مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره اول (پیاپی ۶۰)، بهار ۹۸، ص ص ۹-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش هموارسازی برای محاسبه جواب با کم‌ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

حسین موسائی[۱*]، سعید کتابچی[۲]
۱- استادیار، دانشگاه بجنورد، گروه ریاضی، بجنورد، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۱ آذر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۳ بهمن ۱۳۹۷

چکیده
یکی از موضوعاتی که از نظر تئوری و کاربردی مورد توجه پژوهشگران می‌باشد، مساله پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم یک مساله می‌باشد. در واقع به طور کلی دستگاهی مانند دستگاه معادلات قدرمطلق می‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد، در این حالت، طبیعی‌ترین و بهترین انتخاب، محاسبه جواب با کم‌ترین نرم می‌باشد که در این مقاله جواب مساله با کم‌ترین نرم-۱ این دستگاه بررسی و محاسبه می‌شود. با به‌کارگیری روش لاگرانژ بهبودیافته مساله مورد اشاره به یک مساله بهینه‌سازی بدون قید که تابع هدف آن تنها یک‌بار مشتق‌پذیر است تبدیل می‌شود. برای به‌کارگیری روش نیوتن از روش‌های هموارسازی استفاده کرده‌ایم. حل مساله‌های با اندازه بزرگ با سرعت بالا مبین کارایی روش اشاره شده می‌باشد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات قدرمطلق، روش لاگرانژ بهبودیافته، جواب با کم‌ترین نرم، روش‌های هموارسازی.

۱ مقدمه
یکی از موضوعاتی که همواره مورد توجه محققان در حوزه‌های مختلف بوده است، پیدا کردن جواب با کمترین نرم می‌باشد. پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم، در برخی از مقالات به صورت تئوری بحث شده است [۱، ۲] و در برخی دیگر از مقالات از جنبه کاربردی مورد توجه قرار گرفته است [۳]. در همین رابطه در سال‌های اخیر بررسی جواب با کم‌ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق نیز مورد بررسی قرار گرفته است.
دستگاه مورد نظر با توجه به معادل بودن آن با مسایل مکمل خطی که خود یک مساله پرکاربرد در حوضه‌های مختلف مانند مدل های اقتصادی، بازی‌های ماتریسی، کنترل و برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد، اینک مورد توجه بیش‌تری قرار گرفته است [۴-۱۵] و به صورت زیر تعریف می‌شود:

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: moosaei@ub.ac.ir, hmoosaei@gmail.com

$$Ax-|x|=b, \tag{۱}$$

که در آن $A\in R^{n\times n}$، $b\in R^{n}$ و $|\cdot|$ نمایانگر قدر مطلق مولفه‌ها می‌باشد.

در حالت کلی برای دستگاه (۱) سه حالت را می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول: دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد، که در این حالت باید به دنبال یافتن جواب بود برای این منظور روش‌های متعددی ارایه شده است [۱۶-۳۱]. حالت دوم: دستگاه جواب نداشته باشد که برای این حالت تصحیح دستگاه به صورت بهینه پیشنهاد شده است [۳۲، ۳۳]. حالت سوم: دستگاه چندین جواب داشته باشد، که در این وضعیت بهترین و طبیعی‌ترین انتخاب پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم است [۳۴، ۳۵].

در این مقاله وضعیتی که دستگاه (۱) بیش از یک جواب داشته باشد مورد توجه قرار گرفته و الگوریتمی عددی برپایه یک بحث نظری برای پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم-۱ ارایه شده است؛ البته در [۱۴] ایده‌ای نظری براساس برنامه‌ریزی اعداد صحیح برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱) مطرح شده است.

مقاله [۳۴] به کمک قضایای جانشانی، قضیه‌ای برای پیدا کردن جواب باکم‌ترین نرم دستگاه (۱) اثبات کرده و براساس آن الگوریتمی همگرا ارایه گردیده است. نتایج محاسباتی، کارایی روش را نشان می‌دهند.

البته همان‌طور که در مقاله مشاهده می‌شود این روش برای اجرا نیاز به داشتن یک جواب معلوم از دستگاه دارد؛ یعنی ابتدا باید با روشی دستگاه حل گردد و سپس به کمک جواب به‌دست آمده جواب با کم‌ترین نرم محاسبه گردد. در [۳۵] برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱)، مساله به صورت مساله درجه دوم با قیود درجه دوم و خطی مدل شده و سپس آن را به کمک روش تبرید شبیه‌سازی شده حل می‌نمایند. با توجه به اینکه مساله به‌دست آمده نسبتا پیچیده است، محاسبات زمان زیادی نیاز دارند که به همین دلیل نویسندگان در نتایج عددی مسایل را با اندازه کوچک و متوسط بررسی کرده‌اند.

هدف این مقاله ارایه روشی کارا و سریع برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم-۱ دستگاه (۱) است به طوری‌که محدویت‌های روش‌های گذشته را برطرف نماید. در این رابطه مساله زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in R^n} \ \|x\|_1 \\ &s.t. \quad Ax-|x|=b. \end{aligned} \tag{۲}$$

برای این منظور ابتدا مساله (۲) را به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی مدل کرده و سپس روش لاگرانژ بهبود یافته برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد می‌گردد. به کارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته منجر می‌شود به مساله‌ای محدب و نامقید با تابع هدفی که تنها یک بار دیفرانسیل‌پذیر است. حال به کمک روش‌های هموارسازی مساله نامقید را به مساله‌ای با گرادیان هموار تبدیل و سپس به کمک روش نیوتن بر مبنا قاعده آرمیژو آن را حل می‌کنیم.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ هم ارزی مساله جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱) و مساله برنامه‌ریزی خطی نشان داده شده است. روش لاگرانژ بهبودیافته در بخش ۳ بیان شده است. بخش ۴ به معرفی

الگوریتمی کارا به کمک روش هموارسازی می‌پردازد. در بخش ۵ به ارایه مثال‌های عددی برای بررسی کارایی روش و الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. در انتها نتیجه‌گیری و پیشنهادها در بخش ۶ ارایه می‌شود.

۲ جواب با کم‌ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

در این بخش ابتدا به بیان قضیه‌ای برای حالاتی که دستگاه معادلات قدرمطلق (۱) بیش از یک جواب دارد، پرداخته و سپس نشان داده شده مساله با کم‌ترین نرم-۱ دستگاه (۱) با مساله برنامه‌ریزی خطی معادل است.

قضیه ۱: اگر $b<0$ و $\|A\|_\infty < \gamma/2$ که در آن $\gamma = \frac{min_i |b_i|}{max_i |b_i|}$، آنگاه سیستم (۱) دقیقا 2^n جواب مجزا دارد. هرکدام از جواب‌ها مولفه‌های ناصفر دارند و دارای علامت‌های مختلفی هستند.

اثبات: رجوع شود به [۱۵].

اکنون با توجه به مساله (۲) به بررسی مساله زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} &\underset{x\in R^n}{Min}\, e^T |x| \\ &s.t. \quad Ax - |x| = b. \end{aligned} \tag{۳}$$

مساله (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\underset{p,q\in R^n}{Min}\; e^T(p+q) \\ &s.t. \quad Ap - Aq - Ip - Iq = b, \\ &\qquad p, q \geq 0, \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن $p = \frac{|x|+x}{2}$ و $q = \frac{|x|-x}{2}$ می‌باشد.

مساله فوق معادل با مساله برنامه‌ریزی خطی زیراست:

$$\begin{aligned} &\underset{X\in R^n}{Min}\, e^T X \\ &s.t. \quad BX = b, \\ &\qquad X \geq 0, \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $X = [p \;\; q]^T$ و $B = [A-I \;\; -A-I]$ می‌باشد.

برای حل مساله (۵)، از روش هموار لاگرانژ بهبود یافته استفاده می‌شود که در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد.

۳ روش لاگرانژ بهبودیافته

طبق شرایطی که رابطه بین مساله خطی اولیه و مساله دوگان آن را توصیف می‌کند، جواب مساله خطی اولیه می‌تواند به وسیله بیشینه‌سازی تابع دوگان به‌دست آید. می‌توان به جای استفاده از تابع لاگرانژ دوگان از تابع لاگرانژ بهبودیافته دوگان استفاده نمود. این مینیمم‌سازی یک جواب تصویر کم‌ترین نرم نقطه فرضی را در مجموعه جواب مساله خطی اولیه به ازای بعضی مقادیر باتعدادی متناهی پارامتر جریمه به ما ارایه خواهد داد.

برای توضیح بیش‌تر مساله خطی اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f^*=\min_{x\in X} c^T x,\quad X=\{x\in R^n : Ax=b, x\geq \circ\}, \tag{P}$$

که در آن $A\in R^{m\times n}$، $c\in R^n$ و $b\in R^m$ داده شده‌اند. فرض کنید که X^* مجموعه جواب مساله اولیه (P) و غیرتهی باشد؛ بنابراین مجموعه جواب مساله دوگان، که آن را U^* نشان می‌دهیم نیز غیرتهی خواهد شد. قضیه زیر بیان می‌کند که به کمک یک مساله کمینه‌سازی نامقید می‌توان جواب مساله دوگان (P) را به‌دست آورد.

قضیه ۲: فرض کنید که X^* مجموعه جواب مساله (P) و غیرتهی و همچنین $\bar{x}$ نقطه‌ای متعلق به X^* باشد. آنگاه $\alpha^*>\circ$ موجود است به طوری که برای هر $\alpha\geq\alpha^*$، $\bar{x}^*$ تصویر یکتای (با نرم اقلیدسی) نقطه $\bar{x}$ بر X^* با رابطه $\bar{x}^*=(\bar{x}+\alpha(A^T u(\alpha)-c))_+$ به‌دست می‌آید، که در آن $u(\alpha)$ نقطه کمینه مساله زیر است:

$$Min_{u\in R^m}\Phi(u,\alpha,\bar{x}):=-b^T u+\frac{۱}{۲\alpha}\left\| (\bar{x}+\alpha(A^T u-c))_+ \right\|^۲. \tag{۶}$$

همچنین، برای هر $\alpha>\circ$ و $\bar{x}^*\in X^*$ جواب مساله نامقید درجه دوم محدب (۶)، $u^*=u(\alpha)$، یک جواب دقیق مساله دوگان است؛ یعنی $u(\alpha)\in U^*$.

اثبات: رجوع شود به[۳۶].

توجه داریم که مساله دوگان (P) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*=\max_{u\in U} b^T u,\quad U=\{u\in R^m : A^T u\leq c\}, \tag{D}$$

بنابراین با توجه به (۶) مشاهده می‌شود که تابع $\Phi(u,\alpha,\bar{x})$ تابع لاگرانژ فزوده یا لاگرانژ بهبودیافته برای مساله (D) است.

تابع $\Phi(u,\alpha,\bar{x})$ قطعه‌ای درجه دوم، محدب و دارای مشتق اول است؛ اما مشتق دوم آن موجود نمی‌باشد. فرض کنید $s,t\in R^m$ برای گرادیان $\nabla\Phi_u(u,\alpha,\bar{x})$ داریم:

$$\left\|\nabla\Phi_u(s,\alpha,\bar{x})-\nabla\Phi_u(t,\alpha,\bar{x})\right\|\leq \|A\|\,\left\|A^T\right\|\,\|s-t\|,$$

این به این معناست که تابع $\nabla\Phi_u(u,\alpha,\bar{x})$ پیوسته لیپ شیتس با ثابت $K=\|A\|\,\left\|A^T\right\|$ است.

اکنون فرآیند تکراری زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u^{k+۱}&=arg\min_{u\in R^n}\{-b^T u+\frac{۱}{۲\alpha}\left\|(x^k+\alpha(A^T u-c))_+\right\|^۲\},\\ x^{k+۱}&=(x^k+\alpha(A^T u^{k+۱}-c))_+, \end{aligned} \tag{۷}$$

که u^0 و x^0 یک نقطه شروع دلخواه است. براساس این فرآیند می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.5.4]

قضیه ۳: فرض کنید مجموعه جواب X^* از مساله (P) غیرتهی باشد، آنگاه برای هر $\alpha > ۰$ و هر نقطه شروع دلخواه x^0 روند تکراری (۷) به $x^* \in X^*$ با تعداد مراحل k متناهی، همگراست و جواب کم‌ترین نرم مساله اولیه $\hat{x}^*$ بعد از اولین تکرار از روند بالا به‌دست می‌آید. همچنین $u^* = u^{k+۱}$ یک جواب دقیق مساله دوگان (D) است.

اثبات: به [۳۶] مراجعه شود.

برای استفاده از قضیه فوق برای یافتن جواب مساله (۵) نیاز به حل رابطه اول مساله (۷) است. در بخش بعد روشی برای حل مساله نامقید در (۷) ارایه خواهد شد.

٤ ارایه الگوریتم بر اساس روش‌های هموارسازی

در این بخش الگوریتمی را برپایه روش‌های هموارسازی برای حل مساله نامقید (۷) ارایه می‌دهیم. در [۳۷] دسته‌ای از تابع‌های هموارساز که به صورت زیر ساخته می‌شوند معرفی شده است.

تعریف ۱: فرض کنید تابع به‌طور قطعه‌ای پیوسته $\rho : R \to [۰,\infty)$ در روابط زیر صدق کند:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s)ds = ۱, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s| \rho(s)ds < \infty.$$

در این صورت تابع ρ را تابع چگال می‌نامیم.

اینک با توجه به تعریف تابع چگال و به کمک آن می‌توان یک تابع هموار را به‌عنوان تقریبی از تابع پلاس به صورت زیر ارایه نمود:

$$\varphi(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} max(۰, s - \frac{x}{\alpha}) \rho(s)ds.$$

در حالت خاص با انتخاب تابع ρ به صورت زیر:

$$\rho(s) = \frac{e^{-s}}{(۱+e^{-s})^۲},$$

تابع هموار φ با پارامتر هموارساز α به عنوان تقریبی از تابع پلاس با معادله $\varphi(x,\alpha) = x + \frac{۱}{\alpha} log(۱+e^{-\alpha x})$ به‌دست می‌آید که باجایگزین کردن φ در مساله (۶) با تابع پلاس، به تابع هموار زیر می‌رسیم:

$$Min_{u \in R^n} f(u) := -b^T u + \frac{۱}{۲\alpha} \left\| (\varphi(x + \alpha(A^T u - c), \alpha) \right\|^۲,$$

بنابراین فرآیند تکراری هموار زیر را به جای فرآیند تکراری (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u^{k+۱} &= arg \min_{u \in R^n} \{-b^T u + \frac{۱}{۲\alpha} \left\| (\varphi(x^k + \alpha(A^T u - c), \alpha) \right\|^۲\}, \\ x^{k+۱} &= (x^k + \alpha(A^T u^{k+۱} - c))_+. \end{aligned} \qquad (۸)$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.5.4]

می‌توان نشان داد وقتی پارامتر هموارساز α به بی‌نهایت میل می‌کند، جواب مساله هموار (۸) تقریب خوبی برای جواب مساله (۷) است[۳۷]. با توجه به اینکه تابع هدف مساله (۸) هموار و دوبار دیفرانسیل‌پذیر است برای حل آن از روش نیوتن به کمک قاعده آرمیژو [۳۸، ۳۹، ۴۰] استفاده خواهد شد که الگوریتم آن در زیر آورده شده است. روش ارایه شده در تعداد متناهی تکرار همگرا می‌باشد برای توضیحات بیش‌تر به [۴۱] مراجعه نمایید.

الگوریتم نیوتن- آرمیژو

نقطه اولیه و دلخواه $u_0 \in R^m$ و معیار دقت $tol > ۰$ انتخاب کنید

i=۰ برای شمارنده قرار می‌دهیم

الگوریتم اجرا شود تا وقتی $\| \nabla f(u_i)_\infty \| \geq tol$

$\alpha_i = max\{s, s\delta, s\delta^۲, ...\}$ را انتخاب کنید به طوری که

$$f(u_i) - f(u_i + \alpha_i d_i) \geq -\alpha_i \mu \nabla f(u_i)^T d_i$$

که در آن $\mu \in (۰,۱)$ و $\delta \in (۰,۱)$ و $s > ۰$ مقداری ثابت و $d_i = -\nabla^۲ f(u_i)^{-۱} \nabla f(u_i)$

قرار می‌دهیم

$$u_{i+۱} = u_i + \alpha_i d_i$$

و قرار می‌دهیم

i=i+۱

پایان

در این الگوریتم چون ممکن است ماتریس هسین منفرد باشد از جهت بهبودیافته زیر استفاده می‌کنیم:

$$-(\nabla^۲ f(u_i) + \delta I_m)^{-۱} \nabla f(u_i),$$

که در آن δ مقدار کوچک و مثبت است ($\delta = ۱۰^{-۴}$) و I_m ماتریس همانی از مرتبه m است.

۵ نتایج عددی

در این بخش با استفاده از فرآیندی که در مقاله مطرح شد به بررسی نتایج عددی می‌پردازیم. برای نشان دادن کارایی روش الگوریتم را روی مسایلی که به‌طور تصادفی تولید می‌شوند به‌کار می‌بریم. محاسبات با استفاده از نرم افزار MATLAB 2010a تحت سیستم عامل Core 2 Duo 2/53 GHz و 4GB RAM به‌دست آمده است.

برنامه تولید مساله به صورت زیر است:

الگوریتم برنامه تولید مساله تصادفی دستگاه معادلات قدر مطلق با تعداد جواب نامتناهی

n را به عنوان اندازه یا سایز ماتریس انتخاب کنید.

ماتریس A را به صورت تصادفی با اندازه n تولید کنید.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.5.4]

x را به عنوان جواب مساله به صورت تصادفی تولید کنید.

بردار b را برابر b=A*x-|x| قرار دهید (تا مساله دارای جواب قطعی باشد).

الگوریتم بالا در کد متلب زیر بیان می‌شود:

```
n=input('Entern:');
A=spdiags(sign((rand(n,1)-2*rand(n,1)))+2,0,n,n);
x=rand(n,1)-rand(n,1);
b=A*x-abs(x)
```

نتایج در جدول ۱ ارایه شده است. ستون اول بعد ماتریس A را نشان می‌دهد و ستون دوم مقدار $\left\|Ax^{*}-\left|x^{*}\right|-b\right\|$ را نمایش می‌دهد و ستون سوم بیانگر نرم-۱، جواب با کم‌ترین نرم است. ستون چهارم نرم-۱ یکی از جواب‌ها را نشان می‌دهد و ستون آخر نشان دهنده زمان انجام محاسبات است.

جدول ۱. محاسبه جواب با کم‌ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

N	$\left\|Ax^{*}-\left|x^{*}\right|-b\right\|$	$\left\|x^{*}\right\|_{1}$	$\left\|x\right\|_{1}$	Time(sec)
۱۰۰	۳/۹۷۹۰e-۰۱۳	۵/۱۷۶۹e+۰۰۳	۱/۶۰۴۱e+۰۰۴	۰/۱۰
۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۱۳۹۰e+۰۰۴	۷/۹۳۱۰e+۰۰۴	۰/۰۸
۱۰۰۰	۴/۵۴۷۵e-۰۱۳	۴/۴۹۲۵e+۰۰۴	۱/۷۱۳۷e+۰۰۵	۰/۱۰
۱۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۶/۰۷۴۶e+۰۰۴	۲/۶۵۰۵e+۰۰۵	۰/۱۳
۲۰۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۷/۲۴۹۷e+۰۰۴	۳/۳۸۷۹e+۰۰۵	۰/۱۳
۲۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۹/۶۵۶۵e+۰۰۴	۴/۱۴۵۹e+۰۰۵	۰/۱۴
۳۰۰۰	۴/۵۴۷۵e-۰۱۳	۱/۲۵۰۷e+۰۰۵	۴/۹۳۰۴e+۰۰۵	۰/۲۶
۳۵۰۰	۵/۳۲۹۱e-۰۱۳	۱/۲۳۵۸e+۰۰۵	۵/۷۳۱۷e+۰۰۵	۰/۲۳
۴۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۱/۶۶۰۰e+۰۰۵	۶/۶۹۳۰e+۰۰۵	۰/۲۵
۴۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۰۲۷۸e+۰۰۵	۷/۵۱۳۰e+۰۰۵	۰/۳۰
۵۰۰۰	۵/۴۰۰۱e-۰۱۳	۲/۱۰۶۳e+۰۰۵	۸/۲۴۷۷e+۰۰۵	۰/۲۳
۵۵۰۰	۴/۸۳۱۷e-۰۱۳	۲/۱۳۴۹e+۰۰۵	۹/۲۸۱۹e+۰۰۵	۰/۴۴
۶۰۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۲/۴۸۷۷e+۰۰۵	۹/۷۱۵۰e+۰۰۵	۰/۳۵
۶۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۶۷۷۴e+۰۰۵	۱/۱۲۴۷e+۰۰۶	۱/۴۴
۷۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۰۳۸۳e+۰۰۵	۱/۱۵۶۸e+۰۰۶	۰/۵۰
۷۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۳/۱۰۱۲e+۰۰۵	۱/۲۳۲۵e+۰۰۶	۱/۳۳
۸۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۴۷۹۲e+۰۰۵	۱/۳۵۵۷e+۰۰۶	۰/۶۶
۸۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۳/۸۰۴۱e+۰۰۵	۱/۴۴۷۸e+۰۰۶	۰/۶۵
۹۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۶۱۹۵e+۰۰۵	۱/۵۰۱۸e+۰۰۶	۰/۵۳
۹۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۴/۰۱۹۳e+۰۰۵	۱/۵۹۳۷e+۰۰۶	۰/۸۳
۱۰۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۴/۱۷۷۷e+۰۰۵	۱/۶۳۵۴e+۰۰۶	۲/۸۷

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله دستگاه معادلات قدرمطلق در حالتی که بیش از یک جواب دارد، بررسی و جواب با کم‌ترین نرم-۱ این دستگاه محاسبه شد. با تغییر متغیر و به‌کارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته مساله غیرخطی مقید (۳) مبدل به مساله نامقید (۶) با تابع هدف قطعه قطعه هموار محدب و تنها یک‌بار مشتق پذیر می‌شود. به کمک این ایده به مساله‌ای به مراتب با تعداد متغیرهای کمتر و با اندازه کوچک‌ترنسبت به مساله (۳) رسیدیم و بر همین اساس قادر به حل مساله‌های با اندازه‌های بزرگ با سرعت بالا شدیم. محاسبات جدول ۱ به خوبی مبین کارایی ایده به‌کار گرفته شده در این مقاله است. از طرف دیگر برخلاف روش‌های سابق رتبه ماتریس و یا چگالی آن؛ حتی چگونگی انتخاب تصادفی درایه‌های ماتریس‌ها و بردارهای تولید شده، محدودیتی در حل مساله‌های دستگاه معادلات قدرمطلق به‌وجود نیاورده است و این مبین مزیت این روش نسبت به کارهای پیشین است.

منابع

[۳۸] عهدی، ا.، رضاپور، ر.، (۱۳۸۹). توسعه روش تکراری نیوتن و معرفی روش‌های سریع برای حل معادلات غیرخطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷ (۳)، ۱۱–۱۹.

[۳۹] صابری نجفی، ه.، کردرستمی، س.، سهرابی گیلانی، ن.، (۱۳۸۵). مقایسه روش های تکراری نیوتن، بریدن و شبه‌نیوتن برای حل دستگاههای معادلات غیر خطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۳ (۸)، ۲۳–۳۷.

[1] Kanzow, C., Qi, H., Qi, L., (2003). On the minimum norm solution of linear programs. Journal of Optimization Theory and Applications, 116(2), 333-345.

[2] Rosen, J. B., (1990). Minimum norm solution to the linear complementarity problem. Functional Analysis, Optimization and Economics, 208-216.

[3] Huang, M. X., Dale, A. M., Song, T., Halgren, E., Harrington, D. L., Podgorny, I., Lee, R. R., (2006). Vector-based spatial–temporal minimum L1-norm solution for MEG. NeuroImage, 31(3), 1025-1037.

[4] Cottle, R. W., Pang, J. S., Stone, R. E., (1992). The Linear Complementarity Problem, Academic Press New York.

[5] Eaves, B. C., (1971). The linear complementarity problem. Management science, 17(9), 612-634.

[6] Gale, D., (1989). The theory of linear economic models. University of Chicago press.

[7] Edalatpour, V., Hezari, D., Salkuyeh, D. K., (2017). A generalization of the Gauss–Seidel iteration method for solving absolute value equations. Applied Mathematics and Computation, 293, 156-167.

[8] Cruz, J. B., Ferreira, O. P., Prudente, L. F., (2016). On the global convergence of the inexact semi-smooth Newton method for absolute value equation. Computational Optimization and Applications, 65(1), 93-108.

[9] Lemke, C. E., (1965). Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. Management science, 11(7), 681-689.

[10] Murty, K., (1988). Linear complementarity, linear and nonlinear programming Heldermann, Berlin. Google Scholar.

[11] Shen, J., Pang, J. S., (2005). Linear complementarity systems: Zeno states. SIAM Journal on Control and Optimization, 44(3), 1040-1066.

[12] De Schutter, B., (2008). The extended linear complementarity problem and its applications in analysis and control of discrete-event systems. In Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria (pp. 541-570). Springer, New York, NY.

[13] Pardalos, P. M., Ketabchi, S., Moosaei, H., (2014). Minimum norm solution to the positive semidefinite linear complementarity problem. Optimization, 63(3), 359-369.

[14] Prokopyev, O., (2009). On equivalent reformulations for absolute value equations. Computational Optimization and Applications, 44(3), 363.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.5.4]

[15] Mangasarian, O. L., Meyer, R. R., (2006). Absolute value equations. Linear Algebra and Its Applications, 419(2-3), 359-367.
[16] Longquan, Y. O. N. G., (2010). Particle swarm optimization for absolute value equations. Journal of Computational Information Systems, 6(7), 2359-2366.
[17] Mangasarian, O. L., (2007). Absolute value equation solution via concave minimization. Optimization Letters, 1(1), 3-8.
[18] Mangasarian, O. L., (2009). A generalized Newton method for absolute value equations. Optimization Letters, 3(1), 101-108.
[19] Mangasarian, O. L., Meyer, R. R., (2006). Absolute value equations. Linear Algebra and Its Applications, 419(2-3), 359-367.
[20] Mangasarian, O. L., (2012). Primal-dual bilinear programming solution of the absolute value equation. Optimization Letters, 6(7), 1527-1533.
[21] Mangasarian, O. L., (2013). Absolute value equation solution via dual complementarity. Optimization Letters, 7(4), 625-630.
[22] Mangasarian, O. L., (2015). A hybrid algorithm for solving the absolute value equation. Optimization Letters, 9(7), 1469-1474.
[23] Moosaei, H., Ketabchi, S., Noor, M. A., Iqbal, J., Hooshyarbakhsh, V., (2015). Some techniques for solving absolute value equations. Applied Mathematics and Computation, 268, 696-705.
[24] Noor, M. A., Iqbal, J., Al-Said, E., (2012). Residual iterative method for solving absolute value equations. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012). Hindawi.
[25] Noor, M. A., Iqbal, J., Khattri, S., Al-Said, E., (2011). A new iterative method for solving absolute value equations. International Journal of Physical Sciences, 6(7), 1793-1797.
[26] Noor, M. A., Iqbal, J., Noor, K. I., Al-Said, E., (2012). On an iterative method for solving absolute value equations. Optimization Letters, 6(5), 1027-1033.
[27] Rohn, J., (2009). On unique solvability of the absolute value equation. Optimization Letters, 3(4), 603-606.
[28] Rohn, J., (2012). An algorithm for computing all solutions of an absolute value equation. Optimization Letters, 6(5), 851-856.
[29] Rohn, J., (2012). A theorem of the alternatives for the equation| Ax|−| B|| x|= b. Optimization Letters, 6(3), 585-591.
[30] Rohn, J., Hooshyarbakhsh, V., Farhadsefat, R., (2014). An iterative method for solving Absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability. Optimization Letters, 8(1), 35-44.
[31] Salkuyeh, D. K., (2014). The Picard–HSS iteration method for absolute value equations. Optimization Letters, 8(8), 2191-2202.
[32] Ketabchi, S., Moosaei, H., (2012). Optimal error correction and methods of feasible directions. Journal of Optimization Theory and Applications, 154(1), 209-216.
[33] Ketabchi, S., & Moosaei, H., (2012). An efficient method for optimal correcting of absolute value equations by minimal changes in the right hand side. Computers & Mathematics with Applications, 64(6), 1882-1885.
[34] Ketabchi, S., & Moosaei, H., (2012). Minimum norm solution to the absolute value equation in the convex case. Journal of Optimization Theory and Applications, 154(3), 1080-1087.
[35] Moosaei, H., Ketabchi, S., Jafari, H., (2015). Minimum norm solution of the absolute value equations via simulated annealing algorithm. Afrika Matematika, 26(7-8), 1221-1228.
[36] Evtushenko, Y. G., Golikov, A. I., Mollaverdy, N., (2005). Augmented Lagrangian method for large-scale linear programming problems. Optimization Methods and Software, 20(4-5), 515-524.
[37] Chen, C., Mangasarian, O. L., (1996). A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems. Computational Optimization and Applications, 5(2), 97-138.
[40] Li, X., Shi, J., Dong, X., Yu, J., (2019). A new conjugate gradient method based on Quasi-Newton equation for unconstrained optimization. Journal of Computational and Applied Mathematics, 350, 372-379.
[41] Mangasarian, O. L., (2004). A Newton method for linear programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 121(1), 1-18.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.5.4]