیره، نمودار کنترل -$T^2$ هتلینگ از محبوبیت بیش‌تری برخورداراست و این محبوبیت سبب شده است که چندین شرکت اقدام به تولید نرم افزارهای خاص، برای این نمودار کنترل کنند [۲].

در نمودار کنترل $T^2$ کلاسیک (FRS $T^2$)، نرخ نمونه‌گیری از فرایند ثابت است. در واقع، همواره نمونه‌هایی به اندازه‌ی $n_o$ و در فاصله‌ی زمانی ثابت$h_0$، از فرایند گرفته می‌شود. این نمودار گرچه دارای مزیت‌های فراوانی است اما نسبت به تغییرات کوچک تا متوسط فرایند حساس نمی‌باشد. برای فایق آمدن بر این کاستی، تا کنون راهکارهای گوناگونی پیش‌نهاد شده است که می‌توان به طرح‌هایی با نرخ نمونه‌گیری متغیر اشاره کرد.

آپاریسی ایده‌ی اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و حدود کنترل تطبیقی در حالت تک‌متغیره را [۵-۳] به حالت چندمتغیره گسترش داد و سه نوع نمودار$T^2$ اصلاح شده به ترتیب، با خصوصیات اندازه‌ی نمونه‌ی متغیر(VSS)، فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر(VSI) و اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر(VSSI) [۸-۶]، با فرض معلوم بودن $\boldsymbol{\mu}_0$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ را مطرح کرد. نتایج مطالعه نشان داد که نمودار VSI $T^2$ بهبود زیادی در مقدار متوسط زمان هشدار (ATS) برای تغییرات متوسط فرایند فراهم می‌کند، در حالی‌که نمودارهای VSSI $T^2$ پیشرفت زیادی در اعلام به‌موقع تغییرات جزئی فرایند دارند. در این ارتباط، فراز و پارسیان [۹]، فراز و مقدم [۱۰] و فراز و همکاران [۱۱]، به طراحی نمودارهای کنترل $T^2$ با نرخ نمونه‌گیری متغیر به منظور بهبود توان نمودار کنترل $T^2$ کلاسیک پرداختند. چن و چیو [۱۲]، حالتی که $\boldsymbol{\mu}_0$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ نامعلوم هستند را مورد مطالعه قرار دادند و کار آپاریسی را برای نمودارهای $T^2$ با پارامترهای متغیر، که اجازه می‌دهد اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و حدود کنترل به طور همزمان قابل تغییر باشد (VP $T^2$)، گسترش دادند. مقایسه‌های عددی نشان داد که برای تغییرات جزئی فرایند، نمودار VP $T^2$، مقادیر ATS بهتری از نمودار VSSI فراهم می‌کند، گر چه مقادیر ATS برای تغییرات متوسط فرایند تقریباً یکسان بود.

در مطالعات فوق، نمودارهای کنترل $T^2$ با نرخ نمونه‌گیری متغیر تنها از دیدگاه آماری طراحی شده‌اند. در واقع در این نوع طراحی، خاصیت‌های آماری مانند خطاهای نوع I و II و متوسط طول اجرا(ARL)، مد نظر قرار می‌گیرد. این در حالی‌است که طراحی یک نمودار کنترل عواقب اقتصادی متعددی به همراه دارد. به همین منظور منطقی به نظر می‌رسید که نمودارهای کنترل با دیدگاه اقتصادی طراحی شوند. برای اولین بار کلات و مونتگومری [۱۳]، به طراحی اقتصادی نمودار کنترل FRST$^2$ پرداختند. تیلور [۱۴]، نشان داد، طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل که از نرخ نمونه‌گیری ثابت استفاده می‌کنند، از بعد اقتصادی بهینه نیستند. در این ارتباط، چن [۱۵]، و چو و همکاران [۱۶]، به طراحی اقتصادی نمودار کنترل VSI $T^2$ پرداختند که نتایج بیانگر بهبودهای قابل ملاحظه‌ای از دیدگاه اقتصادی بود. وودال [۱۷]، به‌عنوان منتقد طراحی اقتصادی نشان داد که این‌گونه طرح‌ها، خطای نوع اول نمودار کنترل را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهند به طوری‌که احتمال خطای نوع اول در طرح‌های اقتصادی بیش‌تر از طرح‌های آماری نمودارهای کنترل خواهد شد.

بنابراین طرح‌های آماری و اقتصادی هریک به طور جداگانه نقاط قوت و ضعف منحصر به خود را دارند. طرح‌های آماری نمودارهایی را ایجاد می‌کنند که دارای توان بالا و نرخ خطای نوع اول پایین برای کشف یک



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

تغییر خاص در فرایندها می‌باشند، از طرفی این طرح‌ها هزینه‌ی بیش‌تری را نسبت به طرح‌های اقتصادی تحمیل می‌کنند. از سوی دیگر، طرح‌های اقتصادی فقط هزینه را در نظر می‌گیرند و از خواص آماری نمودارهای کنترل غافل می‌مانند. به این دلیل طراحی جدیدی برای نمودارهای کنترل احساس شد که علاوه بر خواص آماری جنبه‌های اقتصادی را نیز در نظر بگیرد. در این ارتباط، سانیگا [۱۸]، طراحی آماری- اقتصادی نمودارهای کنترل را معرفی کرد. این طراحی معایب طرح‌های آماری و اقتصادی را با در نظر گرفتن همزمان جنبه‌های آماری و اقتصادی بر طرف نمود. طرح‌های آماری- اقتصادی از طریق یک بهینه‌سازی غیرخطی عمل کرده و هدف را می‌نیمم کردن متوسط هزینه‌ی کل در هر واحد زمان، با تحمیل محدودیت‌های آماری بر نرخ خطای نوع I، توان و ATS، قرار می‌دهد. طرح‌های آماری- اقتصادی کاملاً با اهداف کنترل آماری کیفیت هم‌راستا بوده و همزمان با کاهش هزینه‌ها، کیفیت محصول را در سطح مطلوبی از خطا و توان بالا کنترل می‌نماید. ترابیان و همکاران [۱۹] با به‌کارگیری مدل کوستا و رحیم، طراحی آماری-اقتصادی نمودار $VP\ T^2$ را ارائه کردند که نتایج نشان دهنده‌ی بهبود قابل ملاحظه‌ای در توان نمودار کنترل در کشف تغییرات کوچک تا متوسط فرایند بود. سیف و همکاران [۲۰]، نیز به طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل $VSSCT^2$ پرداختند. این طراحی بهبودی نسبی نسبت به طراحی $VSST^2$ را نشان داد. در تمامی پژوهش‌های فوق، مقایسه‌ی بین طرح‌های مذکور و FRS، اریب و ناعادلانه بوده است. چراکه، در این طراحی‌ها، هزینه مورد انتظار در هر ساعت در حالت تحت کنترل برای دو طرح یکسان فرض نشده است. علیرغم کوشش‌های صورت گرفته جهت طراحی نااریب آماری-اقتصادی نمودار $VSSCT^2$ [۲۱]، تا کنون هیچ‌گونه طراحی نااریب آماری-اقتصادی در خصوص نمودار کنترل $VPT^2$ در ادبیات موضوع مشاهده نشده است. به همین منظور این پژوهش بر طراحی این نمودار بخصوص، متمرکز خواهد بود. در بخش دوم به تشریح نمودار کنترل $VPT^2$ با استفاده از زنجیر مارکوف خواهیم پرداخت. بخش‌های سوم و چهارم به مدل هزینه و بهینه‌سازی این مدل با استفاده از الگوریتم ژنتیک اختصاص دارد. بخش‌های پنجم و ششم نیز به مقایسه طرح $VPT^2$ با سایر طرح‌ها با ارایه یک مثال صنعتی می‌پردازد و بلاخره آخرین بخش به طور مختصر مهم‌ترین نتایج این مقاله را معرفی خواهد کرد.

## ۲ نمودار کنترل $VPT^2$ با رویکرد مارکوفی

p مشخصه‌ی کیفیت همبسته را در نظر بگیرید که با استفاده از نمودار کنترل $T^2$ قرار است پایش شوند. فرض بر این است که توزیع احتمال p مشخصه‌ی کیفیت، نرمال چندمتغیره با بردار میانگین تحت کنترل $\mu'_0 = (\mu_{01},...,\mu_{0p})$ و ماتریس واریانس – کوواریانس $\Sigma$ می‌باشد. با فرض $T_i^2 = n(\bar{x}_i - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{x}_i - \mu_0)$، چنان‌چه $T_i^2 \geq k$ شود، نمودار هشدار می‌دهد. در صورت معلوم بودن پارامترهای فرایند $(\mu_0, \Sigma)$، $T_i^2 \sim \chi^2(p)$ خواهد بود و بنابراین $k = \chi^2_{1-\alpha}(p)$ می‌باشد، به طوری‌که $\chi^2_{1-\alpha}(p)$، چندک مرتبه $(1-\alpha)$ ام توزیع خی-دو با p درجه آزادی است. به همین دلیل این نمودار کنترل را می‌توان نمودار کنترل چند متغیره خی-دو نامید. فرض کنید $n_1$، $n_2$ و $h_1$، $h_2$ به ترتیب حداقل و حداکثر اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری باشند انتخاب $n_1$، $n_2$ و $h_1$، $h_2$ به موقعیت نقطه‌ی مربوط به نمونه قبلی در نمودار کنترل بستگی



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

دارد. چنان‌چه نقطه‌ی نمونه‌ی قبلی $(i-1)$ در ناحیه امن واقع شده باشد، اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری، برای نمونه‌گیری فعلی $(i)$، به ترتیب برابر با $n_1$ و $h_1$ خواهد بود. اگر نقطه‌ی نمونه‌ی قبلی $(i-1)$، در ناحیه هشدار قرار گرفته باشد، اندازه‌ی نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری فعلی $(i)$، در فرایند نمونه‌گیری برابر با $n_2$ و $h_2$ خواهد بود. سرانجام چنان‌چه نقطه‌ی نمونه‌ی قبلی در ناحیه واکنش قرار گرفته باشد، فرایند به‌عنوان یک فرایند خارج از کنترل تلقی خواهد شد. نواحی امن، هشدار و واکنش با استفاده از w به‌عنوان خط هشدار و $k_j = c(m, n_j, p)F_{1-\alpha}(p, v_j)$ به‌عنوان حدود کنترل مشخص خواهند شد. توجه کنید که ناحیه $[0, w]$ ناحیه امن، ناحیه $(w, k_j)$ ناحیه هشدار و ناحیه $[k_j, \infty)$ ناحیه واکنش است. شایان ذکر است چنان‌چه نقطه نمونه قبلی، از طرح نمونه‌ای حداقلی یعنی $(n_1, h_1)$ حاصل شده باشد، $j=1$ و در غیر اینصورت $j=2$ خواهد بود. فرض بر این است که $w_1 > w_2$، $k_1 > k_0 > k_2$، $n_1 < n_0 < n_2$ و $h_2 < h_0 < h_1$.

در ادبیات موضوع مرسوم‌ترین معیار مورد استفاده برای مقایسه طرح‌های کنترل با استراتژی‌های مختلف، معیار AATS (متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار) می‌باشد:

$$AATS = ATC - \text{(متوسط زمان تحت کنترل)} \qquad (1)$$

به قسمی که ATC (متوسط زمان چرخه) برابر با متوسط زمان بروز اولین هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند از زمان شروع فرایند می‌باشد. چنان‌چه زمان وقوع یک انحراف با دلیل متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $\lambda$ باشد آن‌گاه متوسط زمانی که فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند برابر با $\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود. یکی از روش‌های مفید برای محاسبه ATC استفاده از مفاهیم زنجیرهای مارکوف است. برای توضیح بیشتر در ارتباط با روش‌های مورد استفاده در این قسمت، خواننده را به سینلار [22]، ارجاع می‌دهیم.

در طرح نمونه‌گیری VP هر بار که از فرایند نمونه‌گیری می‌شود، یکی از حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد $(j=1,2)$:

حالت ۱: $0 \le T^2 \le w$ و فرایند تحت کنترل است $(d=0)$.

حالت ۲: $w \le T^2 \le k_j$ و فرایند تحت کنترل است $(d=0)$.

حالت ۳: $T^2 \ge k_j$ و فرایند تحت کنترل است (هشدار غلط، $d \ne 0$).

حالت ۴: $0 \le T^2 \le w$ و فرایند خارج از کنترل است $(d \ne 0)$.

حالت ۵: $w \le T^2 < k_j$ و فرایند خارج از کنترل است $(d \ne 0)$.

زمانی‌که $T^2 \ge k_j$ باشد، نمودار کنترل هشداری را مبنی بر خارج کنترل بودن فرایند اعلام می‌دارد. واضح است چنان‌چه فرایند تحت کنترل باشد این هشدار یک زنگ خطر اشتباهی(حالت ۳) و چنان‌چه فرایند خارج از کنترل



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

باشد، هشدار اعلام شده یک هشدار صحیح است. بنابر این حالت ۶ را می‌توان حالت جاذب در زنجیرهای مارکوف نامید. برای یک زنجیر مارکوف با حالت‌های گذرای فوق، ماتریس احتمال انتقال به قرار زیر است:

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن $p_{ij}$ بیانگر احتمال شرطی تغییر وضعیت از حالت قبلی $i$ به حالت فعلی $j$ است. با توجه به توزیع $T_i^2$، $F(x,p,\eta_i)$ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی توزیع **خی-دو** غیرمرکزی با $p$ درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزی $\eta_i = n_i d^2$ است، به‌طوری که:

$$d=(\mu_1-\mu_0)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0) \qquad (2)$$

$$\begin{array}{lll}
p_{11}=a_1e^{-\lambda h_1} & p_{12}=(b_1-a_1)e^{-\lambda h_1} & p_{13}=(1-b_1)e^{-\lambda h_1} \\
p_{14}=a_1'(1-e^{-\lambda h}) & p_{15}=(b_1'-a_1')(1-e^{-\lambda h_1}) & p_{16}=(1-b_1')(1-e^{-\lambda h_1}) \\
p_{21}=p_{31}=a_2\,e^{-\lambda h_2} & p_{22}=p_{32}=(b_2-a_2)e^{-\lambda h_2} & p_{33}=p_{23}=(1-b_2)e^{-\lambda h_2} \\
p_{24}=p_{34}=a_2'(1-e^{-\lambda h_2}) & p_{25}=p_{35}=(b_2'-a_2')(1-e^{-\lambda h_2}) & p_{26}=p_{36}=(1-b_2')(1-e^{-\lambda h_2}) \\
p_{44}=a_1' & p_{45}=b_1'-a_1' & p_{46}=1-b_1' \\
p_{54}=a_2' & p_{55}=b_2'-a_2' & p_{56}=1-b_2'
\end{array}$$

به‌قسمی که $(i=1,2)$:

$$b_i'=F(k_i,p,,\eta_i=n_id^2)\ ;\ a_i'=F(w,p,,\eta_i=n_id^2)$$
$$b_i=F(k_i,p,,\eta_i=0)\ ;\ a_i=F(w,p,,\eta_i=0)$$

با توجه به مفاهیم زنجیر مارکوف داریم:

$$ATC=b'(I-Q)^{-1}h \qquad (3)$$

به قسمی که $h'=(h_1,h_2,h_1,h_2)$ بردار فاصله‌ی نمونه‌گیری، $Q$ یک ماتریس $5\times5$ با حذف سطر و ستون حالت جاذب ماتریس احتمال انتقال $P$، $I$ ماتریس واحد از مرتبه ۵ و $b'=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)$ بردار



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

احتمال آغازین با شرط $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ خواهد بود. از آن‌جا که در آغاز هر فرایندی مهندس کیفیت از تحت کنترل بودن فرایند اطمینان حاصل می‌کند، لذا به منزله اعمال کنترل بیشتر و سخت‌گیرانه‌تر بر فرایند فرض می‌شود که فرایند از حالت دوم شروع به فعالیت می‌کند. به عبارت دیگر $b' = (0,1,0,0,0)$، فرض می‌شود.

## ۳ مدل هزینه

### ۳-۱ پذیره‌ها

برای بناسازی مدل هزینه برای نمودار کنترل $VP\ T^2$ پذیره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- $p$ مشخصه‌ی کیفیت دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\mu$ و ماتریس واریانس– کوواریانس $\Sigma$ است.

۲- در حالت تحت کنترل، $\mu = \mu_0$ فرض می‌شود.

۳- فقط یک انحراف با دلیل در تغییر میانگین فرایند در نظر می‌گیریم. این انحراف با دلیل منجربه تغییر یا انتقال میانگین فرایند ($\mu$) از $\mu_0$ به $\mu_1$ خواهد شد. فاصله‌ی ایجاد شده در اثر این انتقال را فاصله‌ی ماهالانوبیس در نظر می‌گیریم.

۴- فرض می‌شود ماتریس واریانس – کوواریانس فرایند همواره ثابت است.

۵- قبل از وقوع تغییر یا انتقال در میانگین فرایند، فرض می‌شود فرایند تحت کنترل است.

۶- وقوع رخداد انحرافات با دلیل یک فرایند پواسن با نرخ $\lambda$ (در واحد زمان) است. به عبارتی دیگر چنان‌چه فرایند از حالت تحت کنترل شروع کند، مدت زمانی که تحت کنترل باقی می‌ماند، متغیر تصادفی با توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است.

۷- فرایند خود اصلاح نیست. به عبارتی دیگر چنان‌چه فرایند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل انتقال یابد، فقط در صورت دخالت یک عامل انسانی مجدداً به حالت تحت کنترل بازخواهد گشت.

۸- چرخه‌ی کیفیت در حالت تحت کنترل شروع می‌گردد و تا تعمیر فرایند (بعد از اعلام یک هشدار) ادامه می‌یابد. فرض می‌شود چرخه‌ی کیفیت یک فرایند تجدید پاداش است.

### ۳-۲ تابع هزینه

این مدل، سه هزینه‌ی مختلف را در نظر می‌گیرد: هزینه‌ی تولید در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل، هزینه‌ی نمونه‌گیری و هزینه‌ی بروز هشدارهای غلط و اصلاح و تعمیر فرایند. روش رایج در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل می‌نیمم‌سازی هزینه‌ی مورد انتظار در هر واحد زمان است. به همین‌منظور باید هزینه‌ی مورد انتظار را در یک چرخه، بر زمان مورد انتظار چرخه تقسیم کرد و سپس نتیجه‌ی حاصله را می‌نیمم کرد. در این مدل فرض بر این است که فرایند در حالت تحت کنترل شروع می‌شود و زمان وقوع یک انحراف بادلیل متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین $1/\lambda$ است. خروج فرایند از حالت تحت کنترل به معنی تغییر میانگین فرایند و



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

در عین حال ثابت ماندن ماتریس واریانس- کوواریانس است. تصحیح فرایند به معنی بازگشت به حالت اصلی یا تحت کنترل خواهد بود. بنابر فرایند تجدید پاداش هزینه‌ی مورد انتظار در هر ساعت برابر خواهد بود با:

$$E(A)=\frac{E(C)}{E(T)} \tag{۴}$$

به‌قسمی که:

$$E(C)=\frac{C_0}{\lambda}+C_1[AATS+\overline{n}E+\gamma_1T_1+\gamma_2T_2]+a'_3ANF+a_3$$
$$+(a_1ANS+a_2ANI)+\frac{(a_1+a_2n_2)(\overline{n}E+\gamma_1T_1+\gamma_2T_2)}{h}$$

$$E[T]=\frac{1}{\lambda}+(1-\gamma_1)T_0ANF+AATS+\overline{n}E+T_1+T_2$$
$$=ATC+(1-\gamma_1)T_0ANF+\overline{n}E+T_1+T_2$$

به‌طوری که:

- AATS، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییردر میانگین فرایند خواهد بود.
- ANF ، متوسط تعداد هشدارهای غلط است که با توجه به خواص زنجیرهای مارکوف برابر خواهد بود با:

$$ANF=\mathbf{b}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{f}$$

به‌قسمی که $\mathbf{f}'=(0,0,1,0,0)$

- فرض کنید زمان لازم برای تفسیر نمونه متناسب با اندازه‌ی نمونه باشد(ثابت تناسب را E در نظر می‌گیریم). در این‌صورت زمان صرف شـده برای تفسیر نمونه برابر با $\overline{n}E$ خواهد بود، به‌طوری‌که $\overline{n}$ متوسط اندازه‌ی نمونه بعد از بروز یک هشدار خارج از کنترل است و برابر خواهد بود با:

$$n_1(p_{16}+p_{46})+n_2(p_{26}+p_{36}+p_{56})$$

- $T_0$: متوسط زمان صرف شده برای تحقیق برای یک هشدار اشتباه
- $T_1$: زمان مورد انتظار برای کشف انحراف بادلیل
- $T_2$: زمان مورد انتظار برای اصلاح انحراف بادلیل
- اگر تولید طی جستجو ادامه پیدا کند $\gamma_1=1$ و در غیر این صورت $\gamma_1=0$.
- $\gamma_2$: برابر با صفر است چنان‌چه فرایند طی تصحیح و تعمیر متوقف شود و در غیر این‌صورت برابر با یک خواهد بود.
- $C_0$: هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق مادامی که فرایند تحت کنترل



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

- $C_1$: هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق مادامی که فرایند خارج از کنترل
- $a'_3$ : هزینه‌ی بررسی هشدارهای اشتباه
- $a_3$ : هزینه‌ی تعیین محل و تعمیر و اصلاح انحرافات بادلیل
- $a_1, a_2$: هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری
- چنان‌چه $ANI$ , $ANS$ بیانگر متوسط تعداد اقلام بازرسی شده و نمونه‌ی اخذ شده طی یک چرخه‌ی کیفیت باشد خواهیم داشت:

$$ANI = \mathbf{b}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{n} \tag{۵}$$

$$ANS = \mathbf{b}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1} \tag{۶}$$

به‌قسمی که، $\mathbf{n}' = (n_1, n_2, n_2, n_1, n_2)$ و $\mathbf{1}' = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

## ٤ الگوریتم ژنتیک و طراحی آماری- اقتصادی نمودار کنترل $VP\ T^2$

در طراحی آماری-اقتصادی نمودار $VP\ T^2$، هدف یافتن مقادیر پارامترهای نمودار کنترل $(k_1, k_2, w, n_1, n_2, h_1, h_2)$ می‌باشد، به قسمی که معادله(۴)، می‌نیمم شود.

در چنین وضعیتی پارامترهای فرایند $(p, \lambda, d, T_0, T_1, T_2, \gamma_1, \gamma_2, E)$ و پارامترهای هزینه $(C_0, C_1, a_1, a_2, a_3, a'_3)$ معلوم فرض می‌شوند. اندازه‌های نمونه $(n_1, n_2)$ با فرض $1 \le n_1 < n_2$، مقادیری گسسته و دیگر پارامترهای نمودار همواره مقادیری پیوسته اختیار می‌کنند. با در نظر گرفتن شرایط واقعی در یک فرایند تولید، حداکثر مقدار فاصله‌ی نمونه‌گیری ۸ ساعت در نظر گرفته می‌شود $(h \le 8)$. بنابراین مسأله‌ی بهینه‌سازی به صورت زیر خواهدبود:

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad E(L) \\ &\text{s.t.} \quad 0/1 \le h_3 \le h_0 \le h_1 \le 8 \\ &\qquad 0 \le w \le k_2 \le k_0 \le k_1 \\ &\qquad n_2 \le n_0 \le n_1 \in Z^+ \end{aligned} \tag{۷}$$

برای دستیابی به طرح آماری- اقتصادی می‌توان در حل بهینه‌ی مدل فوق، قیدهای آماری نظیر $ANF \le ANF_0$ یا $AATS \le AATS_1$ را اضافه نمود. به وضوح قید $ANF \le ANF_0$ برای غلبه بر زنگ خطرهای اشتباهی نمودارهای اقتصادی و قید $AATS \le AATS_1$ به منظور تسریع در کشف تغییرات فرایند در نظر گرفته می‌شود.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

مساله بهینه‌سازی فوق، دارای متغیرهای تصمیم گسسته و پیوسته و فضای پاسخ نامحدب است. از آن‌رو حل این مدل با استفاده از روش‌های بهینه‌کاوی کلاسیک مقدور نمی‌باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش جستجوی فرا ابتکاری است که توسط هلند [۲۳]، معرفی گردید. از آن زمان تا کنون این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌های فرا ابتکاری دیگر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک برای بهینه سازی تابع هدف نیازی به تجزیه و تحلیل ریاضی و پیچیده تابع موردنظر ندارد و در بسیاری از زمینه‌های بهینه سازی به طور وسیعی استفاده می‌شود. در واقع هدف $GA$ دستیابی به یک بهینه عمومی و نه محلی، بدون بغرنج کردن فضای جواب است. در این روش از یک مجموعه جواب‌های شدنی کوچک (جمعیت) در یک فرایند موازی شروع به تولید نسل جدید یا جمعیت جدید می‌نماید. این فرایند تکراری برگرفته از مباحث ژنتیکی تکامل موجودات است و نسل جدید را همانند فرایند بقا به طور کاملاً تصادفی از نسل حاضر تولید می‌کند. از جمله ویژگی‌های الگوریتم ژنتیک می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- در الگوریتم ژنتیک، جمعیتی از نقاط (به جای یک نقطه) به صورت موازی مورد جستجو قرار می‌گیرند.
۲- در الگوریتم ژنتیک از قواعد انتقال احتمالی (به جای قواعد انتقال قطعی) استفاده می‌شود.
۳- در الگوریتم ژنتیک نیازی به اطلاع درباره مشتق پذیری تابع هدف نیست و تنها کافی است که برای مساله موردنظر یک تابع برازش تعریف شود.
۴- به راحتی می‌تواند برای مسایل چند هدفه بکار رود.
۵- برای محیط‌های نویزی مفید است.
۶- روش‌های متعددی برای سرعت‌دهی به الگوریتم و بهبود کیفیت جواب وجود دارد و به محض افزایش آگاهی از دامنه مساله می‌توان از این روش‌ها استفاده نمود.
۷- لیستی از متغیرهای بهینه ارائه می‌دهد و نه فقط یک جواب بهینه.

البته GA بهترین روش برای حل هر مساله‌ای نیست. اما عملکرد GA در مسایلی که روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی ناتوان می‌باشند، عملکرد خوبی را به نمایش می‌گذارد. پارامترهای کلیدی الگوریتم ژنتیک عبارت‌اند از:

- **جمعیت**

$GA$ با تعدادی از جواب‌های اولیه شدنی به‌نام جمعیت اولیه شروع به کار می‌کند. هر جمعیت دارای $N_{pop}$ کروموزوم می‌باشد که به طور کاملاً تصادفی از فضای جواب مساله مورد بررسی تولید می‌شوند. هرچه این کمیت مقدار بزرگتری باشد، در هر نسل محدوده‌ی بزرگتری از فضای پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

### ➢ انتخاب[1]

در این مرحله براساس روشی خاص دو کروموزوم به‌عنوان والد برای نسل کشی انتخاب می‌شوند. روش‌های انتخاب متفاوت منجر به نسل‌های متفاوت خواهند شد. چرخ رولت[2] و روش انتخابی تورنامنت[3]، روش‌های انتخاب استانداردی برای GA می‌باشند. معمولاً برای کروموزوم‌های هر نسل، مقدار تابع هزینه آن‌ها محاسبه می‌شود و به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. آن‌گاه بهترین‌های هر نسل برای عمل جفت گیری انتخاب می‌شوند و مابقی حذف می‌گردند. نرخ انتخاب، $X_{rate}$ کسری از $N_{pop}$ است. تعداد کروموزوم‌هایی که در هر نسل نگهداری می‌شوند برابر است با $X_{keep} = X_{rate}.N_{pop}$. در واقع هر نسل شامل $X_{keep}$ کروموزوم ارشد و $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند است که با عمل جفت‌گیری از والدین به‌دست آمده‌اند.

انتخاب براساس چرخ رولت بدین صورت است که در این روش کروموزوم‌های بهتر شانس انتخاب بیشتری دارند و شانس انتخاب کروموزوم متناسب با میزان برازندگی آن کروموزوم است. در روش تورنامنت ابتدا مسابقه‌ای با معمولاً ۲ یا ۳ کروموزوم اجرا می‌شود و در بین آن‌ها بهترین کروموزوم به جمعیت بعدی کپی می‌شود. این عمل به اندازه‌ی جمعیت تکرار می‌گردد.

### ➢ تلاقی[4]

عملگر تلاقی استاندارد برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والده به‌عنوان پدر و مادر انتخاب می‌شوند و حاصل جفت‌گیری دو فرزند است. والدین در مجموع باید $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند را تولید کنند تا نسل جدید تکمیل گردد.

### جهش[5]

برای آن که الگوریتم ژنتیک سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود عملگر جهش صورت می‌گیرد تا تنوع بررسی و آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط فضای جواب افزایش یابد. در این‌جا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شود. اغلب کاربران GA عددی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر را انتخاب می‌کنند. در این روش باید برای واریانس توزیع نرمال مقداری انتخاب شود. البته معمولاً کروموزوم‌هایی برای عمل جهش انتخاب می‌شوند که جزء بهترین کروموزوم‌های هر نسل نباشند.

### ➢ نخبگی[6]

زمانی که از اپراتورهای ژنتیکی استفاده می‌شود ممکن است بهترین کروموزوم‌ها از دست بروند. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به نسل بعدی انتقال یابند. در واقع، نخبگی روشی است برای نگهداری یک کپی از بهترین کروموزوم‌های هر نسل در نسل جدید. مکانیزم فوق الگوریتم ژنتیک را مجبور می‌سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نسل نگه دارد. به تجربه ثابت شده است که این

[1] Selection Strategy
[2] Roulette
[3] Tournament
[4] Mating
[5] Mutation
[6] Elitism



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

مکانیزم، عملکرد الگوریتم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایی را کوتاه می‌نماید. این عملگر توسط گلدبرگ [۲۴]، معرفی گردید. تعداد کروموزوم‌هایی که طبق این قاعده به نسل بعدی کپی می‌شوند نیز خود بحث برانگیز بوده است. بعد از آن‌که عملگر تلاقی و جهش صورت پذیرفت، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود. کروموزوم‌ها رتبه‌بندی می‌شوند و مجدداً بهترین‌ها انتخاب می‌شوند، معیار توقف بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

## ۵ مقایسه‌ای نااریب و عادلانه بین طرح‌های $VP$ و $FRS$

برای انجام یک مقایسه عادلانه بین طرح‌های $VP$ و $FRS$، می‌بایست هزینه‌ی مورد انتظار در هر ساعت در حالت تحت کنترل برای دو طرح یکسان باشد. چنان‌چه دو طرح مذکور زمان تحت کنترل یکسانی داشته باشند، این دو طرح قابل مقایسه خواهند بود، اگر و تنها اگر هزینه دوره‌ی تحت کنترل یکسانی داشته باشند. در این صورت دو طرح یاد شده باید مادامی که فرایند تحت کنترل است، نسبت نمونه‌گیری (تعداد نمونه و فاصله‌ی نمونه‌گیری) و میزان خطای نوع I یکسانی داشته باشند. در طرح $VP$ در حالت تحت کنترل، $ANS$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$ANS_I = b'(I-\mathbf{Q})^{-1}(1,1,1,0,0)' \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANS) \tag{۸}$$

با در نظر گرفتن مجموعه پارامترهای $(k_0, n_0, h_0)$ برای طرح $FRS$ در حالت تحت کنترل خواهیم داشت:

$$ANS_I = \frac{1}{1-e^{-\lambda h_0}} \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANS) \tag{۹}$$

حال با تساوی قرار دادن روابط (۹) و (۸)، یعنی برقراری میزان $ANS$ در حالت تحت کنترل در طرح‌های $VP$ و $FRS$ می‌توان مقدار $w$ را در طرح $VP$ تعین کرد:

$$w = F^{-1}\left(\frac{\exp(-\lambda h_2)-\exp(-\lambda h_0)}{\exp(-\lambda h_0)(\exp(-\lambda h_2)-\exp(-\lambda h_1))}, p, 0\right) \tag{۱۰}$$

از طرفی می‌بایست میزان $ANI$ در حالت تحت کنترل دراین دو طرح با یکدیگر برابر باشد. برای طرح $FRS$ در حالت تحت کنترل خواهیم داشت:

$$ANI_I = \frac{n_0}{1-e^{-\lambda h_0}} \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANI) \tag{۱۱}$$



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

در طرح $VP$ در حالت تحت کنترل، $ANI$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$ANI_I = b'(I-\mathbf{Q})^{-1}(n_1, n_2, n_3, 0, 0)' \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANI) \qquad (۱۲)$$

از برابری رابطه‌های (۱۱) و (۱۲)، خواهیم داشت:

$$n_2 = \frac{n_0(1-\exp(-\lambda h_2)+F(w,p,0)(\exp(-\lambda h_2)-\exp(-\lambda h_1))-n_1F(w,p,0)\exp(-\lambda h_2)(1-\exp(-\lambda h_0)))}{(1-\exp(-\lambda h_0))(1-F(w,p,0)\exp(-\lambda h_1))} \qquad (۱۳)$$

تساوی $ANF$ در این دو طرح منجر به محاسبه‌ی $k_2$ بر حسب سایر پارامترها خواهد شد. مقدار $ANF$ در طرح $FRS$ برابر است با:

$$ANF_I = (1-F(k_0,p,0))\frac{e^{-\lambda h_0}}{1-e^{-\lambda h_0}} \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANF) \qquad (۱۴)$$

در طرح VP نیز داریم:

$$ANF_I = b'(I-\mathbf{Q})^{-1}(0,0,1,0,0)' \quad (\text{در حالت تحت کنترل } ANF) \qquad (۱۵)$$

از برابری رابطه‌های (۱۳) و (۱۴)، خواهیم داشت:

(۱۶)

$$k_2 = \frac{F(k_1,p,0)F(w,p,0)\exp(-\lambda h_1)\exp(-\lambda h_2)(1-\exp(-\lambda h_0))+(1-F(k_0,p,0))(1-\exp(-\lambda h_2)+F(w,p,0)(\exp(-\lambda h_2)-\exp(-\lambda h_0))}{\exp(-\lambda h_2)(1-\exp(-\lambda h_0)(F(w,p,0)\exp(-\lambda h_1)-1)}$$

بنابراین برای پارامترهای هزینه و فرایند از قبل تعیین شده، نخست طرح بهینه $FRS$ تعریف می‌شود $(n_0, k_0, h_0)$. متعاقباً با توجه به $(k_1, n_1, h_1, h_2)$، پارامترهای $n_2$ , $k_2$ , $w$ را با استفاده از معادله‌های (۱۰)، (۱۳)و (۱۶) تعیین می‌کنیم. در نهایت پارامترهای $(k_1, n_1, h_1, h_2)$ را به قسمی می‌یابیم که معادله (۷) را min کند. این روش ما را مطمئن می‌کند که مقایسه صورت گرفته بین دو طرح نااریب و معنادار است، چرا که مادامی که فرایند تحت کنترل است، هزینه‌های یکسانی برای دو طرح مذکور در نظر گرفته شده است.

## ٦ کاربرد صنعتی و ملاحظه‌های کاربردی

جدول (۱)، بیانگر برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس برای فرایند ریخته‌گری شرکت جنرال موتور ایالات متحده آمریکا است. مهندس کنترل کیفیت به منزله اعمال کنترل شدید بر روی فرایند ریخته‌گری، قصد استفاده از یک طرح آماری-اقتصادی VP $T^2$ را دارد. با توجه به مشکلات اجرایی این طرح، شایسته است به مقایسه مزیت‌های اقتصادی طرح مذکور با طرح‌های VSS، VSI، VSSC، VSIC و FRS پرداخته شود. جداول



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

(۷)-(۲)، مقایسه‌های بین پارامترهای بهینه و مقدار زیان نمودارهای کنترل VSS ، VSI،VSSC،VSIC و FRS را با مدل اقتصادی لورنزن و وانس در این فرایند ریخته‌گری نشان می‌دهد.

به‌عنوان مثال فرض کنید، مهندس کنترل کیفیت از یک طرح آماری- اقتصادی $VPT^2$ با پارامترهای بهین $k_2 = 8/25$ ، $k_1 = 28/62$ ، $w = 0/87$ ، $n_1 = 1$ ، $n_2 = 22$ ، $h_2 = 1/24$ ، $h_1 = 1/88$ سود جوید. با توجه به جدول (۳)، این طرح وی را قادر می‌سازد که تغییری به اندازه‌ی ۰/۵ واحد در میانگین فرایند را در مدت زمان ۲/۷۷ ساعت (۱۶۷ دقیقه) بعد از وقوع آن شناسایی نماید . متوسط هزینه بر ساعت چنین طرحی معادل ۳۵۵/۸۸ دلار است. حال همان‌گونه که از جدول (۲) پیداست، چنان‌چه مهندس کیفیت برای این فرایند طرح $FRS\ T^2$ را برگزیند، متوسط هزینه‌ی چنین طرحی برابر با ۴۱۲/۸۱ دلار و در صورت انتخاب طرح‌های VSS ، VSI،VSSC، VSIC متوسط هزینه به ترتیب برابر با ۳۵۹/۹۳، ۳۷۵/۷۲ ، ۳۵۶/۶۷، ۳۷۵/۰۲ دلار خواهد بود که این موضوع بیانگر موفقیت طرح $VP\ T^2$ نسبت به طرح‌های مذکور می‌باشد. با مقایسه‌ای میان دو طرح اقتصادی $VP\ T^2$ و $FRS\ T^2$ برای شناسایی $d = 0/5$ ملاحظه می‌شود که طرح آماری- اقتصادی $VP\ T^2$ منجر به بهبود هزینه انتظاری ۵۶/۹۳ دلاربر ساعت می‌گردد. حال با در نظر گرفتن ۸ ساعت کاری در روز و ۲۰ روز کاری در ماه، طرح اقتصادی $VP\ T^2$ منفعت اقتصادی سالانه در حدود ۱۰۹۳۰۶ دلار را نسبت به طرح اقتصادی $FRS\ T^2$ عاید شرکت جنرال موتور می‌نماید. این سود تنها از یک فرایند عاید سازمان گردیده است. در صورت اعمال طراحی آماری- اقتصادی بر کلیه فرایندها می‌توان سودهای کلانی را متوجه سازمان کاربر نمود که بدون اعمال هیچ گونه هزینه اضافی و تنها با تغییر پارامترهای نمودارهای کنترل حاصل می‌گردد.

## ۷ نتیجه

در این مقاله، طراحی نااریب آماری- اقتصادی نمودار کنترل چند متغیره $VPT^2$ ارائه گردید. نتایج مقایسه‌های عددی حاکی از آن است که طرح کنترل پیشنهادی در کشف تغییرات کوچک تا متوسط، نسبت به طرح‌های VSS، VSI،VSSC، VSIC و FRS عملکرد بهتری دارد. این در حالی است‌که نمودارهای کنترل $VSICT^2$ و $VSIT^2$ در کشف تغییرات بزرگ عملکرد بهتری از خود نسبت به سایر نمودارهای کنترل نشان می‌دهند.

**جدول ۱.** برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس برای فرایند ریخته‌گری GM

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p = 3$ | $\lambda = 0/05$ | $E = 0/0833$ | $\gamma_1 = 1$ | $\gamma_2 = 0$ |
| $T_0 = 0/0833$ | $T_1 = 0/0833$ | $T_2 = 0/75$ | $C_0 = 114/24$ | $C_1 = 949/2$ |
| $a_1 = 5$ | $a_2 = 4/22$ | $a_3 = 977/4$ | $a'_3 = 977/4$ | $d = 1/5$ |



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

**جدول ۲.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی ESD نمودار کنترل FRS

| d | $k_0$ | $n_0$ | $h_0$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۶/۸۷ | ۳۷ | ۲/۸۴ | ۰/۵ | ۱۰/۸۵ | ۵۴۶/۱۴ |
| ۰/۵ | ۸/۶۲ | ۱۸ | ۱/۳۴ | ۰/۵ | ۴/۴۷ | ۴۱۲/۸۱ |
| ۰/۷۵ | ۹/۳۱ | ۱۱ | ۰/۹۹ | ۰/۵ | ۲/۷۸ | ۳۴۹/۵۴ |
| ۱/۰۰ | ۱۰/۲ | ۷ | ۰/۷۶ | ۰/۴۴ | ۲/۱۶ | ۳۱۴/۱۳ |
| ۱/۲۵ | ۱۱/۰۷ | ۵ | ۰/۶۳ | ۰/۳۵ | ۱/۸۱ | ۲۹۱/۲۱ |
| ۱/۵ | ۱۲/۲۳ | ۵ | ۰/۶۶ | ۰/۲ | ۱/۵ | ۲۷۳/۶ |
| ۱/۷۵ | ۱۲/۸۶ | ۴ | ۰/۶ | ۰/۱۶ | ۱/۳۲ | ۲۶۱/۰۸ |
| ۲/۰۰ | ۱۳/۱۸ | ۳ | ۰/۵۲ | ۰/۱۶ | ۱/۲۱ | ۲۵۱/۸۵ |
| ۲/۲۵ | ۱۴/۰۷ | ۳ | ۰/۵۴ | ۰/۱ | ۱/۰۹ | ۲۴۴/۱ |
| ۲/۵۰ | ۱۴/۹۹ | ۳ | ۰/۵۵ | ۰/۰۷ | ۱ | ۲۳۸/۹۱ |
| ۲/۷۵ | ۱۴/۵۴ | ۲ | ۰/۴۶ | ۰/۱ | ۰/۹۶ | ۲۳۳/۲۶ |
| ۳/۰۰ | ۱۵/۲۸ | ۲ | ۰/۴۷ | ۰/۰۷ | ۰/۸۹ | ۲۲۸/۹۹ |

**جدول ۳.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی ESD نمودار کنترل VP

| d | $k_1$ | $k_2$ | w | $n_1$ | $n_2$ | $h_1$ | $h_2$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۲۶/۸۷ | ۶/۵۰ | ۰/۹۲ | ۱ | ۴۴ | ۳/۳۹ | ۲/۷۴ | ۰/۵۰ | ۷/۹۶ | ۴۷۸/۰۷ |
| ۰/۵ | ۲۸/۶۲ | ۸/۲۵ | ۰/۸۷ | ۱ | ۲۲ | ۱/۸۸ | ۱/۲۴ | ۰/۵۰ | ۲/۷۷ | ۳۵۵/۸۸ |
| ۰/۷۵ | ۱۸/۸۲ | ۸/۹۸ | ۰/۸۰ | ۳ | ۱۳ | ۱/۶۰ | ۰/۸۹ | ۰/۵۰ | ۱/۶۷ | ۲۰۸/۳۴ |
| ۱ | ۳۰/۲۰ | ۸/۷۴ | ۲/۴۶ | ۶ | ۸ | ۱/۳۳ | ۰/۲۱ | ۰/۴۴ | ۱/۱۱ | ۲۷۹/۹۸ |
| ۱/۲۵ | ۳۱/۰۷ | ۹/۶۰ | ۲/۴۶ | ۴ | ۷ | ۱/۰۹ | ۰/۱۷ | ۰/۳۵ | ۰/۸۶ | ۲۶۰/۹۸ |
| ۱/۵ | ۱۶/۴۴ | ۱۱/۹۰ | ۰/۸۸ | ۳ | ۶ | ۱/۱۷ | ۰/۵۶ | ۰/۲۰ | ۰/۸۳ | ۲۴۹/۱۱ |
| ۱/۷۵ | ۱۵/۵۹ | ۱۲/۵۴ | ۰/۹۸ | ۲ | ۵ | ۱/۰۴ | ۰/۵۰ | ۰/۱۶ | ۰/۷۲ | ۲۳۹/۴۰ |
| ۲ | ۱۵/۰۲ | ۱۲/۷۸ | ۱/۳۰ | ۲ | ۴ | ۰/۸۰ | ۰/۴۲ | ۰/۱۶ | ۰/۶۳ | ۲۳۱/۸۸ |
| ۲/۲۵ | ۱۵/۰۹ | ۱۳/۸۸ | ۱/۰۳ | ۲ | ۴ | ۰/۹۴ | ۰/۴۴ | ۰/۱۰ | ۰/۵۷ | ۲۲۶/۵۵ |
| ۲/۵ | ۳۴/۹۹ | ۱۴/۶۲ | ۰/۸۷ | ۲ | ۴ | ۱/۰۷ | ۰/۴۵ | ۰/۰۷ | ۰/۵۷ | ۲۲۳/۴۴ |
| ۲/۷۵ | ۱۴/۸۹ | ۱۴/۴۳ | ۱/۲۹ | ۱ | ۳ | ۰/۷۴ | ۰/۳۶ | ۰/۱۰ | ۰/۵۰ | ۲۱۷/۵۹ |
| ۳ | ۱۵/۲۸ | ۱۵/۲۸ | ۱/۱۵ | ۱ | ۳ | ۰/۸۱ | ۰/۳۷ | ۰/۰۷ | ۰/۴۶ | ۲۱۴/۷۷ |



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

**جدول ٤.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی ESD نمودار کنترل VSIC

| d | $k_1$ | $k_2$ | w | $n_0$ | $h_1$ | $h_2$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۷/۳۹ | ۶/۷ | ۱/۵۷ | ۳۷ | ۳/۷۲ | ۲/۴۹ | ۰/۵ | ۸/۵۷ | ۵۱۴/۹۱ |
| ۰/۵ | ۹/۳۷ | ۸/۰۴ | ۲/۶۹ | ۱۸ | ۱/۹۵ | ۰/۷ | ۰/۵ | ۲/۶۷ | ۳۷۵/۰۲ |
| ۰/۷۵ | ۱۰ | ۸/۵۶ | ۳/۲۳ | ۱۱ | ۱/۳۵ | ۰/۴۳ | ۰/۵ | ۱/۴۳ | ۳۱۵/۴۳ |
| ۱ | ۱۱ | ۹/۲۱ | ۳/۵۴ | ۷ | ۱/۰۳ | ۰/۲۶ | ۰/۴۴ | ۱/۰۱ | ۲۸۲/۷۱ |
| ۱/۲۵ | ۱۱/۹۸ | ۹/۸۵ | ۳/۸۱ | ۵ | ۰/۸۳ | ۰/۱۸ | ۰/۳۵ | ۰/۷۷ | ۲۶۱/۷۸ |
| ۱/۵ | ۱۲/۸۵ | ۱۰/۸۴ | ۴/۸۱ | ۵ | ۰/۷۸ | ۰/۲۲ | ۰/۲ | ۰/۶ | ۲۴۶/۲۵ |
| ۱/۷۵ | ۱۳/۴۷ | ۱۱/۳۳ | ۵/۱۳ | ۴ | ۰/۷ | ۰/۱۸ | ۰/۱۶ | ۰/۵۱ | ۲۳۵/۵۳ |
| ۲ | ۱۳/۸۸ | ۱۱/۵ | ۵/۰۸ | ۳ | ۰/۶۱ | ۰/۱۳ | ۰/۱۶ | ۰/۴۵ | ۲۲۷/۹۲ |
| ۲/۲۵ | ۱۴/۵۳ | ۱۲/۳۶ | ۶ | ۳ | ۰/۶ | ۰/۱۶ | ۰/۱ | ۰/۴ | ۲۲۱/۷۷ |
| ۲/۵ | ۱۵/۲۸ | ۱۳/۳۵ | ۹/۹۶ | ۳ | ۰/۵۹ | ۰/۲ | ۰/۰۷ | ۰/۳۶ | ۲۱۷/۸۵ |
| ۲/۷۵ | ۱۵/۰۷ | ۱۲/۶۳ | ۶/۰۲ | ۲ | ۰/۵۱ | ۰/۱۱ | ۰/۱ | ۰/۳۴ | ۲۱۲/۸۷ |
| ۳ | ۱۵/۶۵ | ۱۳/۴ | ۶/۸۴ | ۲ | ۰/۵۱ | ۰/۱۴ | ۰/۰۷ | ۰/۳۱ | ۲۰۹/۷۶ |

**جدول ٥.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی **ESD** نمودار کنترل **VSSC**

| d | $k_1$ | $k_2$ | w | $n_1$ | $n_2$ | $h_0$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۱۶/۸۷ | ۶/۵ | ۰/۹ | ۱ | ۴۳/۴ | ۲/۸۴ | ۰/۵ | ۷/۹۳ | ۴۸۰/۱۶ |
| ۰/۵ | ۱۸/۶۲ | ۸/۲۴ | ۰/۸۷ | ۱ | ۲۱/۱۷ | ۱/۳۴ | ۰/۵ | ۲/۷۶ | ۳۵۶/۶۷ |
| ۰/۷۵ | ۱۹/۳۱ | ۹/۰۵ | ۰/۶۷ | ۱ | ۱۲/۲۹ | ۰/۹۹ | ۰/۵ | ۱/۶۵ | ۳۰۷/۷۹ |
| ۱ | ۲۰/۲ | ۹/۸۲ | ۰/۸۸ | ۱ | ۸/۱۷ | ۰/۷۶ | ۰/۴۴ | ۱/۲۱ | ۲۷۹/۹۴ |
| ۱/۲۵ | ۲۱/۰۷ | ۱۰/۵۸ | ۱/۰۴ | ۱ | ۶/۰۱ | ۰/۶۳ | ۰/۳۵ | ۰/۹۷ | ۲۶۱/۶۴ |
| ۱/۵ | ۲۱/۰۷ | ۱۱/۷۶ | ۱/۰۳ | ۱ | ۶ | ۰/۶۶ | ۰/۲ | ۰/۷۶ | ۲۴۸/۱۹ |
| ۱/۷۵ | ۱۸/۰۱ | ۱۲/۲۹ | ۱/۲۴ | ۱ | ۵ | ۰/۶ | ۰/۱۶ | ۰/۶۶ | ۲۳۸/۹۶ |
| ۲ | ۱۶/۱۹ | ۱۲/۴۹ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۲ | ۰/۱۶ | ۰/۵۹ | ۲۳۲/۲۶ |
| ۲/۲۵ | ۱۵ | ۱۳/۷۲ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۴ | ۰/۱ | ۰/۵۳ | ۲۲۷/۴۱ |
| ۲/۵ | ۱۴/۹۹ | ۱۴/۹۹ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۵ | ۰/۰۷ | ۰/۴۹ | ۲۲۴/۴۷ |
| ۲/۷۵ | ۱۴/۵۴ | ۱۴/۵۴ | ۲/۴۳ | ۱ | ۳ | ۰/۴۶ | ۰/۱ | ۰/۴۷ | ۲۱۹/۶۱ |
| ۳ | ۱۵/۲۸ | ۱۵/۲۸ | ۲/۴۳ | ۱ | ۳ | ۰/۴۷ | ۰/۰۷ | ۰/۴۴ | ۲۱۷/۱۸ |

**جدول ٦.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی **ESD** نمودار کنترل **VSS**

| d | $k_0$ | w | $n_1$ | $n_2$ | $h_0$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۶/۸۷ | ۰/۳۸ | ۱ | ۳۸/۷۹ | ۲/۸۴ | ۰/۵ | ۸/۶۷ | ۴۸۵/۴۲ |
| ۰/۵ | ۸/۶۲ | ۰/۷۱ | ۱ | ۲۰/۳۵ | ۱/۳۴ | ۰/۵ | ۳ | ۳۵۹/۸۹ |
| ۰/۷۵ | ۹/۳۱ | ۰/۵۶ | ۱ | ۱۲ | ۰/۹۹ | ۰/۵ | ۱/۷۴ | ۳۰۹/۱۴ |
| ۱ | ۱۰/۲ | ۰/۷۹ | ۱ | ۸ | ۰/۷۶ | ۰/۴۴ | ۱/۲۹ | ۲۸۱/۳۷ |
| ۱/۲۵ | ۱۱/۰۷ | ۱/۰۳ | ۱ | ۶ | ۰/۶۳ | ۰/۳۵ | ۱/۰۳ | ۲۶۲/۹۷ |
| ۱/۵ | ۱۲/۲۳ | ۱/۰۳ | ۱ | ۶ | ۰/۶۶ | ۰/۲ | ۰/۷۸ | ۲۴۸/۶۸ |
| ۱/۷۵ | ۱۲/۸۶ | ۱/۲۴ | ۱ | ۵ | ۰/۶ | ۰/۱۶ | ۰/۶۸ | ۲۳۹/۲۹ |
| ۲ | ۱۳/۱۸ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۲ | ۰/۱۶ | ۰/۶۱ | ۲۳۲/۵۲ |
| ۲/۲۵ | ۱۴/۰۷ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۴ | ۰/۱ | ۰/۵۴ | ۲۲۷/۴۴ |
| ۲/۵ | ۱۴/۹۹ | ۱/۶۱ | ۱ | ۴ | ۰/۵۵ | ۰/۰۷ | ۰/۴۹ | ۲۲۴/۴۷ |
| ۲/۷۵ | ۱۴/۵۴ | ۲/۴۳ | ۱ | ۳ | ۰/۴۶ | ۰/۱ | ۰/۴۷ | ۲۱۹/۶۱ |
| ۳ | ۱۵/۲۸ | ۲/۴۳ | ۱ | ۳ | ۰/۴۷ | ۰/۰۷ | ۰/۴۴ | ۲۱۷/۱۸ |



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

**جدول ۷.** پارامترهای بهینه‌ی طراحی **ESD** نمودار کنترل **VSI**

| d | $k_0$ | w | n | $h_1$ | $h_2$ | ANF | AATS | E(A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۲۵ | ۶/۸۷ | ۱/۴۷ | ۳۷ | ۴/۱۴ | ۲/۳۸ | ۰/۵ | ۸/۵۶ | ۵۱۵/۱ |
| ۰/۵ | ۸/۶۲ | ۲/۴۶ | ۱۸ | ۲/۱ | ۰/۶۶ | ۰/۵ | ۲/۶۸ | ۳۷۵/۷۲ |
| ۰/۷۵ | ۹/۳۱ | ۲/۹۹ | ۱۱ | ۱/۴۲ | ۰/۴۱ | ۰/۵ | ۱/۴۴ | ۳۱۵/۹۳ |
| ۱ | ۱۰/۲ | ۳/۲۸ | ۷ | ۱/۰۸ | ۰/۲۴ | ۰/۴۴ | ۱/۰۱ | ۲۸۳/۲۴ |
| ۱/۲۵ | ۱۱/۰۷ | ۳/۵۱ | ۵ | ۰/۸۷ | ۰/۱۷ | ۰/۳۵ | ۰/۷۸ | ۲۶۲/۳۳ |
| ۱/۵ | ۱۲/۲۳ | ۴/۵۴ | ۵ | ۰/۸ | ۰/۲۱ | ۰/۲ | ۰/۶ | ۲۴۶/۵۶ |
| ۱/۷۵ | ۱۲/۸۶ | ۴/۸۷ | ۴ | ۷۱.۰ | ۰/۱۷ | ۰/۱۶ | ۰/۵۱ | ۲۳۵/۸ |
| ۲ | ۱۳/۱۸ | ۴/۸ | ۳ | ۰/۶۲ | ۰/۱۳ | ۰/۱۶ | ۰/۴۵ | ۲۲۸/۲۱ |
| ۲/۲۵ | ۱۴/۰۷ | ۵/۷۷ | ۳ | ۰/۶۱ | ۰/۱۶ | ۰/۱ | ۰/۴ | ۲۲۱/۹۲ |
| ۲/۵ | ۱۴/۹۹ | ۶/۷۷ | ۳ | ۰/۵۹ | ۰/۲ | ۰/۰۷ | ۰/۳۶ | ۲۱۷/۹۲ |
| ۲/۷۵ | ۱۴/۵۴ | ۵/۷۹ | ۲ | ۰/۵۲ | ۰/۱۱ | ۰/۱ | ۰/۳۴ | ۲۱۳/۰۴ |
| ۳ | ۱۵/۲۸ | ۶/۶۴ | ۲ | ۰/۵۱ | ۰/۱۳ | ۰/۰۷ | ۰/۳۱ | ۲۰۹/۸۶ |

## منابع


[1] Mason, R. L. Young, J. C., (2002). Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, ASA-SIAM.

[2] Lowry, C. A. Montgomery, D. C., (1995). A review of multivariate control charts, IIE Transactions, 27, 800-810.

[3] Tagaras, G. (1998). A Survey of Recent Development in the Design of Adaptive Control Charts, Journal of Quality Technology, 30, 212-231.

[4] Prabhu, S. S., Runger, G. C., Keats, J. B. (1993). International Journal of Production Research, $\overline{X}$ chart with adaptive sample sizes, 31, 2895-2909.

[5] Costa, A. F. B., (1997). X charts with variable sample sizes and sampling intervals, Journal of Quality Technology, 29, 197–204.

[6] Aparisi, F., (1996). Hotelling's $T^2$ control chart with adaptive sample sizes, International Journal of Production Research, 34, 2853-2862.

[7] Aparisi, F., Haro, C. L., (2001). Hotelling's $T^2$ control chart with sampling intervals, International Journal of Production Research, 39, 3127–3140.

[8] Aparisi, F., Haro, C. L., (2003). A comparison of $T^2$ control charts with variable sampling schemes as opposed to MEWMA chart, International Journal of Production Research, 41, 2169–2182.

[9] Faraz, A., Parsian, A., (2006). Hotelling's $T^2$ Control chart with Double Warning Lines, Journal of Statistical Papers, 47, 569-593.

[10] Faraz, A., Moghadam, M. B., (2008). Hotelling's $T^2$ Control Chart with Two-State Adaptive Sample Size. Quality & Quantity, International Journal of methodology.

[11] Faraz, A., Chalaki, K., Moghadam, M. B., (2010). on the properties of the Hotelling's $T^2$ Control Chart with variable sampling intervals. Quality & Quantity, International Journal of methodology,

[12] Chen, Y. K., Chiou, K. C., (2005). Optimal design of VSI $\overline{X}$ control charts for monitoring correlated sample, Quality and Reliability Engineering International, 21, 757–768.

[13] Klatt, P. J., Montgomery, D. C., (1972). Economic Design of $T^2$Control Charts to Maintain Current Control of a Process. Management Science, 19, 76-89.

[14] Taylor, H. M., (1965). Markovian sequential replacement processes. Annals of Mathematical Statistics, 36, 13–21.

[15] Chen, Y. K., (2006), Economic design of variable sampling interval $T^2$ control charts– A hybrid Markov chain approach with genetic algorithms. Expert Systems with Applications.

[16] Chou, C. Y., Chen, C. H., Liu, H. R., (2006). Economic Design of EWMA Charts with Variable Sampling Intervals. Quality & Quantity, 40,879–896.

[17] Woodall, W. H., (1986). Weakness in the Economic Design of Control Charts. Technometrics, 28, 408-409.




[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]

[18] Saniga, E. M., (1989). Technometrics, Economic Statistical Design of Control Charts with an Application of $\overline{X}$ and R Charts, 31, 313-320.
[19] Torabian, M., Seif, A., Faraz, A., (2010). Statistical design of variable sampling ratio multivariate $T^2$ control charts using genetic algorithms, Journal of Applied Mathematics, 22, 77-89.
[20] Seif, A., Faraz, A., Moghadam, M. B., Heuchenne, C., (2011). Statistical merits and economic evaluation of $T^2$ control chart with the VSSC scheme. Arabian Journal for Science and Engineering 36, 1461–1470.
[21] Seif, A., Faraz, A., Saniga, E., Heuchenne, C., Moghadam, M. B., (2011). A modified economic-statistical design of the $T^2$ control chart with variable sample sizes and control limits. Journal of Applied Statistics.
[22] Cinlar, E., (1975). Introduction to stochastic Process, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
[23] Holland, J. H., (1975). Adaptation in nature and artificial system, Ann Arbor, Michigan, USA: The University of Michigan Press.
[24] Goldberg, D. E., (1989). Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning Reading, Addison-Wesley, MA.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2026-01-30 ]