

یک روش کارآمد برای انتخاب مسیر قابل اعتماد مقید در شرایط عدم قطعیت

سجاد مرادی^{۱*}، غلامرضا کرمعلی^۲

۱- دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، مهرآباد جنوبی، تهران، ایران

۲- استادیار دانشکده علوم پایه، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، مهرآباد جنوبی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۹ فروردین ۱۳۹۸

پذیرش مقاله: ۲۱ مهر ۱۳۹۸

چکیده

در یک شبکه خطوط مواصلاتی که احتمال مسدود شدن برخی از مسیرها وجود دارد انتخاب یک مسیر قابل اعتماد، به این معنا که احتمال برقراری آن بسیار بالا باشد، یک مساله مهم و کاربردی است. اهمیت و ضرورت این مساله در شرایط بحرانی مانند حوادث طبیعی، سیل و زلزله بسیار پررنگ است. در مساله مسیر قابل اعتماد برقراری یا مسدود شدن هر یک از راههای مواصلاتی روی یک شبکه در شرایط بحرانی، یک پارامتر غیر قطعی است که احتمال آن تخمین زده می شود و بین همه مسیرهایی که دو نقطه مشخص را به هم متصل می کنند، مسیری که بیشترین احتمال برقراری یا بقا را دارد، برگزیده می شود. از آنجا که تصمیم گیری درباره انتخاب مسیرها وابسته به عوامل دیگری مانند مسافت، هزینه یا مدت زمان طی مسیر نیز می باشد، هر کدام از این شاخصها را می توان در قالب قیودی به مساله اضافه کرد. برای مدل سازی مساله ابتدا با در نظر گرفتن احتمال بقای هر کمان مسیر قابل اعتماد به این صورت تعریف می شود که حاصل ضرب احتمال بقای کمانهای آن بیشینه و تا حد امکان به یک نزدیک باشد. سپس برای خطی سازی حاصل ضرب احتمالات ازتابع لگاریتم استفاده شده و مدل مساله به فرم مدل کوتاه ترین مسیر مقید تبدیل می شود. در انتها برای حل مدل ارایه شده الگوریتمی ارایه شده است که در هر تکرار با استفاده از برش های منطقی، مسیرهای غیر بهینه به دست آمده، حذف و به جواب بهین نزدیک تر می شود. نتایج حاصل از پیاده سازی این روش روی شبکه های مختلف با ساختار و اندازه های متفاوت نشان می دهد که الگوریتم ارایه شده قادر است در مدت زمان کمی به مسیری دست یابد که با احتمال بالایی می توان انتظار داشت که در شرایط بحرانی برقرار می ماند و مسافت آن از حد تعیین شده بیش تر نیست.

کلمات کلیدی: شبکه، مسیر قابل اعتماد، مسیر مقید، برش های منطقی، عدم قطعیت.

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: sajadmoradi@aut.ac.ir

۱ مقدمه

مساله انتخاب مسیر بین دو نقطه مشخص روی یک شبکه از خطوط موصلاتی، یک مساله مهم و کاربردی است که به شکل‌های مختلف در زمینه‌هایی مانند حمل و نقل و کنترل پروژه به کار گرفته می‌شود. تصمیم‌گیری در خصوص انتخاب این مسیر وابسته به شاخص‌های مختلفی از جمله مسافت، هزینه و مدت زمان طی مسیر است که به کمک مدل‌سازی ریاضی و در نظر گرفتن یک یا چند شاخص می‌توان مسیر بهینه مساله را تعیین کرد. در یک شبکه موصلاتی مجموعه‌ای از نقاط وجود دارد که به وسیله کمان‌هایی به هم متصل می‌شوند. هر کدام از این کمان‌ها هزینه یا طول مشخصی دارند و معمولاً یافتن کوتاه‌ترین یا کم‌هزینه‌ترین مسیر بین دو نقطه مشخص، مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر تنها شاخص مسافت مدنظر قرار گیرد، مساله کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه شکل خواهد گرفت که روش‌های حل بسیاری با پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای برای آن ارایه شده است [۱]. نتایج حاصل از پیاده‌سازی نمونه‌های مختلف الگوریتم‌های موجود برای مساله کوتاه‌ترین مسیر بر روی شبکه‌های مختلف به وسیله چرکاسکی و همکاران [۲] و هم‌چنین ژان و نون [۳] در مطالعات جداگانه‌ای گزارش شده است. علاوه بر روش‌های ترکیباتی، برخی از محققین از روش سیمپلکس نیز برای حل این مساله استفاده کرده‌اند. برای مثال نودا و مارتین [۴] یک روش سیمپلکس اصلاح شده کارآمد با مرتبه چندجمله‌ای برای مساله کوتاه‌ترین مسیر ارایه دادند.

با در نظر گرفتن هم‌زمان شاخص‌های مختلفی مانند مسافت، هزینه یا زمان در مسیریابی، مساله کوتاه‌ترین مسیر کلاسیک به مسایل پیچیده‌تری گسترش داده می‌شود که به واقعیت نزدیک‌تر هستند. یک صورت گسترش یافته از مساله کوتاه‌ترین مسیر می‌تواند با این شرط باشد که برای هزینه یا زمان طی مسیر سقفی قرار داده شود و کوتاه‌ترین مسیری که از آن سقف تجاوز نکند انتخاب گردد. اضافه کردن این محدودیت‌های جدید به مدل ریاضی مساله کوتاه‌ترین مسیر آن را به مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید تبدیل می‌کند و باعث می‌شود که پیچیدگی زمانی و محاسباتی مساله مقید بالا رفته و به کلاس مسایل Non-deterministic polynomial-time hard (NP-hard) تعلق گیرد [۵]. از کاربردهای این مساله می‌توان به انتخاب بهترین مسیر برای حرکت نیروها در صحنه نبرد اشاره کرد که در این زمینه می‌توان به کار مورا و همکاران [۶] اشاره کرد که با تعریف یک مساله چنددهفه به ارایه یک روش ابتکاری غیردقیق برای مساله مسیریابی نیروهای نظامی پرداختند که در آن شاخص‌های سرعت و امنیت مسیر مورد توجه قرار گرفته است. کاربرد دیگری از این مساله را می‌توان در مساله کنترل پروژه‌های عمرانی با در نظر گرفتن سقف بودجه مشاهده کرد [۷].

پوگلیس و گریرو [۸] در مطالعه‌ای مروری، به بررسی روش‌ها و الگوریتم‌های دقیق ارایه شده برای حل مساله مسیریابی مقید پرداختند. در این مطالعات سه راه کار برای دستیابی به مسیر بهین ارایه شد که در هر یک از آن‌ها، از یک یا چند مورد از این راه کارها به صورت هم‌زمان استفاده شده است. این راه کارها عبارتند از: (الف) کوچک‌سازی شبکه مورد نظر با حذف کمان‌هایی که با اطمینان می‌توان گفت بر روی مسیر بهینه قرار ندارند (ب) استفاده از روش آزادسازی لاغرانژ که در آن قید ظرفیت با در نظر گرفتن جریمه به تابع هدف منتقل شده و مساله به مساله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل می‌شود و در آن ضرایب تابع هدف ترکیبی از همه پارامترهای مساله است (ج)

استفاده از روش‌های مختلف برای از بین بردن گپ موجود بین جواب حاصل از مدل آزادسازی شده و جواب بهین. مهم‌ترین مطالعات موجود که در مطالعه آن‌ها به آن اشاره شده است عبارتند از: مطالعات آولا و همکاران [۹] هندر و ژانگ [۱۰]، کارلایل و همکاران [۱۱]. آولا و همکاران [۹] به گسترش‌های متفاوت از مساله کوتاه‌ترین مسیر برای مدیریت ناوگان حمل و نقل پرداختند و برای حل آن از روش شاخه و برش استفاده کردند. هندر و ژانگ [۱۰] با استفاده از دوگان مساله، روش آزادسازی لاغرانژ و به کارگیری الگوریتم k-امین مسیر کوتاه، یک روش حل برای این مساله ارایه دادند. در روش آزادسازی لاغرانژ محدودیت مربوط به قید طرفیت، با در نظر گرفتن جریمه، به تابع هدف منتقل و به مساله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل می‌شود که در آن ضرایب تابع هدف ترکیبی از دو پارامتر در نظر گرفته شده است. کارلایل و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از روش آزادسازی لاغرانژ و در نظر گرفتن یک مقدار جریمه اولیه، یک جواب شدنی به‌دست آورده و با استفاده از یک روش پیش‌پردازشی به مسیر بهینه دست یافتند. همچنین لوزانو و مدادگلیا [۱۲] با استفاده از روش تولید ستون یک روش حل دقیق برای این مساله ارایه و کاربرد آن را بر روی چند مساله واقعی مانند زمان‌بندی مورد بررسی قرار دادند.

در همه مطالعات اشاره شده در بالا فرض قطعیت برای همه پارامترهای مساله در نظر گرفته شده است؛ این در حالی است که مقدار پارامترهای مساله یا تعداد کمان‌های در دسترس وابسته به عوامل مختلفی هستند که با گذر زمان تغییر می‌کنند. با تغییر پارامترهای مساله مشخصات مسیرهای موجود نیز تغییر می‌کند و در این شرایط نمی‌توان به بهینگی مسیری که با فرض قطعیت داده‌ها به‌دست آمده است، اعتماد کرد. ضرورت توجه به عدم قطعیت داده‌ها در شرایط بحرانی مانند حوادث طبیعی بیش از پیش قابل دفاع می‌باشد؛ زیرا در این شرایط هزینه و مدت زمان عبور از برخی از مسیرها افزایش می‌یابد و حتی برخی از راه‌های ارتباطی مسدود می‌شوند. در چنین شرایطی استفاده از مسیرهایی که احتمال تغییر شرایط آن‌ها کم‌تر است عاقلانه‌تر به نظر می‌رسد. برای مواجهه با شرایط عدم قطعیت در مسایل واقعی دو رویکرد کلی وجود دارد که عبارتند از: برخورد واکنشی و برخورد پیش‌کنشی. در برخورد واکنشی مدل مساله با فرض شرایط قطعیت داده‌ها حل شده و پس از مشخص شدن مقدار واقعی پارامترها، دستیابی به جوابی که هم با داده‌های جدید تطابق داشته باشد و هم کم‌ترین تغییر را نسبت به جواب قبلی دارا باشد، مدنظر قرار می‌گیرد [۱۳]. در برخورد پیش‌کنشی سعی بر آن است که شرایط عدم قطعیت در مدل ریاضی مساله به صورت مستقیم وارد شود. برای این کار روش‌های مختلفی ارایه شده است که می‌توان به مدل‌های احتمالی، بازه‌ای، فازی، استوار و غیره اشاره کرد [۱۴]. برای مساله کوتاه‌ترین مسیر نیز شرایط عدم قطعیت در برخی مدل‌های پیش‌کنشی لحاظ شده است که از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به مقالات برتسیماس و سیم [۱۵] و مونته‌مانی و گامبادرلا [۱۶] اشاره کرد که پارامترهای هزینه در تابع هدف را به صورت بازه‌ای در نظر گرفته و به طور جداگانه دو شکل استوار از مساله کوتاه‌ترین مسیر ارایه دادند. شن و همکاران [۱۷] پارامتر مدت زمان را به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفتند و میانگین مدت زمان مورد انتظار طی مسیر تحت همه سناریوها را حداقل کردند. همچنین با استفاده از یک روش ابتکاری بر اساس k-امین مسیر کوتاه به حل مساله پرداختند.

یک پدیده غیرقطعی که در مساله مسیریابی وجود دارد برقراری یا انسداد برخی از کمانهای شبکه در شرایط مختلف است. اگر حتی یکی از کمانهای یک مسیر مشخص شده به هر دلیلی مسدود شود امکان عبور جریان روی مسیر وجود نخواهد داشت. برقراری یا انسداد راههای ارتباطی روی شبکه، پارامتری غیرقطعی است که می‌توان احتمال آن را تخمین زد. به دست آوردن مسیری که کمترین احتمال انسداد را دارد یک مسیر قابل اعتماد خواهد بود که در شرایط بحرانی می‌توان با اطمینان بالایی از آن استفاده کرد. از طرفی ممکن است مسیری کمترین احتمال انسداد را داشته باشد؛ اما هزینه استفاده از آن یا مدت زمان طی مسیر در آن زیاد باشد که سبب می‌شود عملاً نتوان از چنین مسیری استفاده کرد؛ بنابراین باید مسیر قابل اعتماد به صورت مقید انتخاب شود به‌طوری که هزینه یا زمان طی مسیرها از سقف مجاز تعیین شده عبور نکند. مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید؛ حتی در حالت قطعیت داده‌ها یک مساله با پیچیدگی بالاست که حل آن نیازمند الگوریتم‌های کارآمدی است. یکی از روش‌های برخورد با مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح که مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، استفاده از برش‌های منطقی است که در این زمینه می‌توان به کارهای ورستیکل و همکاران [۱۸] و چن و همکاران [۱۹] اشاره کرد. در این روش با در نظر گرفتن این که متغیرهای دودویی فقط دو مقدار صفر یا یک اختیار می‌کنند و نیز شرایط منطقی حاکم بر مساله مورد مطالعه، قیود جدیدی به مدل اضافه می‌شوند که بدون حذف جواب بهین مساله، یک یا چند جواب غیر بهینه از فضای مساله حذف شده و جواب بهین بسیار سریع‌تر به دست می‌آید. در این مقاله ابتدا به مدل‌سازی مساله قابل اعتمادترین مسیر مقید در شرایط عدم قطعیت برقراری کمانهای شبکه می‌پردازیم و مساله را در قالب کوتاه‌ترین مسیر مقید مدل‌سازی کرده و سپس الگوریتمی برای حل این مدل ارایه می‌کنیم. در این الگوریتم با توجه به شرایط حاکم بر مساله، در هر تکرار یک قید منطقی به مساله اضافه شده و برخی از مسیرهای غیر بهینه را حذف می‌کنیم و به جواب بهین نزدیک‌تر می‌شویم.

۲ تعریف مساله و مدل‌سازی

فرض کنید مجموعه V شامل چند نقطه (گره) و A مجموعه کمانهای متصل به گره‌ها تشکیل شبکه‌ای مانند- (V, A) می‌دهند. برای هر کمان احتمال برقراری یا بقا تخمین زده شده و پارامتری مانند مسافت با مقداری مشخص تعریف شده است. هدف پیدا کردن مسیری است که با بیشترین احتمال برقراری، مبدأ را به مقصد وصل کند و در عین حال مسافت آن از سقف تعیین شده λ تجاوز نکند. از اندیس‌های i و j برای نشان دادن گره‌ها استفاده می‌شود و پارامترهای مساله را که به صورت احتمال برقراری و طول کمان (j, i) تعریف شده‌اند را به ترتیب با p_{ij} و d_{ij} نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای هر کمان (j, i) متغیر دودویی x_{ij} ، مقدار ۱ اختیار می‌کند اگر کمان (j, i) روی مسیر انتخابی قرار گیرد و در غیر این صورت مقدار آن صفر است. محدودیت‌های حاکم بر این مساله، که باید به مدل‌سازی ریاضی آن‌ها پردازیم عبارتند از: از نقطه ابتدایی مسیر ($i = 1$) یک کمان به سمت یکی از گره‌های مجاورش خارج می‌شود. یک کمان ورودی به نقطه مقصد ($i = n$) انتخاب می‌شود. اگر i گره‌ای غیر از مبدأ و مقصد باشد و یکی از کمانهای ورودی آن روی مسیر انتخابی باشد، برای حفظ جریان باید یکی از کمانهای خروجی آن نیز انتخاب شود. مسافت مسیر نباید از مقدار مشخص شده λ تجاوز کند.

هدف مساله یافتن مسیری است که بیشترین احتمال برقراری یا زنده ماندن را دارد. با در نظر گرفتن شبکه و نمادهای تعریف شده، محدودیت‌های مساله به شکل زیر مدل‌سازی می‌شوند:

$$\sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{j|(j,n) \in A} x_{jn} - \sum_{j|(n,j) \in A} x_{nj} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i|(i,j) \in A} x_{ij} = \sum_{k|(j,k) \in A} x_{jk} \quad \forall j \in V - \{1, n\} \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} \leq \lambda \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (5)$$

فرض کنید احتمال برقراری کمان (j, i) در شرایط بحرانی برابر با $p_{ij} \leq 1$ است. اگر مسیری احتمال برقراری همه کمان‌هایش برابر با ۱ باشد مطمئن‌ترین مسیر خواهد بود و در این حالت حاصل ضرب احتمالات بقای کمان‌های این مسیر ۱ خواهد بود. بین دو مسیر مختلف از مبدأ تا مقصد، مسیری که حاصل ضرب احتمالات بقای کمان‌های آن به ۱ نزدیک‌تر باشد قابل اطمینان‌تر خواهد بود [۲۰] و می‌گوییم مسیر P از همه مسیرهای دیگر قابل اطمینان‌تر است اگر حاصل ضرب احتمالات مربوط به کمان‌های آن از بقیه مسیرها بیشتر باشد؛ یعنی مسیری که مقدار $\text{Prod}(P) = \prod_{(i,j) \in P} p_{ij}$ برای آن از همه مسیرهای دیگر بیشتر باشد؛ بنابراین تابع هدف مساله به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\max \prod_{(i,j) \in A} p_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

این تابع غیرخطی با استفاده از خواص تابع لگاریتم خطی‌سازی شده و مساله به فرم کوتاه‌ترین مسیر مقید نوشته می‌شود. فرض کنید P مسیری شامل کمان‌های $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, n)$ از مبدأ تا مقصد باشد که احتمال برقراری این کمان‌ها به ترتیب p_1, p_2, \dots, p_k باشد. ماکریسم‌سازی حاصل ضرب p_i ها با ماکریسم‌سازی لگاریتم حاصل ضرب p_i ها معادل است و $\log(\prod_{l=1}^k p_l) = \sum_{l=1}^k \log(p_l)$ پس ماکریسم‌سازی

$$\sum_{l=1}^k -(\log(p_l)) \quad \text{معادل است در نتیجه با قرار دادن تابع هدف مساله به صورت:} \quad (7)$$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} -(\log(p_{ij})) x_{ij}$$

و در نظر گرفتن محدودیت‌های (۱)–(۵) مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید به فرم مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید مدل‌سازی می‌شود و آن را با CRP نشان می‌دهیم. اگر شرط (۵) از این مساله حذف شود، با توجه به قیود (۱)–(۳)، خروجی مدل آزاد شده ($RCRP$) به گونه‌ای است که یک واحد جریان از مبدأ خارج شده و روی یک یا چند مسیر مختلف تقسیم می‌شود. اگر P مسیری از مبدأ به مقصد باشد مقدار تابع هدف متاظر با آن را هزینه طی

مسیر در نظر می‌گیریم و با (P) نمایش و مسافت آنرا نیز با $D(P)$ نشان می‌دهیم. مسیر P یک مسیر شدنی برای

$$D(P) = \sum_{(i,j) \in P} d_{ij} \leq \lambda \text{ است اگر}$$

۳ ارایه الگوریتمی برای حل مساله

در این مقاله ابتدا یک جواب شدنی برای مساله پیدا می‌کنیم، سپس با استفاده از برش‌هایی که به مدل اضافه می‌شود، مسیرهای دیده شده را حذف می‌کنیم تا به مسیرهای بهتری برسیم. بدین منظور، ابتدا مدل $RCRP$ حل می‌شود؛ اگر جواب به دست آمده صحیح باشد که جواب بهین به دست آمده است، در غیر این صورت مقدار تابع هدف کران پایینی برای جواب مساله CRP است و خروجی این مدل دو یا چند مسیر خواهد بود که از هر مسیر جربانی بین صفر و یک می‌گذرد. فرض کنید یک واحد جریان از مبدأ خارج می‌شود و روی m مسیر

با مقصد می‌رسد. اگر روی مسیر P_l جربانی به اندازه $\alpha_l < 1$ عبور کند، آنگاه:

$$D(P_l) = \sum_{(i,j) \in P_l} d_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in P_l} \alpha_l d_{ij} \quad (8)$$

$$\sum_{l=1}^m D(P_l) = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{(i,j) \in P_l} \alpha_l d_{ij} \right) \leq \lambda \quad (9)$$

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l = 1 \quad (10)$$

با توجه به نامعادلات (۴) و (۹) حداقل یکی از مسیرهایی که در جواب غیر صحیح به دست می‌آید یک مسیر شدنی و مقدار تابع هدف متناظر آن یک کران بالا برای جواب مساله CRP خواهد بود. چنین مسیری می‌تواند کاندیدای جواب بهین مساله باشد تا زمانی که جواب شدنی بهتری به دست آید. با اضافه کردن یک برش مناسب می‌توان جواب فعلی را از فضای شدنی $RCRP$ حذف کرد تا مسیر یا مسیرهای جدیدی حاصل شود که ممکن است یکی از آنها مسیر شدنی بهتری باشد و جایگزین کاندیدای جواب بهین شود. اضافه کردن برش به مساله باید به گونه‌ای باشد که بدون نادیده گرفتن جواب بهین CRP ، جواب فعلی را حذف کند. با اضافه کردن چنین برشی به مدل، جواب فعلی نشدنی خواهد بود و می‌توان با به کار گیری روش سیمپلکس دوگان و با استفاده از جدول بهینه قبلی، جواب جدیدی به دست آورد. برش منطقی اضافه شده باعث محدودتر شدن فضای شدنی و در نتیجه رشد مقدار تابع هدف مدل آزاد شده می‌شود. محدود کردن فضای شدنی تا زمانی ادامه می‌یابد که مقدار تابع هدف مدل آزاد شده که کران پایین جواب مساله اصلی است به کران بالای ذخیره شده برسد. در این حالت جواب بهین مساله CRP همان کران بالای ذخیره شده می‌باشد. $\{y_{i,j}^+\}$

اگر به مجموعه متغیرهای دودویی یک مساله، دنباله‌ای با مقادیر صفر یا یک متناظر شود یک جواب به دست می‌آید که ممکن است نشدنی یا غیر بهینه باشد. یک برش منطقی به این دلیل اضافه می‌شود که اگر در یک مدل دودویی جواب غیربهینه‌ای ایجاد شده بتوان آنرا از فضای شدنی حذف کرد بدون اینکه جواب بهینه اصلی حذف شود. فرض کنید در یک مدل دودویی دنباله $\{y_{i,j}\}$ به مجموعه متغیرهای دودویی $y_{i,j}$ مساله

منتظر شده است. شکل کلی یک برش منطقی که باعث حذف چنین دنباله‌ای از فضای شدنی می‌شود به فرم زیر است:

$$\sum_{(i,j)|y_{i,j}^*=0} y_{i,j} + \sum_{(i,j)|y_{i,j}^*=1} (1-y_{i,j}) \geq 1 \quad (11)$$

با اضافه کردن این قید به مدل حداقل یکی از متغیرهایی که مقدار آن در دنباله $\{y_{i,j}^*\}$ صفر بوده، باید مقدار یک اختیار کند یا یکی از متغیرهایی که مقدار یک داشته، باید صفر شود؛ لذا جواب جدید غیر از دنباله $\{y_{i,j}^*\}$ خواهد بود. چنین برشی فقط یک جواب را از فضای شدنی مساله حذف می‌کند؛ اما همان‌طور که در کارهای [۱۶] و [۱۷] اشاره شده است هرچه مجموعه اندیس‌هایی که در این قید به کار رفته کوچک‌تر باشد، برش قوی‌تری حاصل می‌شود و می‌تواند تعداد جواب‌های غیر بهین بیشتری را حذف کند. هم‌چنین با توجه به شرایط مساله ممکن است نیازی به نوشتمن هر دو جمله نامعادله (۱۱) نباشد. در مساله مسیریابی هر مسیر P از مبدأ تا مقصد را می‌توان با دنباله $\{x_{i,j}^P\}$ معرفی کرد که در آن به هر کمان روی مسیر مقدار ۱ و به بقیه کمان‌ها مقدار صفر نظیر می‌شود. فرم کلی برش منطقی برای حذف چنین دنباله‌ای از فضای شدنی به شکل زیر است:

$$\sum_{(i,j)|x_{i,j}^P=0} x_{i,j} + \sum_{(i,j)|x_{i,j}^P=1} (1-x_{i,j}) \geq 1 \quad (12)$$

اگر کمانی که روی مسیر P نیست مقدار ۱ بگیرد آن‌گاه مسیر P تولید نخواهد شد و با توجه به قیود (۱)- (۳) حتماً یکی از کمان‌های مسیر P مقدار صفر می‌گیرد؛ بنابراین می‌توان جمله دوم برش (۱۲) را حذف کرد و آنرا به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{(i,j)|x_{i,j}^P=0} x_{i,j} \geq 1 \quad (13)$$

با وجود این اگر بتوان مجموعه اندیس‌های این برش را کوچک‌تر کرد می‌توان برش قوی‌تری به دست آورد. برش‌های منطقی دو مشخصه دارند: اول اینکه جواب فعلی را حذف و دوم اینکه جواب بهین را حفظ می‌کنند. برای ایجاد برش منطقی پیشنهادی در این مقاله به نکاتی که در ادامه می‌آید باید توجه کرد.

فرض کنید با حل مدل $RCRP$ جواب غیر صحیحی به صورت ترکیبی از مسیرهای P_1, P_2, \dots, P_m به دست آید. حال می‌خواهیم با حذف آن‌ها به مسیرهای دیگری برسیم؛ بنابراین ابتدا مجموعه همه گره‌ها و کمان‌های روی این مسیرها را ذخیره و مشخصات همه مسیرهای فعلی شامل مسافت و مقدار تابع هدف متناظر آن‌ها را بررسی می‌کنیم و پس از به روزرسانی کران بالا، با اضافه کردن یک برش منطقی جواب فعلی را حذف کرده، به جواب جدیدی می‌رسیم. در جواب جدید یک یا چند کمان جدید مقدار غیر صفر می‌گیرند. با دنبال کردن کمان‌های جدید، مسیرهای جدیدی از مبدأ تا مقصد به دست می‌آید و یا این که روی برخی از مسیرهای قبلی انشعاب به وجود می‌آید و با هر انشعابی که به وجود آید یک انتخاب برای تولید مسیر وجود دارد و ممکن است مسیر جدیدی به مجموعه مسیرهای قبلی اضافه شود. اگر کران بالا از کران پایین به دست آمده بزرگ‌تر باشد شرط توقف برقرار نشده است و باید با ایجاد برش جدیدی این روند را ادامه داد.

در تولید برش منطقی به این نکته توجه می کنیم که حداقل یک متغیر که قبل از صفر بوده است باید مقدار بگیرد؛ به عبارت دیگر حداقل یک کمان جدید با جریان غیر صفر باید در جواب جدید انتخاب شود. فرض کنید Q مجموعه کمان‌هایی باشند که تاکنون در جواب‌های به دست آمده مقدار غیر صفر داشته‌اند و O مجموعه گره‌های روی این کمان‌ها باشد، برش منطقی پیشنهادی به صورت زیر است:

$$\sum_{i \in O} \sum_{j|(i,j) \in Q} x_{i,j} \geq 1 \quad (14)$$

این برش به این معنا است که از یکی از گره‌هایی که قبل از جواب‌های به دست آمده مشاهده شده‌اند باید یک کمان جدید خارج شود.

اعتبار یک برش منطقی با داشتن دو مشخصه قابل اثبات است: دنباله جواب فعلی را حذف کند و هم‌چنین باعث نادیده گرفتن جواب بهین مساله نشود. با اضافه کردن قید (۱۴)، یک کمان جدید مقدار غیر صفر می‌گیرد پس جواب فعلی حتماً حذف می‌شود. حال به اثبات مشخصه دوم می‌پردازیم. در تکرار اول، مدل $RCRP$ بدون برش منطقی اجرا شده و m مسیر مختلف از مبدا به مقصد مشخص می‌شود؛ اگر یکی از این مسیرها جواب بهین مساله CRP باشد مشخصات آن به عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره می‌شود؛ در غیر این صورت حداقل یکی از کمان‌های آن مقدار نگرفته است و عضو مجموعه Q نیست و باید در تکرارهای بعد مقدار بگیرد. اضافه کردن قید (۱۴) نیز باعث می‌شود که حداقل یک کمان که عضو مجموعه Q نیست مقدار بگیرد. اگر مسیر بهینه با هیچ کدام از m مسیر به دست آمده اشتراکی نداشته باشد (هیچ کمانی از مسیر بهینه عضو مجموعه Q نباشد) اولین کمان آن از گره مبدا خارج می‌شود که عضو مجموعه O می‌باشد و اگر با یکی از مسیرهای به دست آمده مانند مسیر P_1 اشتراک داشته باشد، حداقل یک کمان غیر مشترک با آن مسیر دارد که از یکی از گره‌های مشترک مسیر بهین و مسیر P_1 خارج می‌شود و آن گره مشترک هم عضو مجموعه O می‌باشد و لذا قید (۱۴) باعث نادیده گرفتن جواب بهین مساله نمی‌شود. در تکرارهای بعدی ابتدا مجموعه‌های O و Q ، با اضافه کردن گره‌ها و کمان‌های جدید، به روزرسانی شده و سپس با اضافه کردن برش منطقی کمان‌های جدیدی مقدار غیر صفر اختیار می‌کنند. اگر با اضافه شدن کمان‌های جدید به مجموعه Q همه کمان‌های مسیر بهین عضو مجموعه Q شوند، با دنبال کردن کمان‌های جدید، مشخصات مسیر بهینه به عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره می‌شود؛ در غیر این صورت، با همان استدلال بالا می‌توان نتیجه گرفت که اضافه کردن قید (۱۴) باعث حذف جواب بهین مساله نمی‌شود.

حال الگوریتم پیشنهادی جدید را برای حل مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید به شرح زیر ارایه می‌دهیم:
گام اول. مقدار کران بالا را برابر با $UB = \infty$ و قرار دهید $O = Q = \emptyset$. مدل $RCRP$ را حل کنید. اگر مدل آزاد شده نشدنی است مساله اصلی نیز نشدنی است. اگر جواب به دست آمده صحیح است آنرا به عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید.

گام دوم. با دنبال کردن کمان‌های جدید همه مسیرهای جدید را استخراج کرده و مقادیر (P) و $(C(P))$ را برای هر یک محاسبه کنید. اگر $(D(P)) \leq \lambda & C(P) < UB$ مسیر P را به عنوان کاندیدای جواب بهین

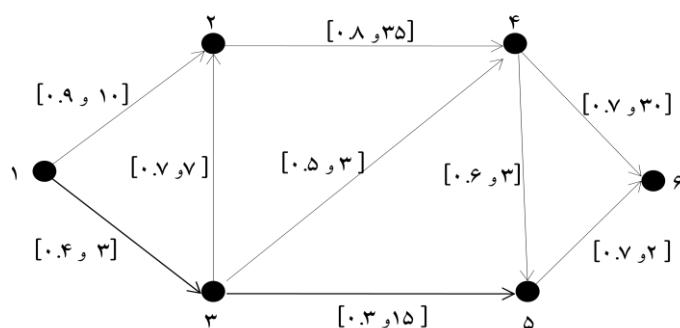
ذخیره کنید و قرار بدهید ($UB = C(P)$). مجموعه‌های O و Q را به ترتیب با مجموعه‌های $O \cup \{(i, j) \in A \mid x_{ij} > 0\}$ و $Q \cup \{i \in V \mid \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} > 0\}$ جایگزین کنید.

گام سوم. برش منطقی (۱۴) را به مدل $RCRP$ اضافه کنید و مدل جدید را با استفاده از جواب قبلی و روش سیمپلکس دوگان حل کنید. اگر مساله نشدنی است کاندیدای جواب بهین ذخیره شده را به عنوان جواب بهین گزارش کنید و الگوریتم را متوقف کنید. اگر جواب به دست آمده صحیح است آنرا به عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید. اگر $Z_{LP}^* \geq UB$ کاندیدای جواب بهین را به عنوان جواب بهین معرفی کنید و توقف کنید؛ در غیر اینصورت به گام دوم بروید.

اگر مساله CRP نشدنی باشد در همان تکرار اول مشخص می‌شود و اگر جواب داشته باشد در تکرار اول یک کران بالا و یک کران پایین برای آن به دست می‌آید. چون در هر تکرار حداقل یک متغیر جدید مقدار می‌گیرد، پس این الگوریتم در دور قرار نمی‌گیرد. از طرفی در هر تکرار فضای شدنی مساله محدودتر شده و لذا کران پایین به سمت بالا حرکت می‌کند تا به آن برسد و لذا این الگوریتم در تعداد متناهی تکرار به اتمام می‌رسد.

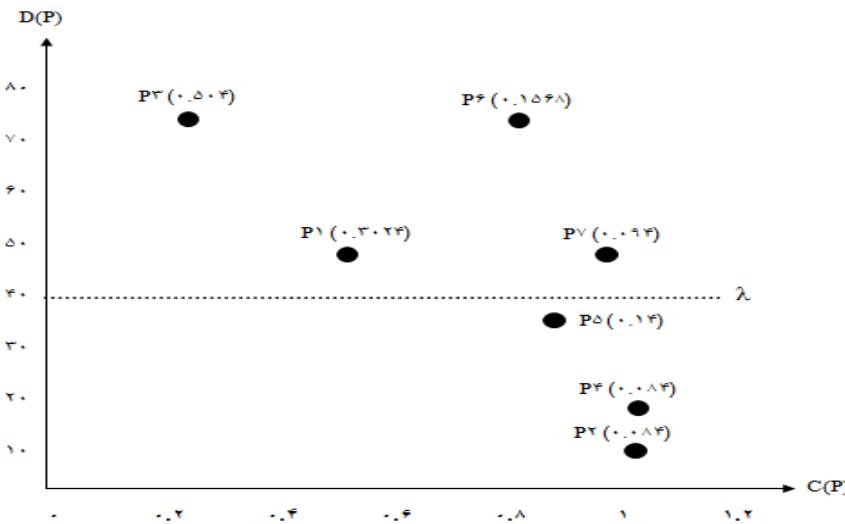
به عنوان یک مثال کوچک شبکه نمایش داده شده در شکل ۱ شامل ۶ گره و ۹ کمان است و پارامترهای احتمال برقراری و مسافت برای هر کمان به صورت $[p_{ij}, d_{ij}]$ نشان داده شده است. در مجموع ۷ مسیر از گره ۱ به گره ۶ وجود دارد که در شکل ۲ نمودار هزینه-مسافت آنها نشان داده شده است. در این شکل مقدار $C(P)$ برابر است با $-(\log(p_{ij}))$ و برای هر مسیر P مقدار $\prod_{(i,j) \in P} p_{ij}$ در پرانتز P می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش هزینه مسیرها، احتمال بقای آنها کاهش می‌یابد.

با در نظر گرفتن $\lambda = 4^\circ$ و پیاده‌سازی الگوریتم، در مرحله اول دو مسیر $P1: 1-2-4-5-6$ و $P2: 1-3-4-6$ به دست می‌آید که به ترتیب $0/7436$ و $0/2564$ واحد جریان روی آنها تقسیم شده است. چون $D(P2) = 11 \leq \lambda$ پس مسیر $P2$ شدنی است و به عنوان کاندیدای جواب بهین و کران بالا به صورت $UB = C(P2) = 1/0756$ ذخیره می‌شود. گره‌ها و کمان‌های مشاهده شده به ترتیب در مجموعه‌های O و Q ذخیره می‌شوند ($O = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $Q = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$) و قید (۱۴) به صورت $x_{22} + x_{35} + x_{46} \geq 1$ به مدل $RCRP$ اضافه می‌شود.



شکل ۱. شبکه‌ای با دو پارامتر احتمال برقراری و طول هر کمان

در تکرار دوم، سه مسیر $P_3: 1-2-4-6$ و $P_4: 1-3-5-6$ و $P_5: 1$ به دست می‌آید که در بین آنها مسیر P_5 شدنی است و چون $C(P_5) = 0 / 8538 < UB = C(P_5) = 0 / 8538$ به عنوان کاندیدای جواب بهین ذخیره شده و کران بالا به صورت $Z_{LP}^* = 0 / 79265$ به روزرسانی می‌شود. مقدار تابع هدف برابر است با O و Q کمتر از کران بالاست، پس شرط توقف برقرار نیست. گره‌ها و کمان‌های جدید به ترتیب به مجموعه‌های O و $Q = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$ و قید (14) به افزوده $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌شود. در تکرار سوم، مساله نشدنی است و لذا کاندیدای جواب بهین صورت $x_{ij} \geq 1$ به مدل $RCRP$ اضافه می‌شود. در تکرار دوم، مساله نشدنی است و لذا کاندیدای جواب بهین ذخیره شده؛ یعنی P_5 ، به عنوان جواب بهین معرفی می‌شود.



شکل ۲. نمودار هزینه - مسافت مسیرهای روی شبکه شکل ۱

۴ پیاده‌سازی الگوریتم

برای بررسی عملکرد الگوریتم ارایه شده، آن را بر روی تعدادی شبکه با اندازه‌های مختلف که به صورت تصادفی تولید می‌شوند پیاده‌سازی می‌کنیم. در هر شبکه فرض می‌کنیم که هر گره با هشت گره دیگر و در جهت‌های اصلی و فرعی جغرافیایی مرتبط است. برای هر شبکه مقدار هر کدام از پارامترهای احتمال برقراری و مسافت به صورت تصادفی و یکنواخت تعیین می‌شود. ابتدا تعداد تکرار و مدت زمان اجرای الگوریتم بر روی شبکه‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین برای ارزیابی تاثیر تغییر سقف قید ظرفیت روی کیفیت جواب‌های به دست آمده الگوریتم پیشنهادی را با مقادیر مختلف λ روی یکی از نمونه‌ها پیاده‌سازی می‌کنیم. همه محاسبات بر روی سیستمی با مشخصات پردازنشگر Intel 2-GHz RAM 2-GB و AIMMS solver CPLEX 12.4. و با استفاده از نسخه ۳.۱۲ نرم افزار AIMMS پیاده‌سازی می‌شود.

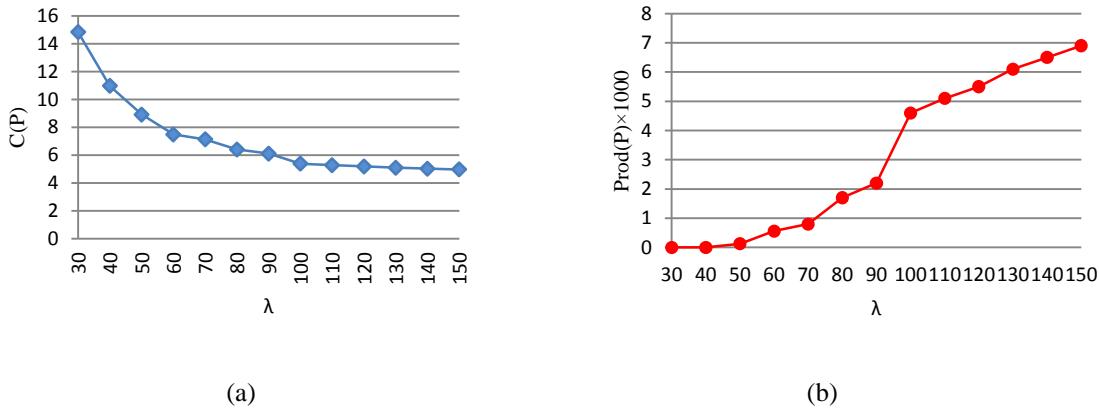
فرض کنید تعداد n گره به صورت چند سطر و ستون چیده شده‌اند و از هر گره در جهت‌های اصلی و فرعی جغرافیایی به هشت گره مجاور دیگر کمان وجود دارد. ابتدا بر روی یک مورد شبکه معرفی شده جزئیات اجرای الگوریتم توضیح داده می‌شود و سپس با در نظر گرفتن شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف و تولید چند نمونه داده به صورت تصادفی، الگوریتم پیشنهادی را برای هر نمونه پیاده‌سازی کرده و میانگین تعداد تکرارها و مدت زمان

رسیدن به جواب بهین مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا یک شبکه مشبک 20×20 با 400 گره در نظر گرفته شده و مقدار پارامترهای احتمال برقراری کمانها و طول هر کمان به صورت تصادفی به ترتیب از بازه‌های $[1, 10]$ و $[10, 20]$ با توزیع یکنواخت تولید و استخراج می‌شود. سقف قید ظرفیت برابر با $\lambda = 80$ قرار داده شده و الگوریتم پیاده‌سازی می‌شود. نتایج حاصل از به کار گیری الگوریتم پیشنهادی، در جدول ۱ آمده است. در ستون دوم این جدول مقدار تابع هدف مدل خطی حاصل از اضافه کردن برش منطقی به $RCRP$ ، آمده است که کران پایین جواب بهین مدل CRP است. در ستون سوم کمترین مقدار $C(P)$ در بین مسیرهای شدنی به دست آمده، به عنوان کران بالای جواب بهین نشان داده شده است. همان‌طور که در این جدول نشان داده شده است، در تکرار اول مدل $RCRP$ حل شده که جواب آن به صورت غیر صحیح و مقدار تابع هدف به دست آمده برابر است با $6/31$ که این مقدار کران پایین جواب بهین مدل CRP می‌باشد. در تکرار اول دو مسیر مجزا مشخص شده که یکی از آن‌ها یک مسیر شدنی با مسافت 76 واحد و هزینه $6/6$ واحد می‌باشد، این مسیر به عنوان کاندیدای جواب بهین و هزینه آن به عنوان کران بالای جواب بهین ذخیره می‌شود. مجموعه گره‌ها و کمان‌های دیده شده در این تکرار به ترتیب دارای 29 و 30 عضو است. در تکرار دوم برش منطقی (۱۴) به مدل $RCRP$ اضافه می‌شود. در این تکرار نیز جواب به صورت غیر صحیح است و دو مسیر جدید را معرفی می‌کند که یکی از آن‌ها یک مسیر شدنی با مسافت 78 واحد و هزینه $6/4$ واحد می‌باشد، چون هزینه این مسیر شدنی از کران بالای موجود کمتر است پس کران بالا به صورت $UB = 6/4$ تغییر می‌کند. تعداد گره‌ها و کمان‌های جدید دیده شده در این تکرار به ترتیب 3 و 4 است و با اضافه کردن آن‌ها مجموعه‌های O و Q و براساس آن‌ها برش (۱۴) به روز می‌شود. در تکرار سوم تا پنجم هزینه مسیرهای شدنی به دست آمده بیشتر از کران بالاست و جایگزین کاندیدای جواب بهین نمی‌شوند؛ اما مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد تا اینکه در تکرار ششم مقدار مدل $RCRP$ که معادل است با مقدار 17 به دست آمده مسیری است با مسافت 78 واحد و مقدار تابع شده بیشتر و الگوریتم متوقف می‌شود. مسیر بهین به دست آمده مسیری است با مسافت 78 واحد و مقدار تابع هدف $6/4$ که معمول است با مقدار زمان $0/04$ ثانیه به انجام می‌رسد. همان‌طور که در ستون‌های 2 تا 4 جدول ۱ مشاهده می‌شود، در هر تکرار مقدار گپ بین کران بالا و پایین کمتر می‌شود؛ زیرا از طرفی در هر تکرار فضای شدنی مدل آزاد شده محدود‌تر می‌شود و مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد و از طرف دیگر در برخی از تکرارها جواب شدنی بهتری به دست می‌آید و کران بالا کوچک‌تر می‌شود. نکته دیگر این است که تعداد محدودیت‌ها و متغیرها در هر تکرار بدون تغییر می‌ماند؛ آنچه که باعث کوچک‌تر شدن فضای جواب شدنی می‌شود تغییر مجموعه اندیس‌های برش منطقی اضافه شده است (در هر تکرار اندازه مجموعه Q بزرگ‌تر می‌شود و امکان انتخاب کمان جدید محدود‌تر می‌شود). در این شبکه بیشترین احتمال بقا برابر است با $0/069$ و برای مسیری است که با حذف قید ظرفیت به دست می‌آید. هزینه این مسیر $4/97$ واحد و مسافت آن 150 واحد است که به ازای $\lambda = 80$ برای مساله CRP یک مسیر نشدنی است. اگر سقف مجاز برای مسافت مسیر بهین را برابر با $\lambda = 150$ قرار دهیم مطمئن‌ترین مسیر به دست می‌آید و هر چه سقف مجاز مسافت را کاهش دهیم مقدار تابع هدف مساله CRP

افزایش و به طور معادل احتمال بقای مسیر به دست آمده کاهش می یابد. در شکل ۳ روند افزایش احتمال بقای مسیر بهین مساله CRP با افزایش مقدار λ و کاهش مقدار تابع هدف برای شبکه بالا نشان داده شده است.

جدول ۱. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی یک شبکه مشبک با ۴۰۰ گره

تکرار	کران پایین	کران بالا	تعداد قبود	تعداد متغیرها	\bar{Q}	$ O $
۲۰	۲۹	۴۰۱	۲۹۶۴	۴/۵	۶/۶	۶/۳۱
۳۴	۳۲	۴۰۲	۲۹۶۴	۱/۲	۶/۴	۶/۳۲
۳۸	۳۵	۴۰۲	۲۹۶۴	۰/۷	۶/۴	۶/۳۵
۴۱	۳۷	۴۰۲	۲۹۶۴	۰/۳	۶/۴	۶/۳۸
۴۵	۴۰	۴۰۲	۲۹۶۴	۰/۱	۶/۴	۶/۳۹
-	-	۴۰۲	۲۹۶۴	-	۶/۴	۶/۴۶



شکل ۳. تاثیر تغییر سقف ظرفیت بر روی هزینه (a) و احتمال بقای (b) مسیرهای به دست آمده روی یک نمونه شبکه

در ادامه شبکه هایی با ۴۰۰، ۴۰۰، ۹۰۰، ۹۰۰، ۱۶۰۰، ۲۵۰۰ و ۳۶۰۰ گره در نظر گرفته و آنها را به ترتیب با GN1-GN5 نمایش و برای هر کدام ۱۰۰ نمونه داده تصادفی تولید می کنیم و به صورت جداگانه الگوریتم برای هر کدام پیاده سازی می شود. نتایج به دست آمده شامل میانگین تعداد تکرارها، میانگین و ماکریتم مدت زمان اجرا، برای هر مورد در جدول ۲ گزارش شده است. همان طور که مشاهده می شود با بزرگتر شدن اندازه شبکه هر چند میانگین تعداد تکرارها و مدت زمان حل رشد می کنند؛ اما این افزایش نسبت به بزرگتر شدن اندازه شبکه ها مقدار قابل توجهی نیست.

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی شبکه هایی با اندازه های مختلف

شبکه	V	A	بیشترین زمان اجرا (ثانیه)	میانگین مدت زمان اجرا (ثانیه)	میانگین تعداد تکرار	میانگین تعداد تکرار
GN1	400	2964	400	0.04	0.09	0.09
GN2	900	6844	900	0.09	0.11	0.11
GN3	1600	12324	1600	0.21	0.14	0.14
GN4	2500	19404	2500	0.62	0.11	0.11
GN5	3600	28084	3600	0.89	0.14	0.14

۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله با فرض اینکه احتمال مسدود شدن برخی از کمان‌های شبکه در شرایط بحرانی وجود دارد مساله یافتن مطمئن‌ترین مسیر مطرح شد که در آن برای هر کمان یک احتمال بقا تخمین‌زده می‌شود و مسیری که حاصل ضرب احتمال بقای کمان‌ها بیشتر باشد به عنوان مسیر بهین معرفی می‌شود. با استفاده از خواص تابع لگاریتم حاصل ضرب احتمالات به صورت یک تابع خطی معادل‌سازی و مساله مطمئن‌ترین مسیر در قالب مساله کوتاه‌ترین مسیر مدل‌سازی شد. از آنجا برای هر مسیر می‌توان پارامترهای دیگری مانند مسافت و مدت زمان در نظر گرفت و ممکن است مطمئن‌ترین مسیر به دست آمده به خاطر مسافت یا زمان زیاد عملایق قبل استفاده نباشد، با اضافه کردن قید ظرفیت به مساله آن را به مساله مطمئن‌ترین مسیر مقید گسترش داده و به شرایط واقعی نزدیک‌تر کردیم. مساله گسترش داده شده مساله پیچیده‌ای است و برای حل نیازمند الگوریتم کارآمدی است. برای حل آن در این مقاله یک الگوریتم حل تکراری بر اساس مدل آزادشده و اضافه کردن برش‌های منطقی ارایه شده است. این الگوریتم بر روی شبکه‌های مختلف و با استفاده از داده‌های تصادفی و در اندازه‌های متفاوت پیاده‌سازی شد. نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم بر روی نمونه‌های مختلف نشان داد که این الگوریتم قادر است در مدت زمان مناسبی به جواب بهینه مساله دست یابد. نکته مثبت چنین روشی در این است که برای پیاده‌سازی آن از روش‌های حل مدل‌های خطی موجود کمک گرفته می‌شود و با گذشت زمان و به روزرسانی نرم‌افزارهای حل مسایل بهینه‌سازی و ارتقای روش‌های حل مدل‌های خطی، کارآمدی این روش نیز بیشتر می‌شود. نکته دیگر این است که در هر تکرار فقط یک قید برای برش منطقی به مدل *RCSP* اضافه می‌شود و اندازه مدل تغییری نمی‌کند. این قید جدید جواب بهین تکرار قبلی را نشدنی می‌سازد؛ اما با استفاده از الگوریتم سیمپلکس دوگان به راحتی به جواب جدید می‌رسد و همان‌طور که در پیاده‌سازی‌های مختلف نشان داده شد با افزایش اندازه شبکه‌ها تغییر محسوسی در زمان اجرای الگوریتم رخ نمی‌دهد. نکته دیگری که مورد بررسی قرار گرفت این بود که با کاهش سقف قید ظرفیت احتمال بقای مسیر به دست آمده کاهش می‌یابد.

در مطالعات مشابه آینده پیشنهاد می‌شود شرط عدم قطعیت در این مساله به محدودیت‌های مساله منتقل شده و مورد بررسی قرار گیرد و از رویکرد مدل‌های استوار برای آن استفاده کرد. هم‌چنین می‌توان بر روی گسترش‌های دیگر مساله و ارایه برش‌های قوی‌تری کار کرد.

منابع

- [۷] صفری، س.، زعفرانیه، م.، ابراشی، م. و ابراهیم لعل، ا.، (۱۳۹۸). روش دوگان لگرانژی برای مساله کوتاه‌ترین مسیر با در نظر گرفتن طرح‌های عمرانی همراه با محدودیت بودجه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۶(۲)، ۵۷-۳۹.
- [۱۲] تقی نژاد، ن.، ناصری، ه.، س.، م.، (۱۳۹۱) برنامه‌ریزی خط‌لوله چند فرآورده‌ای در شرایط عدم قطعیت تقاضای روزانه مشتری ها. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۱)، ۲۱-۳۱.
- [1] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., Orlin, J. B.. (1993). Network flows Theory, algorithm, and applications. New Jersey, United States of America: Prentice Hall.
- [2] Cherkassky, B. V., Goldberg, A. V., Radzik, T.. (1996). Shortest paths algorithms: theory and experimental evaluation. Mathematical programming, 73, 129-174.

- [3] Zhan, F. B., Noon, C. E., Dessouky, M., (1998). Shortest path algorithms on real road networks. *Transportation Science*, 32, 65–73.
- [4] Noda, A. S., Martin, C. G., Dessouky, M., (2010). Shortest path simplex algorithm with a multiple pivot rule: A comparative study. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 27(6), 677–691.
- [5] Garey, M. R., Johnson, D. s., (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman.
- [6] Mora, A. M., Merelo, J. J., Millan, C., Torrecillas, J., Laredo, J. L. J., (2009). CHAC. A MOACO Algorithm for Computation of Bi-Criteria Military Unit Path in the Battlefield. *International Journal of Intelligent Systems*, 24(7), 818–843.
- [8] Pugliese, L. D. P., Guerriero, F., (2013). A survey of resource constrained shortest path problems: Exact solution approaches. *Networs*, 62(3), 183-200.
- [9] Avela, P., Boccia, M., Sforza, A., (2004). Resource constrained shortest path problems in path planning for fleet management. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 3, 1-17.
- [10] Handler, G. Y., Zang, I., Doerner, K.F., (1980). A dual algorithm for the constrained shortest path. *Networks*, 10, 293-310.
- [11] Carlyle, W. M., Royset, J. O., Wood, R. K., (2008). Lagrangian relaxation and enumeration for solving constrained shortest-path problems. *Wiley Periodicals, Inc. NETWORKS*, 52(4), 256-270.
- [12] Lozano, L., Medaglia, A. L., (2013). Robust scheduling for multi-product pipelines under demand uncertainty. *Computers & Operations Research*, 40(1), 378-384.
- [14] Moradi, S., MirHassani, S. A., (2016). On an exact method for the constrained shortest path problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 87(9-12), 2541-2549.
- [15] Bertsimas, D., Sim, M., (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Journal of Math. Program*, 98, 49–71.
- [16] Montemanni, R., Gambardella, L. M., (2004). An exact algorithm for the robust shortest path. *Computers & Operations Research*, 31(10), 1667-1680.
- [17] Shen, L., Shao, h., Zhang, L., Zhao, J., (2017). Improving The Global optimal algorithm of reliable path finding problem based on backtracking method *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 1-10.
- [18] Verstichel, J., Kinable, J., Causmaecker, P. D., Vanden Berghe, g., (2015). A Combinatorial Benders' decomposition for the lock scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 54, 117–128.
- [19] Chen, J. H., Lee, D. H., Cao, J. X., (2012). A combinatorial benders' cuts algorithm for the quayside operation problem at container terminals. *Transportation Research Part E*, 48, 266–275.
- [20] Bundschuh, M., Klabjan, D., Thurston, D. L., (2003). Modeling robust and reliable supply chains. Working paper university of Illinois, Urbana-Champaign, 1-32.