مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره چهارم (پیاپی ۷۹)،زمستان ۰۲، ص ص ۱۰۶-۹۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدل‌سازی بازی‌های تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی مبتنی‌بر دینامیک‌های تکراری

محمد برشان[۱]، مجید یاراحمدی[۲]*، مجتبی قاسمی کمالوند[۳]

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

۲- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

۳- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

رسید مقاله: ۱۲ فروردین ۱۴۰۲

پذیرش مقاله: ۴ شهریور ۱۴۰۲

چکیده

در نظریه بازی‌های تکاملی مبتنی‌بر تئوری تکامل، یک روش جهت تجزیه و تحلیل بازی‌ها و استخراج استراتژی‌ها ارایه می‌گردد. در بازی‌هایی که بازیکنان دارای استراتژی‌های درهم‌تنیده هستند، روش‌های کلاسیک کارایی مناسب را ندارند. زیرا در این‌گونه از بازی‌ها، پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی متاثر از عامل درهم‌تنیدگی می‌باشد. بنابراین برای مدل‌سازی و تجزیه و تحلیل این بازی‌ها باید از روش‌های کوانتومی استفاده نمود. در این مقاله یک روش تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی برای مدل‌سازی و استخراج استراتژی‌ها در بازی‌های با عامل درهم‌تنیدگی ارایه شده است و در نهایت، بازی معمای زندانی به‌منظور نشان دادن برتری روش تکاملی کوانتومی به‌روش تکاملی کلاسیک شبیه‌سازی شده است.

کلمات کلیدی: نظریه بازی‌ها، استراتژی، بازی‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی.

۱ مقدمه

نظریه بازی‌ها، در سال ۱۹۴۴ توسط جان فون نیومن و اسکار مورگنسترن برای تحلیل رفتارهای اقتصادی معرفی شد. این نظریه تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک را مدل‌سازی نموده و به‌کمک مجموعه‌ای از ابزار تحلیلی روشی برای تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری در شرایط تقابل منافع بازیگران ارایه دهد[۱]. این مدل‌سازی شامل مجموعه بازیکنان، استراتژی‌های ممکن برای هر بازیکن و ماتریس پیامد بازیکنان است که براساس آن بازیکنان، استراتژی مناسب را انتخاب نموده و در نهایت در تعادل نش پیامدهای حاصل از برآیند انتخاب‌های استراتژیک بازیکنان بین آنها تقسیم می‌شود[۲]. امروزه نظریه بازی‌ها با سرعتی شگفت‌آوری در زمینه‌های مختلف در حال توسعه و پیشرفت است. نظریه بازی‌های تکاملی را می‌توان نمونه‌ای از این پیشرفت دانست که گسترش بهره‌گیری از آن بیان‌کننده تحولی در ابزارهای مورد استفاده متخصصان نظریه بازی‌ها، در

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: yarahmadi.m@lu.ac.ir

[DOI: 10.22034/20.4.95]

سال‌های اخیر نسبت به نظریه بازی‌های غیرتکاملی است[۳] این تحول از چند حقیقت نشات گرفته، ابتدا اینکه تکامل در این نظریه صرفا تکامل بیولوژیک نیست بلکه می‌تواند شامل مفهومی معادل تکامل در نگرش نیز باشد که در نهایت منجر به تغییر در سیاست‌ها و استراتژی‌ها می‌شود، از طرف دیگر نظریه بازی‌های تکاملی امکان مدل‌سازی پدیده یادگیری را با استفاده از بازی‌های چند مرحله‌ای فراهم نموده است، به‌گونه‌ای که بعد از هر مرحله جمعیت‌های متناظر با استراتژی‌های بازیکنان توانایی بازنگری استراتژی خود را به‌منظور حداکثرسازی پیامدهای بازی خواهند داشت، در حالی‌که نظریه بازی‌های غیرتکاملی از این ویژگی مهم بی‌بهره است. همچنین حل بسیاری از بازی‌ها ما را به تعدادی تعادل نش مخلوط و خالص می‌رساند. لذا، این‌که بازیکنان میان این استراتژی‌های تعادلی همواره کدام را انتخاب می‌کنند، خود مساله‌ای است که در نظریه بازی‌های غیرتکاملی برای آن راه حلی ارایه نمی‌شود. اما نظریه بازی‌های تکاملی می‌تواند با مدل کردن روند رسیدن به تعادل، با استفاده از دینامیک‌های تکراری، راه‌حلی برای این نوع بازی‌ها ارایه دهد. در نهایت این‌که نظریه بازی‌های تکاملی، یک نظریه پویاست که در آن بازیکنان و استراتژی‌های آنها متناسب با جمعیت بازیکنان شبیه‌سازی‌شده و برازندگی استراتژی‌های مختلف نسبت به جمعیت محاسبه‌شده و فرایندی برای کنترل روند تکامل جمعیت ارایه داده می‌شود[۵،۴]. توسعه اصلی در نظریه بازی‌های تکاملی توسط مانیارد اسمیت در سال ۱۹۸۲ انجام گرفت[۶]. در سال ۱۹۸۷ کار او توسط بردن وینسنت در بازی‌های پیوسته، با بیان تعریفی از استراتژی‌های پایدار تکاملی برحسب ائتلاف چند استراتژی گسترش یافت. در سال ۲۰۱۸ فرناندو سانتوس و همکارانش نظریه بازی‌ها تکاملی را برای مسیریابی خودروهای الکتریکی به‌کار گرفتند. همچنین مرضیه خاکستری و همکارانش در سال ۱۳۹۷ تحلیل رفتار اوپک را با رویکرد نظریه بازی‌ها تکاملی مورد مطالعه قرار دادند. اقتصاددانان و ریاضی‌دانان دیگری نیز نظریه بازی‌های تکاملی را به‌صورت نظری بررسی نموده‌اند که از جمله می‌توان به ویبول (۱۹۹۵)، گاردونذر (۱۹۹۶)، لامرلسان (۱۹۹۷)، هوفبار و سیگموند (۱۹۹۸) و گینتیز (۲۰۰۹) اشاره نمود. بررسی نظریه بازی‌های تکاملی از دیدگاه مکانیک و محاسبات کوانتومی یکی از کاربردهای جذاب نظریه بازی‌های کوانتومی است که در آن با استفاده از فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی به بررسی وضعیت‌های متعارضی که شامل پدیده‌های کوانتومی مانند درهم‌تنیدگی هستند، پرداخته می‌شود. متاسفانه علی‌رغم این‌که ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰ میلادی نظریه مکانیک کوانتومی را ارایه نمـود، ولی تاکنون مطالب چندانی از کاربرد آن در نظریه بازی‌های تکاملی بیان نشده است. نظریه مکانیک کوانتومی، شاخه‌ای از فیزیک نظری است که در مقیاس اتمی و زیراتمی به‌جای مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیک به‌کار می‌رود. ویژگی‌های مهمی مانند منطبق شدن برحالات اولیه، درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات اولیه و برهم‌نهی استراتژی‌ها، نظریه بازی‌های تکاملی کوانتومی را از نظریه بازی‌های تکاملی کلاسیک متمایز می‌کند. دراین مقاله یک مدل تکاملی کوانتومی برای بازی‌ها با استراتژی‌های درهم‌تنیده ارایه می‌شود. زیرا، در این‌گونه از بازی‌ها روش‌های تکاملی کلاسیک به دلیل متاثر بودن پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی از عامل درهم‌تنیدگی کارآیی مناسب را ندارند. به‌همین منظور ابتدا استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان به استراتژی‌های کوانتومی، که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند، تبدیل‌شده سپس ماتریس پیامد بازیکنان به‌کمک استراتژی‌های کوانتومی محاسبه و با استفاده از این ماتریس، دینامیک‌های

[DOI: 10.22034/20.4.95]

تکراری کوانتومی بازیکنان استخراج شده است. در این روش، به کمک دینامیک‌های تکراری فرایند تکامل جمعیت‌هایی که استراتژی‌های خاصی را به‌کار می‌گیرند بررسی می‌شوند. در پایان، به‌منظور نشان دادن برتری روش تکاملی کوانتومی به‌روش تکاملی کلاسیک، بازی معمای زندانی با این روش شبیه‌سازی، مقایسه و تحلیل شده است.

این مقاله در ۷ بخش ارایه شده است. بخش ۲ شامل نظریه بازی‌های تکاملی و مهم‌ترین مفاهیم و معادلات آن است. در بخش ۳ مقدماتی در مورد مکانیک کوانتومی ارایه شده است و در ادامه آن نظریه بازی‌های کوانتومی توضیح داده‌شده است. در بخش ۴ به طراحی بازی‌های تکاملی کوانتومی و بیان معادلات آن پرداخته می‌شود. در بخش‌های ۵ و ۶ با مدل‌سازی بازی معمای زندانی در دو حالت کونتومی و کلاسیک، نتایج شبیه‌سازی ارایه و مقایسه گردیده است. در پایان نتیجه‌گیری این مقاله در بخش ۷ بیان گردیده است.

۲ نظریه بازی‌های تکاملی

نظریه بازی‌های تکاملی شاخه‌ای از نظریه بازی‌ها است، که در آن جمعیت بازیکنان با استفاده از استراتژی‌های مختلف شبیه‌سازی می‌شوند[۷]. سپس برای تعیین چگونگی تکامل جمعیت، از فرایندی شبیه به انتخاب طبیعی استفاده می‌شود. به‌طور دقیق یک بازی با nبازیکن را در نظر بگیرید، که در آن بازیکن iام دارای فضای استراتژی S_iاست. درگام اول متناظر با هر بازیکن جمعیتی از بازیکنان مدل‌سازی می‌شود. سپس جمعیت مربوط به بازیکن iام به زیرجمعیت‌های E_{i1}، E_{i2}، ...، E_{ik} تقسیم می‌شود(kممکن است برای هر جمعیت متفاوت باشد). اعضای زیرجمعیت E_{ik}استراتژی یکسانی را از S_i انتخاب می‌کنند. در گام بعدی زیرجمعیت‌ها به‌طور تصادفی با یکدیگر بازی می‌کنند. در این فرآیند، زیرجمعیت‌هایی که عملکرد بهتری را در مقایسه با سایر زیرجمعیت‌های دیگر دارند بزرگ‌تر و زیرجمعیت‌هایی که عملکرد خوبی ندارند، کوچک‌تر می‌شوند[۷]. این روند تا رسیدن به یک استراتژی پایدار که احتمالا بهترین پاسخ استراتژی را برای هر بازیکن نشان می‌دهد، تکرار می‌شود.

۲-۱ استراتژی‌های پایدار تکاملی

استراتژی هر بازیکن، نشان‌دهنده برنامه عمل آن بازیکن در بازی با سایر بازیکنان می‌باشد. در بازی‌های تکاملی، متناظر با مجموعه استراتژی‌های بازیکن $S_i=\{s_{i1},s_{i2},...,s_{im}\}$ بردار احتمال $\vec{x}_i$ در نظر گرفته می‌شود که مولفه jام آن، x_{ij} احتمال انتخاب استراتژی s_{ij} توسط بازیکن iام می‌باشد.

[DOI: 10.22034/20.4.95]

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{im} \end{pmatrix} \; s.t \quad x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{im} = 1 \qquad (۱)$$

بردار استراتژی $\overrightarrow{S^*}$، در بازی تکاملی متقارن با ماتریس پیامد A، یک استراتژی پایدار تکاملی است، اگر برای همه استراتژی‌هایی که $\vec{S} \neq \overrightarrow{S^*}$در شرط زیر صدق کند:

$$\overrightarrow{S^T} A \overrightarrow{S^*} \leq \overrightarrow{S^{*T}} A \overrightarrow{S^*} \qquad (۲)$$

واضح است که هر استراتژی مطابق با این ویژگی نیز تعادل نش است [۱۰،۹].

۲-۲ دینامیک‌های تکراری

فرایند انتخابی که تعیین می‌کند جمعیت‌هایی که استراتژی‌های خاصی را به‌کار می‌گیرند چگونه تکامل پیدا می‌کنند، به‌عنوان دینامیک‌های تکراری شناخته می‌شوند. مدل‌های کمی متفاوتی برای این دینامیک‌ها وجود دارد[۱۲،۱۱]. به‌طور کلی دو رویکرد در نظریه بازی تکاملی وجود دارد. رویکرد اول که در بیشتر طول حیات این نظریه رایج بوده، رویکرد مینارد اسمیت و جان پرایس است، عبارت است از تعریف یک استراتژی پایدار تکاملی که بازی را در یک حالت پایدار و ایستا در نظر می‌گیرد و سعی می‌کند خصوصیات این حالت محاسبه و بررسی شود. در رویکرد دوم، که در این مقاله از آن استفاده شده است، مدلی ساخته می‌شود که در آن دینامیک‌های تکراری نحوه تغییر جمعیت‌ها را در طول زمان توصیف می‌کند. در این مدل، تغییر در جمعیت نماینده هر استراتژی در طول زمان بررسی می‌شود و در نهایت نیز در صورت وجود، به حالتی ایستا می‌رسیم که در رویکرد اول به‌دنبال آن می‌گشتیم. اما قبل از تعریف دینامیک تکراری، توضیح مفهوم برازندگی لازم است. تابع برازندگی مشخص می‌کند هر مجموعه از بازیکنان چقدر موفق است و براساس رابطه $f_j(\overrightarrow{x_i}) = (A_i x_i)_j$ برای هر مولفه بردار $\overrightarrow{x_i}$ تعریف می‌شود. همچنین میانگین برازندگی برای مجموعه بازیکنان با رابطه $f(\vec{x}) = \overrightarrow{x_i}^t A_i \overrightarrow{x_i}$ معرفی می‌شود. در نهایت باتوجه به تعریف میانگین برازندگی تحت ماتریس پیامد A_i دینامیک‌های تکراری برای بازی‌های متقارن به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۱۰].

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij}(t)\left((A_i \overrightarrow{x_i})_j - \overrightarrow{x_i}^t A_i \overrightarrow{x_i}\right) \qquad i = 1,\ldots,n \;\; ; \; j = 1,\ldots,m \qquad (۳)$$

هرگاه بازی به‌صورت نامتقارن باشد دینامیک‌های تکراری به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[۱۰]:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij}(t)\left((A_i \overrightarrow{x_k})_\nabla - \overrightarrow{x_i}^t A_i \overrightarrow{x_k}\right) \qquad i,k = 1,\ldots,n \;\; ; \; i \neq k \qquad (۴)$$

که در آن، x_i و A_i به ترتیب بردارها و ماتریس‌های متناظر با استراتژی‌ها و ماتریس پیامد بازیکنان هستند و نماد ∇ مجموع مولفه‌های بردارهای $A_i \vec{x}_k$ می‌باشد.

[DOI: 10.22034/20.4.95]

۳ مکانیک کوانتومی

مکانیک کوانتومی، شاخه‌ای بنیادی از فیزیک است که در مقیاس اتمی و زیراتمی به‌جای مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیک به‌کار می‌رود. در مکانیک کوانتومی حالت سیستم با یک بردار در فضای هیلبرت مشخص می‌شود، این بردار توسط یک عملگر یکانی در طول زمان تحول می‌یابد و با اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر، این بردار به بردارهای ویژه عملگر متناظر با آن مشاهده‌پذیر تصویر می‌شود. به‌طور کلی مکانیک کوانتومی دارای ماهیت احتمالی است. تلاش‌های زیادی برای حذف مفهوم احتمال از آن شده است، اما نتایج تحقیقات نشان داد که مکانیک کوانتومی در طبیعت خود احتمالی است و نمی‌توان این مفهوم را از آن حذف کرد. یکی از مطالعاتی که در این زمینه انجام شد تحقیقات دوچ است[۱۳].

برهم‌نهی: حالت‌های یک سیستم کوانتومی را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. قاعده‌های ترکیب حالت‌های کوانتومی را می‌توان به صورت جمع و تفریق بردارها بیان کرد. به این ترکیب حالت‌های کوانتومی برهم‌نهی گفته می‌شود[۱۴].

درهم‌تنیدگی: درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از پدیده‌های سیستم‌های کوانتومی است که می‌تواند میان دو ذره که نسبت به هم فاصله دارند ارتباط ایجاد کند. هنگامی که دو سیستم کوانتومی با یکدیگر برهم‌کنش انجام می‌دهند، برخی درهم‌تنیدگی بین هردوی آنها برقرار می‌شود. این ارتباط حتی زمانی که تعامل بین دو سیستم از بین می‌رود و دو سیستم از یکدیگر جدا هستند نیز، ادامه پیدا می‌کند. به‌بیان دیگر هر نوع تغییر در یکی از سیستم‌ها بلافاصله در سیستم دیگر تغییر به‌وجود می‌آورد. به این ویژگی سیستم‌های کوانتومی درهم‌تنیدگی گفته می‌شود[۱۴].

کیوبیت کوانتومی: به هر بیت کوانتومی، یک کیوبیت گفته می‌شود که واحد اصلی اطلاعات کوانتومی و معادل یک حالت کوانتومی $\langle\Psi|$ است که می‌توان آن را به‌صورت برهم‌نهی $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ نشان داد:

$$|\Psi\rangle = \alpha|۰\rangle + \beta|۱\rangle \tag{۵}$$

که در آن α و β در حالت کلی، اعداد مختلط هستند.

هنگامی که مقدار این کیوبیت را در مبنای استاندارد اندازه می‌گیریم، احتمال رویداد $\langle ۰|$ برابر α^2 و احتمال رویداد $\langle ۱|$ برابر β^2 است و رابطه زیر بین α و β برقرار خواهد بود:

$$|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ = ۱ \tag{۶}$$

حالت‌های کوانتومی را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=۰}^{k-۱} \alpha_j |j\rangle \quad ; \quad \alpha_j \in C \quad ; \quad \| |\Psi\rangle \|^۲ = \sum_{j=۰}^{k-۱} |\alpha_j|^۲ = ۱ \tag{۷}$$

مشاهده‌پذیرها: به هر کمیت مشاهده‌پذیر از یک سیستم فیزیکی مانند A، یک عملگر هرمیتی مانند $\hat{A}$ نسبت داده می‌شود، درواقع هر مشاهده‌پذیر یک خاصیت سیستم است که قابلیت اندازه‌گیری دارد.

اندازه‌گیری: هر اندازه‌گیری با استفاده از یک مجموعه از عملگرهای اندازه‌گیری M_i روی مشاهده‌پذیر A به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\{M_i \mid M_i : H \to H ; i = 1,...,m\} \tag{8}$$

که m تعداد نتایج ممکن اندازه‌گیری است و اگر سیستم در حالت $\left|\Psi\right\rangle$ باشد و یک اندازه‌گیری روی مشاهده‌پذیر A انجام شود، آنگاه بعد از اندازه‌گیری، یکی از مقادیر ویژه عملگر $\hat{A}$ مانند a_i با احتمال:

$$P(\mu = a_i) = \langle \Psi | M_i^t M_i | \Psi \rangle \tag{9}$$

به‌دست می‌آید و حالت $\left|\Psi\right\rangle$ بعد از اندازه‌گیری به حالت $\left|\Psi'\right\rangle$ تحول می‌یابد:

$$\left|\Psi'\right\rangle = \frac{\left\langle M_i \mid \Psi \right\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_i^t M_i | \Psi \rangle}} \tag{10}$$

ضرب تانسوری: فرض کنید $T \in L(V)$ تبدیل خطی دلخواهی از فضای V به خودش و $S \in L(W)$ تبدیل خطی دلخواهی از فضای W به خودش باشد. در این‌صورت عملگر $T \otimes S$ از فضای $V \otimes W$ به خودش برای تمامی اعضای فضای ضرب تانسوری $\left|v\right\rangle \otimes \left|w\right\rangle$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} &T \otimes S : V \otimes W \to V \otimes W \\ &(T \otimes S)\left|v\right\rangle \otimes \left|w\right\rangle = \left(T\left|v\right\rangle\right) \otimes \left(S\left|w\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{11}$$

با گسترش خطی $T \otimes S$ روی همه $V \otimes W$ خواهیم داشت که:

$$(T \otimes S)\left(\sum_i c_i \left|v_i\right\rangle \otimes \left|w_i\right\rangle\right) = \sum_i c_i \left(T\left|v_i\right\rangle\right) \otimes \left(S\left|w_i\right\rangle\right) \tag{12}$$

در حالت ماتریسی، ضرب تانسوری ماتریس‌های $A \in C^{m_A \times n_A}$ و $B \in C^{m_B \times n_B}$ به‌صورت $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{13}$$

هر $a_{ij}B$ یک بلوک با مرتبه $m_B \times n_B$ است. بنابراین مرتبه $A \otimes B$ برابر $m_A m_B \times n_A n_B$ است.

۳-۱نظریه بازی‌های کوانتومی

نظریه بازی‌های کوانتومی یکی از گسترش‌های نظریه بازی‌ها مبتنی‌بر سیستم‌های کوانتومی می‌باشد که به بررسی وضعیت‌های متعارضی که در برگیرنده پدیده‌های کوانتومی هستند می‌پردازد. درهم‌تنیدگی کوانتومی حالات اولیه و برهم‌نهی استراتژی‌ها درحالات اولیه دو مفهوم اساسی نظریه بازی کوانتومی هستند، که با لحاظ نمودن این دو مفهوم در مدل بازی می‌توان از پارادایم بازی‌های کلاسیک به پارادایم بازی‌های کوانتومی رسید[۱۵،۱۴]. اولین گام در این مسیر، معرفی استراتژی‌های کوانتومی محض به مثابه استراتژی‌های خالص کلاسیک است. به عبارت دیگر، در بازی‌های کوانتومی فضای کلاسیک استراتژی‌ها جای خود را به فضای استراتژیکی می‌دهد که متشکل از ترکیب خطی استراتژی‌های کلاسیک در فضای هیلبرت است. بنابراین مجموعه استراتژی‌های ممکن برای هر یک از بازیکنان از یک مجموعه شمارش‌پذیر به یک مجموعه شمارش‌ناپذیر گسترش می‌یابد. به‌طور کلی در مکانیک کوانتومی فرض می‌شود که هر پدیده فیزیکی قابل مشاهده (مثل انرژی، موقعیت و...) توسط

[DOI: 10.22034/20.4.95]

یک عملگر خطی هرمیتی توصیف می‌شود. هر اندازه‌گیری مرتبط با پدیده‌های قابل مشاهده یک مقدار ویژه از عملگر متناظر با آن پدیده همراه با احتمال مشاهده آن را تولید می‌کند[۱۶]. این احتمال، احتمال پیامد بازی می‌باشد که به‌وسیله توان دوم قدرمطلق متناظر با مختصات این مقدار ویژه، در تجزیه طیفی بردار حالتی که سیستم را توصیف می‌کند، مشخص می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر در بازی معمای زندانی، D معرف استراتژی عدم‌همکاری و C معرف استراتژی همکاری باشد، استراتژی‌های کوانتومی بازی به‌صورت $Q=\alpha C+\beta D$ تعریف می‌شوند، به‌طوری‌که $|\alpha|^{۲}$ و $|\beta|^{۲}$ به‌ترتیب احتمال انتخاب استراتژی‌های C و D می‌باشند.

٤ طراحی بازی‌های تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی

در روش دوکیوبیتی کوانتومی، ابتدا استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان را به استراتژی‌های کوانتومی که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند تبدیل می‌کنیم. برای این کار بازی‌های کلاسیک را با دو استراتژی C و D درنظر می‌گیریم، این روش به بازی‌ها با استراتژی‌های بیشتر قابل تعمیم است. استراتژی‌های کوانتومی متناظر با استراتژی‌های کلاسیک C و D حالت‌هایی کوانتومی در یک فضای هیلبرت با بردارهای پایه $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ هستند. هر حالت کوانتومی $|\Psi\rangle$ را می‌توان به‌صورت $|\Psi\rangle=\alpha|۰\rangle+\beta|۱\rangle$ یا به‌طور معادل زیر در نظر گرفت:

$$|\Psi\rangle=\left(\cos\frac{\theta}{۲}+e^{-i\alpha}\sin\frac{\theta}{۲}\right) \qquad (۱۴)$$

یا

$$|\Psi\rangle=\left(e^{-i\alpha}\cos\frac{\theta}{۲}\right)|۰\rangle+\left(\sin\frac{\theta}{۲}\right)|۱\rangle \qquad (۱۵)$$

با استفاده از روابط (۱۴) یا (۱۵) استراتژی‌های کوانتومی ماتریس‌های ۲×۲ در فضای حاصلضرب تانسوری هستند که توسط بردارهای پایه $|۰۰\rangle$، $|۰۱\rangle$، $|۱۰\rangle$و $|۱۱\rangle$ تولید می‌شوند، این ماتریس‌ها با نماد U نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸،۱۷،۱۶].

$$\hat{U}(\theta,\alpha)=\begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\frac{\theta}{۲} & \sin\frac{\theta}{۲} \\ -\sin\frac{\theta}{۲} & e^{-i\alpha}\cos\frac{\theta}{۲} \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha\in[۰,\frac{\pi}{۲}] \quad ; \quad \theta\in[۰,\pi] \qquad (۱۶)$$

بازی کوانتومی با یک حالت درهم‌تنیده اولیه $|\Psi\rangle=\hat{J}|۰۰\rangle$ شروع می‌شود، که درآن J یک ماتریس متقارن به‌صورت زیر می‌باشد[۱۸،۱۷،۱۶].

$$\hat{J}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{۲} & ۰ & ۰ & i\sin\frac{\gamma}{۲} \\ ۰ & \cos\frac{\gamma}{۲} & -i\sin\frac{\gamma}{۲} & ۰ \\ ۰ & -i\sin\frac{\gamma}{۲} & \cos\frac{\gamma}{۲} & ۰ \\ i\sin\frac{\gamma}{۲} & ۰ & ۰ & \cos\frac{\gamma}{۲} \end{pmatrix} \qquad (۱۷)$$

[DOI: 10.22034/20.4.95]

پارامتر γ در ماتریس J فاکتوردرهم‌تنیدگی است که درجه درهم‌تنیدگی را تنظیم نموده و همواره مقدار آن به‌صورت $\frac{\pi}{2} \le \gamma \le 0$ می‌باشد. ماتریس π را به‌صورت زیر تعریف نمائید:

$$\pi = \begin{pmatrix} |W_1|^2 & |W_2|^2 \\ |W_3|^2 & |W_4|^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

که درایه‌های آن از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$|W_i\rangle = \hat{J}^* \left(\hat{u}_A \otimes \hat{u}_B\right) \hat{J} |00\rangle \tag{19}$$

که در آن ماتریس J^* ترانهاده ماتریس J می‌باشد و $u_A \otimes u_B$ ضرب تانسوری u_A و u_B است. در نهایت پیامدهای بازی برای بازیکنان A و B به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_A &= I^t E_A \circ \pi I \\ P_B &= I^t E_B \circ \pi I \\ I^t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

که در آن نماد $\circ$ نشان‌دهنده حاصلضرب ماتریسی به‌صورت عنصر به عنصر می‌باشد و همچنین E_A و E_B ماتریس‌های پیامد بازیکنان در حالت کلاسیک هستند. بنابراین دینامیک‌های تکراری کوانتومی برای بازی‌های متقارن به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left((P_i \overrightarrow{x_i})_j - \overrightarrow{x_i}^t P_i \overrightarrow{x_i} \right) \qquad i = A \;\; ; \;\; j = 1,\dots,m \tag{21}$$

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left((P_i \overrightarrow{x_i})_j - \overrightarrow{x_i}^t P_i \overrightarrow{x_i} \right) \qquad i = B \;\; ; \;\; j = 1,\dots,m \tag{22}$$

هرگاه بازی به‌صورت نامتقارن باشد دینامیک‌های تکراری کوانتومی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند که در آنها x_i بردارهای متناظر با استراتژهای بازیکنان و همچنین P_i ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کوانتومی هستند:

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left((P_i \overrightarrow{x_k})_\nabla - \overrightarrow{x_i}^t A_i \overrightarrow{x_k} \right) \qquad i = A \;\; ; \;\; k = B \tag{23}$$

$$\dot{x}_{ij} = x_{ij} \left((P_i \overrightarrow{x_k})_\nabla - \overrightarrow{x_i}^t A_i \overrightarrow{x_k} \right) \qquad i = B \;\; ; \;\; k = A \tag{24}$$

۵ بازی معمای زندانی تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی

معروف‌ترین بازی ابزاری، بازی معمای زندانی است. در این بازی دو مظنون توسط پلیس دستگیر شده‌اند. پلیس باید شواهد کافی برای محکومیت مظنونین جمع‌آوری کند و برای این کار به‌صورت جداگانه از مظنونین بازجویی می‌کند. اگر یکی از مظنونین با پلیس همکاری کند و مظنون دیگر عدم‌همکاری را ترجیح دهد، در این حالت مظنون اول آزاد و دیگری به یک سال حبس محکوم می‌شود. اگر هر دو عدم‌همکاری را در بازجویی انتخاب کنند هر دو مظنون در زندان تنها برای یک ماه حبس خواهند کشید. اما اگر هر دو همکاری کنند باید به مدت ۳ ماه هر مظنون حبس بکشد. هر مظنون باید بین استراتژی‌های همکاری C، عدم‌همکاری D و یا ترکیبی از همکاری و عدم‌همکاری Q یکی را انتخاب کند. با توجه به روش کوانتومی بیان‌شده بازی را با یک حالت درهم‌تنیده اولیه $|\Psi\rangle = \hat{J}|00\rangle$ شروع نموده و با استفاده از روابط (۱۶) تا (۲۰) استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان را

[DOI: 10.22034/20.4.95]

توسط بردارهای پایه $\langle 00|$، $\langle 01|$، $\langle 10|$و $\langle 11|$ در فضای هیلبرت به استراتژی‌های کوانتومی که ماتریس‌های 2×2 در فضای حاصلضرب تانسوری هستند تبدیل می‌کنیم و سپس ماتریس پیامد بازی به کمک استراتژی‌های کوانتومی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود[۱۹،۲۰]:

$$C=\hat{U}(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};D=\hat{U}(\pi,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};Q=\hat{U}(0,\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \tag{۲۵}$$

R	R	S	T	$\mu_{RP}(\gamma)$	$\mu_{RP}(\gamma)$
T	S	P	P	$\mu_{ST}(\gamma)$	$\mu_{TS}(\gamma)$
$\mu_{RP}(\gamma)$	$\mu_{RP}(\gamma)$	$\mu_{ST}(\gamma)$	$\mu_{ST}(\gamma)$	R	R

ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کوانتومی

که در آن مولفه‌های اول هر سطر و مولفه‌های دوم هر ستون ماتریس پیامد به‌ترتیب نشان‌دهنده پیامد بازیکنان Aو B به‌ازای استراتژی‌های C ، D و Q هستند و همچنین:

$$T=5 \quad ; \quad R=3 \quad ; \quad P=2 \quad ; \quad S=1$$

$$\mu_{RP}(\gamma)=R\cos^2\gamma+P\sin^2\gamma \tag{۲۶}$$

$$\mu_{ST}(\gamma)=S\cos^2\gamma+T\sin^2\gamma \tag{۲۷}$$

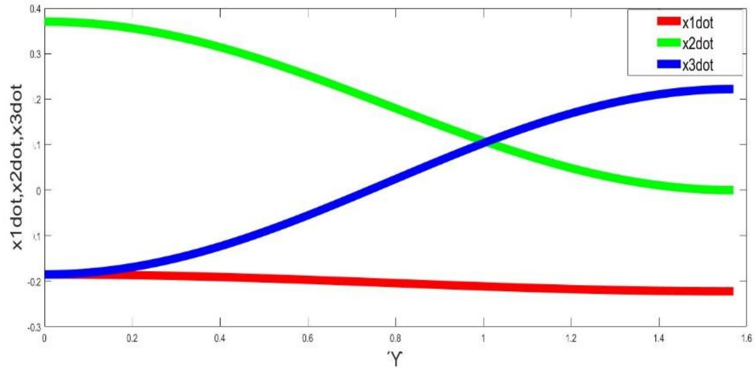
$$\mu_{TS}(\gamma)=T\sin^2\gamma+S\cos^2\gamma \tag{۲۸}$$

با توجه به متقارن بودن بازی، بررسی استراتژی‌هاییک بازیکن برای به‌دست آوردن جواب بازی کافی می‌باشد. بنابراین با استفاده از روابط (۲۱) دینامیک‌های تکراری بازیکن Aبه‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1\big(3x_3\cos^2\gamma+2x_3\sin^2\gamma-6x_1x_3\cos^2\gamma-4x_1x_3\sin^2\gamma\\
&\quad -6x_2x_3\sin^2\gamma-6x_2x_3\cos^2\gamma-3x_3^2-2x_2^2-3x_1^2-6x_1x_2+3x_1+x_2\big)\\
\dot{x}_2 &= x_2\big(5x_1x_3\cos^2\gamma-6x_1x_3\cos^2\gamma-4x_1x_3\sin^2\gamma-6x_2x_3\sin^2\gamma\\
&\quad -6x_2x_3\cos^2\gamma+x_3\sin^2\gamma-3x_3^2-2x_2^2-3x_1^2-6x_1x_2+2x_2\big)\\
\dot{x}_3 &= x_3\big(3x_1\cos^2\gamma+2x_1\sin^2\gamma+x_2\cos^2\gamma+5x_2\sin^2\gamma-6x_1x_3\cos^2\gamma\\
&\quad -4x_1x_3\sin^2\gamma-6x_2x_3\sin^2\gamma-6x_2x_3\cos^2\gamma-3x_3^2-2x_2^2-3x_1^2-6x_1x_2+3x_3\big)
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با توجه به شکل ۱ با افزایش فاکتور درهم‌تنیدگی γ تحت دینامیک‌های تکراری کوانتومی، جمعیتی که استراتژی‌های C و D را انتخاب نموده‌اند به‌شدت کوچک‌ترشده و جمعیتی که استراتژی Q را انتخاب نموده‌اند به‌شدت بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین ترکیب استراتژی کوانتومی (Q,Q) استراتژی پایدار تکاملی برای بازیکنان است که به‌ازای آن پیامد بازی برای هرکدام از بازیکنان به‌صورت $P_A=3$و $P_B=3$ می‌باشد.

[DOI: 10.22034/20.4.95]



شکل ۱. تغییرات جمعیت متناظر بااستراتژی‌های کوانتومی

۶ بازی معمای زندانی تکاملی کلاسیک

همان‌طور که در بخش ۵ بیان شد اگر یکی از مظنونین با پلیس همکاری کند و مظنون دیگر عدم‌همکاری را ترجیح دهد، در این حالت مظنون اول آزاد و دیگری به یک سال حبس محکوم می‌شود. اگر هر دو عدم‌همکاری را در بازجویی انتخاب کنند هر دو مظنون در زندان تنها برای یک ماه حبس خواهند کشید. اما اگر هر دو همکاری کنند باید به مدت ۳ ماه هر مظنون حبس بکشد. در حالت تکاملی کلاسیک هر مظنون برای حداقل رساندن مدت حبس خود می‌تواند استراتژی‌های همکاری C یا عدم‌همکاری D را انتخاب کند، بنابراین ماتریس پیامد بازی در این حالت به‌صورت زیر خواهد بود که مولفه‌های اول هر سطر و مولفه‌های دوم هر ستون آن به‌ترتیب نشان‌دهنده پیامد بازیکن Aو Bبه‌ازای استراتژی‌های C و D می‌باشد.

S,T	R,R
P,P	T,S

ماتریس پیامد بازیکنان در حالت کلاسیک

$$T=5 \quad ; \quad R=3 \quad ; \quad P=2 \quad ; \quad S=1$$

در این بازی نیز هر بازیکن تنها به دنبال حداکثر کردن پیامد خود می‌باشد و با توجه به متقارن بودن بازی بررسی استراتژی‌های یک بازیکن برای به‌دست آوردن جواب بازی کافی است. ماتریس پیامد برای بازیکن A به‌صورت زیر است.

$$A=\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{۳۰}$$

از آنجا که تنها دو استراتژی خالص وجود دارد، می‌توان جمعیتی با دو زیرجمعیت همکاری و عدم‌همکاری را به‌ترتیب با فراوانی xو $1-x$ ایجاد کرد، بنابراین بردار استراتژی‌ها به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} \tag{۳۱}$$

با استفاده از رابطه (۳) دینامیک‌های تکراری به‌صورت زیر خواهد بود:

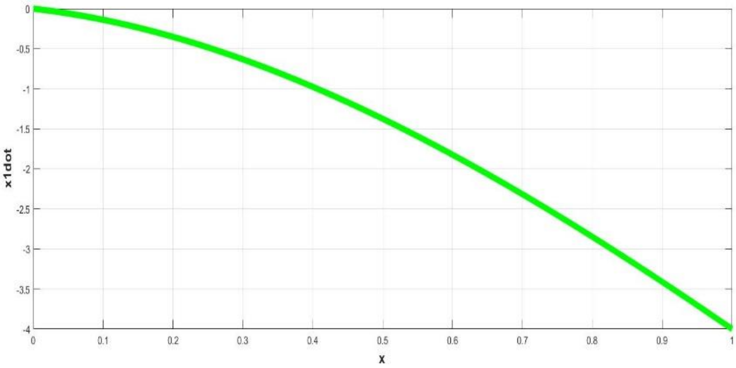
$$\dot{x}_i = x_i(t)\left((A\vec{x})_i - \vec{x}^t A\vec{x}\right) \tag{۳۲}$$

[DOI: 10.22034/20.4.95]

که با توجه به ماتریس Aداریم:

$$\dot{x}_{1} = 3x^{3} - 4x^{2} + x \qquad (33)$$

با توجه به شکل ۲با تغییر x تحت دینامیک‌های تکراری کلاسیک، جمعیتی که استراتژی همکاری را انتخاب نموده‌اند به‌شدت کوچک‌تر شده، بنابراین جمعیتی که عدم‌همکاری را انتخاب نموده‌اند به‌شدت بزرگتر می‌شوند. در نتیجه ترکیب استراتژی عدم‌همکاری (D,D)استراتژی پایدار تکاملی برای بازیکنان است. که به‌ازای آن پیامد بازی برای هرکدام از بازیکنان به‌صورت $P_A = 2$و $P_B = 2$ می‌باشد.



شکل ۲. تغییرات جمعیت متناظر بااستراتژی‌همکاری کلاسیک

۷ نتیجه‌گیری

نظریه بازی‌های تکاملی با ترکیب مفاهیم دینامیک غیرخطی و تئوری بازی‌ها، تجزیه و تحلیل دیگری از بازی‌ها ارایه می‌کند. در این مقاله یک مدل کوانتومی دوکیوبیتی برای بازی‌های تکاملی ارایه گردید و براساس آن استراتژی‌های کلاسیک بازیکنان به استراتژی‌های کوانتومی که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند تبدیل شد. سپس ماتریس پیامد بازیکنان محاسبه و با استفاده از این ماتریس دینامیک‌های تکراری کوانتومی بازیکنان استخراج گردید. مشاهده شد که دینامیک‌های تکراری بازیکنان متاثر از فاکتور درهم‌تنیدگی γ در هر لحظه از بازی با تغییر γ، تغییر خواهند کرد. با این ویژگی، بازی‌های تکاملی کلاسیک دیگر قادر به حل این‌گونه از بازی‌ها نبوده، چراکه در این بازی‌ها پیامد بازیکنان و تعادل نش بازی متاثر از عامل درهم‌تنیدگی می‌باشد، بنابراین به‌منظور حل این نوع از بازی‌ها روش تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی به‌کار گرفته شد و بازی معمای زندانی با دو روش تکاملی کوانتومی دوکیوبیتی و تکاملی کلاسیک شبیه‌سازی گردید و مشاهده شد که در روش تکاملی کوانتومی با تغییر فاکتور درهم‌تنیدگی γ تحت دینامیک‌های تکراری هر کدام از بازیکنان استراتژی کوانتومی را انتخاب نمودند که این انتخاب پیامد بیشتری برای بازیکنان نسبت به روش تکاملی کلاسیک به‌همراه داشت. در پژوهش‌های آتی، می‌توان روش پیشنهادی در این مقاله را به‌طور مشابه در حل انواع مختلفی از مسایل نظریه بازی‌ها ازجمله بازی‌های نامتقارن و بازی‌ها با اطلاعات ناقص به کار برد. به عنوان مثال، از نظریه بازی‌ها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در تحلیل پوششی داده‌ها و ارزیابی عملکرد ترکیبی استفاده شده

[DOI: 10.22034/20.4.95]

است[۲۱،۲۲]، که می‌توان این روش‌ها را، مبتنی بر نظریه بازی‌های تکاملی کوانتمی ارایه‌شده در این مقاله، و با هدف افزایش پیامدها بهبود و تعمیم بخشید.

منابع

[1] Hemati, H., Abrishamchi, A.(2020). Water allocation using game theory under climate change impact (case study: zarinehrood). J. Water Clim. Chang. 1–13. 10.2166/ wcc.2020.153.

[2] H,Dawida . M,Y, Keoula. M, Kopel. P, M. Kort. (2023). Dynamic investment strategies and leadership in product innovation. European Journal of Operational Research. 306 (1), 431-447.

[3] Khatami , S., shakibaee, A. (2017). Analysis of the evolutionary game theory among Iran & Saudi Arabia in the context of genetic algorithm. Quarterly Journal of Economical Modeling, 11(38), 29-56.

[4] Easley D. (2010). Reasoning about a highly connected world. Networks, crowds, and markets. New York, Cambridge University Press.

[5] Olof, L. (2015). Evolutionary game theory in biology. Hammerstein, Peter. Elsevier.

[6] Maynard, S. (1982). Evolution and the theory of games. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[7] Wood, A. D., Mason, C. F., Finnoff, D. (2016). OPEC, the Seven Sisters, and Oil Market Dominance: An evolutionary game theory and agent-based modeling approach. Journal of Economic Behavior and Organization . 132. Part B. 66-78.

[8] Adami, C., Schossau, J., & Hintze, A. (2016). Evolutionary game theory using agent-based Methods, Physics of Life Reviews, 19, 1- 26

[9] Richard, H. (1994). Complex economic dynamics volume. MIT Press, Cambridge MAy.

[10] Cressman, R. (1992). The Stability Cconcept of evolutionary game theory. A dynamic approach. Springer-Verlag, New York.

[11] Hofbauer, J, Sigmund, K. (1998). evolutionary games and replicator dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[12] Weibul, J. (1995). Evolutionary game theory. MIT Press, Cambridge, MA.

[13] Barnum, H., Caves, C.M., Finkelstein, J., Fuch, C.A., Schack, R (1999). Quantum probability from decision theory.

[14] Du, J., Ju, C., Li, H. (2005). Quantum entanglement helps in improving economic efficiency. J. Phys. A Maths Gen. 38, 1559–1565.

[15] Levine, D. (2005). Quantum games have no news for economists.

[16] Eisert, J., Wilkens M., Lewenstein M. (1999). Quantum games and quantum strategies. Phys. Rev.Lett. 83(15), 3077–3080.

[17] Fr¸aiewicz, P., Sladkowski. J. (2016). Quantum approach to Bertrand duopoly. Quantum Inf. Process. 15, 3636–3650.

[18] Alonso-Sanz, R. (2017). Spatial correlated games. R. Soc. Open Sci. 4(6), 171361.

[19] Iqbal, A., Chappell, J.M., Abbott, D. (2016). On the equivalence between non-factorizable mixed-strategy classical games and quantum games. R. Soc. Open Sci. 3, 150477.

[20] Khan, S., Ramzam, M.R., Khan, M.K. (2010). Quantum model of Bertrand duopoly. Chinese Phys. Lett. 27, 080302.

[21] Ashrafi, A., Amiri, M. (2020). Ranking efficient decision making units using cooperative game theory based on SBM input-oriented model and nucleolus value. Journal of Operational Research and Its Applications, 17(1), 68-73.

[22] Hanoomarvar, Y. A., Seyedi, S. H., Rofoogarzade, M., Arasteh ,K. (2022). A model for developing the best strategy combination cased on balanced scorecard, fuzzy net present value and game Theory. Journal of Operational Research and Its Applications, 19(1), 81-97.

[DOI: 10.22034/20.4.95]