مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۲)، پاییز ۹۸، ص ص ۶۸-۵۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

برخی نتایج دوگانی در مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری

داود درویشی سلوکلایی [۱*]
استادیار، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۶ آذر ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۳۱ فروردین ۱۳۹۸

چکیده

برای مواجهه با عدم قطعیت داده‌ها و توصیف مناسب پارامترها و ضرایب نادقیق در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی رویکردهای مختلفی ارایه‌شده است. یکی از آن‌ها استفاده از نظریه سیستم‌های خاکستری در مدل‌سازی این‌گونه مسایل است. به‌ویژه، اخیراً برنامه ریزی خطی خاکستری محققان زیادی را به خود جلب کرده است. در این مقاله، نوعی از برنامه‌ریزی خطی با ضرایب خاکستری موردبحث قرار می‌گیرد. ضمن معرفی دوگان مساله برنامه‌ریزی خاکستری، با استفاده از مفهوم کاربردی سفیدسازی اعداد خاکستری، برخی روابط بین مساله اولیه و دوگان این مسایل ارایه می‌شود. همچنین مدل پارامتری و مساله سفید شده برنامه‌ریزی خطی خاکستری بررسی و مقایسه شدند. روابط میان جواب‌های برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان در محیط خاکستری بررسی‌شده و برخی نتایج به‌دست‌آمده با ارایه مثالی گزارش می‌شود.

کلمات کلیدی: عدد خاکستری بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی خاکستری، دوگان برنامه‌ریزی خطی خاکستری، عدد سفیدشده، عدم قطعیت.

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی خطی یکی از روش‌هایی است که از دیرباز برای مدل‌سازی مسایل مورداستفاده قرارگرفته است؛ ولی به دلیل نیاز به اطلاعات و داده‌های دقیق در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی نتایج قابل قبولی ارایه نمی‌دهد. در جهان واقعی بسیاری از اطلاعات ناشناخته هستند. این اطلاعات نادقیق و مبهم معمولاً توسط اعداد قطعی بیان می‌شوند که با توجه و در نظرگرفتن عدم قطعیت [۲] مناسب نخواهد بود. اکثر روش‌های قبلی که به بررسی برنامه‌ریزی خطی در محیط عدم قطعیت پرداخته‌اند، عبارت‌اند از: برنامه‌ریزی خطی فازی [۱]، برنامه‌ریزی خطی تصادفی، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، که کمبود ذاتی در داده‌های در دسترس، الگوریتم‌های حل، نیازمندی‌های محاسباتی و تفسیر نتایج ممکن است مشکلاتی را در کاربردهایشان و یا گسترش بیش‌تر آن‌ها ایجاد کند؛ بنابراین، یک رویکرد بالقوه برای کاهش این کمبودها معرفی مفاهیم نظریه سیستم‌های خاکستری [۳] و

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: d_darvishi@pnu.ac.ir

[2] Uncertain
[3] Grey System Theory

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

تصمیم‌گیری خاکستری در چارچوب برنامه‌ریزی خطی معمولی است که منجر به فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی خاکستری شده است. نظریه سیستم‌های خاکستری اولین بار توسط پروفسور دنگ[1] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد [۲]. برنامه‌ریزی خاکستری یکی از روش‌های تحلیل سیستم‌های خاکستری، برای تصمیم‌گیری تحت شرایط عدم قطعیت است. نظریه سیستم‌های خاکستری، کاربرد وسیعی داشته و توسعه خوبی پیداکرده است [۳-۶]. ازجمله این زمینه‌ها می‌توان به رشته‌های مختلف مهندسی، علوم اجتماعی، اقتصاد، مدیریت، هواشناسی، زمین‌شناسی و محیط‌زیست و... اشاره کرد. ریاضیات بازه‌ای بیش‌تر برای مواجهه با خطاهای اندازه‌گیری، خطاهای محاسباتی، تلورانس‌ها و محاسبات جبری و ماشینی به کار گرفته‌شده است؛ درحالی‌که نظریه سیستم‌های خاکستری شامل مدل‌سازی خاکستری، پیش‌بینی خاکستری، تصمیم‌گیری خاکستری، کنترل خاکستری است. برنامه‌ریزی خطی خاکستری[2] موردبحث در این مقاله درواقع تصمیم‌گیری در محیط خاکستری است که اخیراً موردتوجه محققان و پژوهشگران قرارگرفته است. در برنامه‌ریزی خاکستری اطلاعات خاکستری (پارامتر متعلق به یک بازه) به‌جای اطلاعات سفید (پارامتر ثابت) به کار می‌رود. برنامه‌ریزی خاکستری با برنامه‌ریزی بازه‌ای متفاوت است. تفاوت اصلی برنامه خاکستری و برنامه‌ریزی بازه‌ای مفهوم پارامتر خاکستری و پارامتر بازه‌ای است. پارامتر خاکستری، پارامتری است که متعلق به یک بازه است؛ اما پارامتر بازه‌ای یک مجموعه به شکل یک بازه است. علی‌رغم این‌که تمرکز ریاضیات بازه‌ای و نظریه سیستم‌های خاکستری بر موضوعاتی است که دارای محدوده و بازه‌ی مشخص می‌باشند؛ اما تفاوت‌های ظریفی بین اعداد خاکستری و اعداد بازه‌ای وجود دارد که لی و لیو [۷] تفاوت میان اعداد خاکستری و اعداد بازه‌ای را به‌طور کامل بحث و بررسی کرده‌اند. در زمینه نظریه سیستم‌های خاکستری دنگ [۸-۹] ضمن تشریح و توصیف سیستم‌های خاکستری و اعداد خاکستری به تصمیم‌گیری در موقعیت‌های خاکستری پرداخت. زنگ و لویس [۱۰] در مطالعه‌ای به ارایه مفهوم بهینه‌سازی سیستم‌های خاکستری پرداخته و به‌وسیله تحلیل نظری و مثال‌های عددی نشان دادند که مفهوم ارایه‌شده منطقی و معنادار است. چن و همکاران [۱۱] در مطالعه‌ای ضمن توصیف استفاده نظریه سیستم‌های خاکستری در مسایل برنامه‌ریزی ریاضی به مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پرداختند. همچنین استفاده از اعداد خاکستری بازه‌ای و پیش‌بینی خاکستری را در این مدل‌ها توسعه دادند که نتایج نسبت به مدل‌های قبلی در این زمینه رضایت‌بخش بوده است. لیو و همکاران [۱۲] در مطالعه‌ای به ارایه جواب‌های مکانی برای برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری پرداختند که با تبدیل این‌گونه مسایل به چندین مساله برنامه‌ریزی خطی معمولی آن را حل کرده‌اند. رضوی و همکاران [۱۳] یک رویکرد چندهدفه برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری ارایه دادند که محمودی و همکاران [۱۴] با ارایه یک روش رتبه‌بندی مناسب‌تر آن را اصلاح کردند. لی و همکاران [۱۵] یک رویکرد مبتنی بر ماتریس وارون و روابط کلیدی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری ارایه دادند. ناصری و همکاران [۱۶] نیز یک روش حل برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب هزینه خاکستری ارایه دادند که مساله را به‌طور مستقیم و با استفاده از روابط و حساب خاکستری حل می‌کند. ناصری و همکاران [۱۷] یک روش جدید

[1] Deng Ju-Long
[2] Grey Linear Programming

برای مسایل تخصیص خاکستری ارایه کردند که بدون تبدیل پارامترها به نوع سفید شده مساله را حل کردند. درویشی و همکاران [۱۸] از نظریه سیستم‌های خاکستری و برنامه‌ریزی خاکستری برای حل مسایل تنظیم جیره خوراکی دام استفاده کردند و یک مدل برای این کار در محیط عدم قطعیت ارایه دادند که به واقعیت نزدیک‌تر است. با توجه به اهمیت نظریه دوگانی در برنامه‌ریزی خطی، مطالعات زیادی در زمینه نظریه دوگانی در محیط عدم قطعیت انجام‌نشده است. برای نمونه چندین مقاله در مورد نظریه دوگانی در مساله برنامه‌ریزی خطی فازی انجام‌شده است [۱۹-۲۱]؛ اما در زمینه مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری و کاربردهای آن، کار روی مفاهیم بنیادی نظریه دوگانی و جنبه‌های مختلف آن تاکنون ناقص مانده است [۲۲]. اخیراً ناصری و درویشی مطالعه‌ای در زمینه دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری انجام دادند و برخی نتایج مفید در این زمینه را گزارش کرده‌اند [۲۳].

بر این اساس این مقاله قصد دارد رده‌ای از مسایل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری را موردبحث قرار داده و برخی از مفاهیم نظری و روش‌های حل مساله را بیان نماید؛ لذا در این مطالعه، با توجه به مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری برای مواجهه با عدم قطعیت موجود در استفاده از مساله برنامه‌ریزی خطی در دنیای واقعی، به رویکرد دوگانی این‌گونه مسایل پرداخته می‌شود. مدل سفید شده و مدل پارامتری مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری نیز بررسی می‌گردد. به این منظور پس از بیان مقدمه، در بخش دوم نظریه سیستم‌های خاکستری معرفی می‌شود. در بخش سوم مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری و مدل سفید شده آن بیان می‌گردد. مساله دوگانی برنامه‌ریزی خطی خاکستری و روابط میان مساله اولیه و دوگان آن در فصل چهارم ارایه می‌شود. در بخش پنجم، مدل پارامتری برنامه‌ریزی خطی خاکستری و ارتباط آن با مدل سفید شده مساله بررسی و نتایج آن بیان می‌گردد. در بخش ششم با ارایه مثالی نتایج به‌دست‌آمده بررسی خواهد شد. در پایان نیز نتایج و پیشنهادها مطرح می‌شود.

۲ نظریه سیستم‌های خاکستری

در دنیای واقعی داده‌های جمع‌آوری‌شده معمولاً شامل عدم قطعیت هستند؛ بنابراین به‌کارگیری روش‌های قطعی در محیط نادقیق برای تصمیم‌سازی بهینه مناسب نخواهد بود. رویکردهای مختلفی درزمینه‌ی مواجهه با عدم قطعیت معرفی شده است. نظریه سیستم‌های خاکستری، نظریه احتمال، نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه راف چهار روش علمی برای بررسی سیستم‌های نادقیق شناخته‌شده هستند. ریاضیات فازی به‌طورکلی با مسایلی مواجه است که عدم قطعیت موجود در آن توسط خبرگان به‌وسیله توابع عضویت گسسته/پیوسته قابل بیان است. آمار و احتمال نیز به توابع توزیع و نمونه‌گیری بالا برای رسیدن به روایی لازم نیاز دارد. زمانی که نتوان تابع توزیع یا تابع عضویت را به دلیل کمبود داده ها یا اطلاعات ناقص مشخص یا استخراج کرد، بررسی و مطالعه نظریه توسعه‌یافته‌ای همچون نظریه سیستم‌های خاکستری ضروری می‌نماید. ازاین‌رو در این بخش به معرفی مختصری از این نظریه پرداخته می‌شود. مطالعاتی در زمینه معرفی و مفاهیم بنیادی نظریه سیستم‌های خاکستری و کاربردهای آن ارایه‌شده است که می‌توان به [۲۴-۲۹] اشاره کرد. سیستم‌های خاکستری بر پایه رنگ موضوعات تحت

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

بررسی نام‌گذاری شده است. برای مثال، در نظریه کنترل، میزان تاریکی رنگ‌ها، نشان‌دهنده میزان وضوح اطلاعات و داده‌ها است. بر این اساس سیستم‌های با اطلاعات کاملاً معلوم را سیستم سفید، سیستم‌های با اطلاعات ناشناخته یا بدون داده را سیستم سیاه و سیستم‌های با اطلاعات بخشی معلوم و بخشی ناشناخته را سیستم خاکستری می‌نامند.

در دنیای واقعی سیستم‌هایی هستند که از نمونه‌های کوچک استفاده می‌کنند و دارای اطلاعات کافی نیستند. نظریه سیستم‌های خاکستری برای مطالعه مسایلی با نمونه‌های کوچک و اطلاعات ضعیف مناسب است. هر سیستم خاکستری به‌وسیله اعداد، معادلات و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود که در این میان اعداد خاکستری[1] به‌مثابه اتم‌ها و سلول‌های این سیستم هستند. یک عدد خاکستری می‌تواند به‌صورت $\otimes a \in [\underline{a}, \overline{a}]$ تعریف شود.

تعریف ۲-۱ عدد خاکستری عددی است که مقدار دقیق آن معلوم نیست؛ اما محدوده‌ای که در آن قرار می گیرد مشخص است. در حقیقت، عدد خاکستری عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه‌ای از اعداد اتخاذ می کند.

انواع مختلفی از اعداد خاکستری وجود دارند. اعداد خاکستری می‌توانند فقط با کران پایین به شکل $\otimes a \in [\underline{a}, \infty)$ یا فقط با کران بالا به شکل $\otimes a \in (-\infty, \overline{a}]$ باشند و یا اینکه هم دارای کران پایین $\underline{a}$ و هم دارای کران بالا $\overline{a}$ باشند که در این صورت عدد خاکستری بازه‌ای نامیده می‌شود و به‌صورت $\otimes a \in [\underline{a}, \overline{a}]$ نمایش داده می‌شود. اعداد خاکستری مشابه با اعداد فازی هستند؛ اما تفاوت اساسی بین اعداد خاکستری با اعداد فازی در آن است که در اعداد خاکستری مقدار دقیق عدد نامشخص است؛ اما بازه‌ای که مقدار آن عدد را دربرمی گیرد معلوم است یا به تعبیر دیگر مقدار دقیق کران پایین و کران بالا عدد معین و معلوم است.

تعریف ۲-۲ مقدار سفیدشده[2] عدد خاکستری $\otimes a \in [\underline{a}, \overline{a}]$، همانند عدد مشخصی که بین کران پایین و کران بالا قرار دارد، به شکل $\tilde{\otimes} a = \alpha \underline{a} + (1-\alpha)\overline{a}$، $\alpha \in [0,1]$ سفیدشده وزنی همگن نامیده می‌شود.

اگر دو عدد خاکستری $\otimes G_1 = [\underline{a}_1, \overline{a}_1]$ و $\otimes G_2 = [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ با فرض $\underline{a}_1 < \overline{a}_1$ و $\underline{a}_2 < \overline{a}_2$ باشند، می‌توان مفاهیم مربوط به روابط بین اعداد خاکستری را برای اعداد خاکستری بازه‌ای به‌صورت زیر بیان نمود:

۱) مجموع دو عدد خاکستری $\otimes G_1 + \otimes G_2 \in [\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \overline{a}_1 + \overline{a}_2]$

۲) تفاضل دو عدد خاکستری $\otimes G_1 - \otimes G_2 = \otimes G_1 + (-\otimes G_2) \in [\underline{a}_1 - \overline{a}_2, \overline{a}_1 - \underline{a}_2]$

۳) حاصل‌ضرب دو عدد خاکستری

$$\otimes G_1 \times \otimes G_2 \in [\min(\underline{a}_1\underline{a}_2, \underline{a}_1\overline{a}_2, \overline{a}_1\underline{a}_2, \overline{a}_1\overline{a}_2), \max(\underline{a}_1\underline{a}_2, \underline{a}_1\overline{a}_2, \overline{a}_1\underline{a}_2, \overline{a}_1\overline{a}_2)]$$

۴) تقسیم دو عدد خاکستری

$$\otimes G_1 \div \otimes G_2 \in [\underline{a}_1, \overline{a}_1] \times [\frac{1}{\overline{a}_2}, \frac{1}{\underline{a}_2}] = [\min(\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_2}, \frac{\overline{a}_1}{\underline{a}_2}, \frac{\underline{a}_1}{\overline{a}_2}, \frac{\underline{a}_1}{\underline{a}_2}), \max(\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_2}, \frac{\overline{a}_1}{\underline{a}_2}, \frac{\underline{a}_1}{\overline{a}_2}, \frac{\underline{a}_1}{\underline{a}_2})]$$

[1] Grey Number
[2] Whitened Value

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

تعریف ۲-۳ ماتریس خاکستری، ماتریسی است که حداقل یکی از درایه‌های آن عدد خاکستری باشد. در این مقاله عدد خاکستری در حالت کلی به‌صورت $\otimes a$ و سفید شده آن به‌صورت $\tilde{\otimes} a$ نمایش داده می‌شود. همچنین $\otimes$A ماتریس و $\otimes$b و $\otimes$C بردار خاکستری می‌باشند.

۳ برنامه‌ریزی خطی خاکستری

برنامه‌ریزی خطی به‌عنوان کاربردی‌ترین مدل تصمیم‌گیری در مسایل واقعی موردتوجه بوده است. در اکثر این‌گونه مسایل تعیین دقیق ضرایب مساله با نوعی ابهام همراه خواهد بود. با توجه به محیط عدم قطعیت اگر بتوان این ابهام را با اعداد خاکستری بیان کرد، مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری ایجاد خواهد شد. در این بخش به معرفی برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری پرداخته می‌شود. مساله سفید شده آن مطرح و برخی نتایج در این زمینه ارایه می‌گردد.

شکل کلی مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$(\mathrm{GL})\quad \begin{cases} \mathrm{Max}\ \ \mathrm{Z} = \otimes \mathrm{C.X} \\ s.t. \\ \otimes \mathrm{A.X} \leq_{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{b} \\ \mathrm{X} \geq ۰ \end{cases}$$

که در آن پارامترها و متغیرها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} &\otimes C = (c_۱, c_۲, ..., c_n),\ \ c_j \in [\underline{c}_j, \overline{c}_j], \\ &\otimes \mathrm{A} = (a_{ij})_{m\times n},\ \ a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], \\ &\otimes b = (b_۱, b_۲, ..., b_m),\ \ b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \\ &X = (x_۱, x_۲, ..., x_n),\ \ i = ۱, ۲, ..., m,\ \ \ j = ۱, ۲, ..., n. \end{aligned}$$

تعریف ۳-۱ فرض کنید $\rho_j, \beta_i, \delta_{ij} \in [۰, ۱], i = ۱, ..., m;\ j = ۱, ..., n.$ و مقادیر سفیدشده پارامترهای خاکستری به ترتیب به‌صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} &\tilde{\otimes} c_j = \rho_j \overline{c}_j + (۱ - \rho_j)\underline{c}_j;\ j = ۱, ..., n. \\ &\tilde{\otimes} b_i = \beta_i \overline{b}_i + (۱ - \beta_i)\underline{b}_i; i = ۱, ..., m. \\ &\tilde{\otimes} a_{ij} = \delta_{ij} \overline{a}_{ij} + (۱ - \delta_{ij})\underline{a}_{ij}; i = ۱, ..., m;\ j = ۱, ..., n. \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{\otimes}\mathrm{A}, \tilde{\otimes}\mathrm{b}, \tilde{\otimes}\mathrm{C}$ به ترتیب بردار سفید شده هزینه، محدودیت منابع و ماتریس سفید شده مصرف هستند. آنگاه:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\ \mathrm{Z} = \tilde{\otimes} \mathrm{C.X} \\ &s.t. \begin{cases} \tilde{\otimes} \mathrm{A.X} \leq \tilde{\otimes} \mathrm{b} \\ \mathrm{X} \geq ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود. به‌طوری‌که $\beta_i\,(i=1,...,m)$ ضرایب سفیدسازی بردار هزینه، $\rho_j\,(j=1,...,n)$ ضرایب سفیدسازی بردار محدودیت منابع و $\delta_{ij}(i=1,...,m;\, j=1,...,n)$ ضرایب سفیدسازی ماتریس مصرف است.

تاکنون روش‌های مختلفی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری ارایه شد [۱۱-۱۶]. در این مقاله برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری، به تعریف دو مساله برنامه‌ریزی خطی مرتبط زیر نیازمندیم.

تعریف ۳-۲ اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه به‌صورت زیر است:

$$(FP)\ \begin{cases}\text{Max } Z=\bar{c}.\text{X}\\ s.t.\ \underline{A}X\le\bar{b}\\ X\ge 0\end{cases}$$

که در آن $\bar{c}=(\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_n)$، $\underline{A}=[\underline{a}_{ij}]_{m\times n}$، $\bar{b}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_m)^T$، $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ می‌باشند.

تعریف ۳-۳ دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(\text{SP})\ \begin{cases}\text{Max Z}=\underline{\text{c}}.\text{X}\\ s.t.\ \bar{\text{A}}.\text{X}\le\underline{\text{b}}\\ \text{X}\ge 0\end{cases}$$

که در آن $\underline{c}=(\underline{c}_1,\underline{c}_2,...,\underline{c}_n)$، $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{m\times n}$، $\underline{b}=(\underline{b}_1,\underline{b}_2,...,\underline{b}_m)$، $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ می‌باشند.

تعریف ۳-۴ نقطه x را جواب شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری گوییم، هرگاه $\otimes\text{b}$ و $\otimes\text{A}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\otimes\text{A.X}\le_{\text{G}}\otimes\text{b},\ \text{X}\ge 0$ برقرار باشد.

مجموعه تمام جواب‌های شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری، ناحیه جواب خاکستری مساله نامیده و با R(GL) نشان داده می‌شود.

تعریف ۳-۵ نقطه x_0 را جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری گوییم هرگاه $\otimes\text{b}$، $\otimes\text{A}$ و $\otimes\text{C}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که در مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده زیر صدق کنند:

$$\tilde{\text{G}}\text{L}\ \begin{cases}\text{Max Z}=\tilde{\otimes}\text{C.X},\\ s.t.\ \tilde{\otimes}\text{A.X}\le\tilde{\otimes}\text{b},\\ \text{X}\ge 0\,.\end{cases}$$

مجموعه تمام جواب‌های بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را با S(GL) نشان می‌دهند.

لم ۳-۱ فرض کنید x_1 جواب بهینه اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و x_2 جواب بهینه دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{c}x_1=\max\{\tilde{\otimes}cx\,|\,x\in S(GL)\},\ \ \underline{c}x_2=\min\{\tilde{\otimes}cx\,|\,x\in S(GL)\}.$$

لم۳-۲ برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری، مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده‌ای وجود دارد که رابطه $\mathrm{R(SP)} \subseteq \mathrm{R}(\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{L}) \subseteq \mathrm{R(FP)}$ برقرار خواهد بود.

اثبات: با توجه به قضیه ۱-۴ [۱۲] به‌راحتی قابل‌اثبات است.

حال با توجه به اهمیت نظریه دوگانی در مسایل برنامه‌ریزی خطی به بحث نظریه دوگانی در مساله برنامه‌ریزی خطی در محیط عدم قطعیت خاکستری خواهیم پرداخت. ابتدا دوگان مساله خاکستری تعریف می‌گردد، سپس با توجه به مفهوم عدد سفیدشده در نظریه سیستم‌های خاکستری به برخی روابط بین جواب‌های مساله اولیه و دوگان این‌گونه مسایل پرداخته می‌شود.

٤ دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری زیر را در نظر بگیرید:

$$(\mathrm{DGL})\ \begin{cases} \mathrm{Min\ W} = \otimes \mathrm{b.V}, \\ s.t.\ \ \otimes \mathrm{A.V} \geq \otimes \mathrm{c}, \\ \mathrm{V} \geq \circ . \end{cases}$$

که در آن $V=(v_۱, v_۲, ..., v_m)^T$ یک بردار $(m\times ۱)$ ستونی مستقل خطی است.

برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان خواهیم داشت:

تعریف ٤-١ اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(FD)\ \begin{cases} \mathrm{MinW} = \underline{b}^T v, \\ s.t.\ \ \bar{A} v \geq \underline{c}^T, \\ v \geq \circ . \end{cases}$$

تعریف٤-۲ دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان به‌صورت زیر است:

$$(SD)\ \begin{cases} \mathrm{Min}\, W = \bar{b}^T v, \\ s.t.\ \ \underline{A}^T v \geq \bar{c}^T, \\ v \geq \circ . \end{cases}$$

در ادامه به بحث مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه و دوگان و همچنین برخی روابط بین جواب‌های آن‌ها پرداخته می‌شود.

لم ٤-١ اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه، دوگان دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان است و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی

سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه، دوگان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان است.

قضیه ٤-١ هرگاه $R(SP)$ و $R(FP)$ ناتهی باشند، آنگاه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری، جواب بهینه دارد.

اثبات: با توجه به لم ۳-۲ داریم که $R(SP) \subseteq R(\tilde{G}L) \subseteq R(FP)$. ازآنجاکه $R(SP)$ ناتهی است، خواهیم داشت: $R(\tilde{G}L) \neq \varnothing$ و درنتیجه $\forall x \in R(\tilde{G}L), x_0 \in S(FP)$. با توجه به لم ۳-۱ داریم:

$$\tilde{\otimes} c^T x \leq \bar{c}^T x \leq \bar{c}^T x_0 \Rightarrow S(\tilde{G}L) \neq \varnothing.$$

قضیه ٤-۲ اگر $R(SD)$ و $R(\tilde{G}L)$ ناتهی باشند، آنگاه مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه جواب بهینه دارد و اگر $R(SP)$ و $R(D\tilde{G}L)$ ناتهی باشند، آنگاه مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان جواب بهینه دارد.

اثبات: اگر $R(SD)$ ناتهی باشد، فرض کنید که $R(\tilde{G}L)$ ناتهی باشد، آنگاه، $v_0 \in R(SD)$ و $x \in R(\tilde{G}L)$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $\tilde{\otimes} c^T x \leq \bar{c}^T x \leq (\underline{A}^T v_0)^T x = v_0^T \underline{A} x \leq v_0^T \tilde{\otimes} A x \leq v_0^T \tilde{\otimes} b$ ازاین‌رو $S(\tilde{G}L)$ ناتهی خواهد بود. به همین دلیل، نتیجه دوم نیز به دست می‌آید. ■

قضیه ٤-۳ شرط لازم وکافی برای این‌که مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه و دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دارای جواب بهینه باشد این است که $R(SP)$ و $R(SD)$ ناتهی باشند.

اثبات: شرط لازم آن بدیهی است. شرط کافی بودن: فرض کنید $R(SP)$ ناتهی باشد. مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $R(\tilde{G}L)$ ناتهی باشد. از آن خواهیم داشت: $R(FP)$ و $R(SD)$ ناتهی خواهند بود. حال با توجه به قضیه ۴-۲ خواهیم داشت: $S(\tilde{G}L)$ ناتهی است که نشان می‌دهد مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه جواب بهینه دارد. به دلیل مشابه، برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان نیز خواهیم داشت که $S(D\tilde{G}L)$ ناتهی خواهد بود.

قضیه ٤-٤ اگر مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دارای جواب بهینه باشد، آنگاه مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی دوگان آن نیز جواب بهینه دارد.

اثبات: درواقع، هر مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دارای یک مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان است. آنگاه به‌وسیله اصل دوگانی مسایل برنامه‌ریزی خطی، وقتی‌که مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه جواب بهینه دارد، مساله دوگان آن نیز جواب بهینه دارد.

با در نظر گرفتن تمام قضیه‌ها، برای هر مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه و مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان روابط زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر $S(GL)$ و $S(DGL)$ ناتهی باشند، آنگاه مجموعه جواب بهینه خاکستری مساله ناتهی است.

۲) اگر $R(GL)$ و $R(DGL)$ ناتهی باشند، آنگاه مجموعه جواب شدنی مساله ناتهی است.

۳) اگر مساله برنامه ریزی خطی خاکستری جواب شدنی داشته باشد، اما تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری سفیدشده در فضای شدنی بی‌کران باشد، مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان آن جواب شدنی ندارد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

ازاین‌رو می‌توان گفت که مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه و مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری دوگان یک زوج مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری هستند که دوبه‌دو دوگان یکدیگرند.

فرض کنید x_1 جواب بهینه اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و x_2 جواب بهینه دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه باشند و همچنین داشته باشیم: $f_1 = \bar{c}^T x_1,\ f_2 = \underline{c}^T x_2$.

قضیه ٤–٥ مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری در بازه $[f_2, f_1]$ قرار دارد.

اثبات: از لم ۳-۲ داریم: $R(SP) \subseteq R(\tilde{G}L) \subseteq R(FP)$. که در آن $\tilde{G}L$ مساله سفیدشده برنامه‌ریزی خطی خاکستری مساله اصلی می‌باشد. مقدار تابع هدف مساله به‌صورت $\tilde{f} = \tilde{\otimes} c^T x'$ خواهد بود و داریم: $f_2 = \underline{c}^T x_2 \leq \tilde{\otimes} c^T x_2 \leq \tilde{f} = \tilde{\otimes} c^T x' \leq \bar{c}^T x_1 = f_1$. پس خواهیم داشت: $\tilde{f} \in [f_2, f_1]$.

نکته ٤–۱ مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری شباهت زیادی با مدل برنامه‌ریزی ریاضی بازه‌ای دارد. هرچند ویژگی‌های مفهومی آن‌ها، الگوریتم‌های حل، کاربردهای عملی به‌طور معناداری از یکدیگر متفاوت هستند. تفاوت‌های اعداد بازه‌ای و اعداد خاکستری در مرجع [۷] آمده است.

۵ مدل پارامتری برنامه‌ریزی خطی خاکستری

مساله برنامه‌ریزی خطی پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$
\mathrm{p}(\alpha)\ \begin{cases} \operatorname{Max} Z = c(\alpha)^T x \\ s.t. A(\alpha) x \leq b(\alpha) \\ x \geq 0 \end{cases}
$$

که در آن $c(\alpha), b(\alpha)$ و $A(\alpha)$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
&c(\alpha) = \underline{c} + \alpha(\bar{c} - \underline{c}), \\
&b(\alpha) = \underline{b} + \alpha(\bar{b} - \underline{b}), \\
&A(\alpha) = \bar{A} - \alpha(\bar{A} - \underline{A}), \\
&x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, 0 \leq \alpha \leq 1.
\end{aligned}
$$

واضح است که $P(0)$ همان دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و $P(1)$ همان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفید شده اولیه است و برای هر ثابت $\alpha \in [0,1]$، $P(\alpha)$ مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مرتبط با مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری است.

قضیه ٥–۱ برای هر $\tilde{f} \in [f_2, f_1]$ باید مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\tilde{f}$ مقدار بهینه آن باشد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

اثبات: برای مساله برنامه‌ریزی خطی پارامتری $P(\alpha)$، ازآنجاکه تابع هدف و محدودیت‌ها $c(\alpha)^T x$، $A(\alpha)x$ و $b(\alpha)$ توابعی پیوسته هستند، مقدار بهینه تابع هدف $Z^*(\alpha)$ برای هر α پیوسته خواهد بود. به‌وضوح $Z^*(۰) = f_۲, Z^*(۱) = f_۱$.

برای گرفتن هر $\tilde{f} \in [f_۲, f_۱]$ باید $\alpha_۰ \in [۰,۱]$ وجود داشته باشد که $Z^*(\alpha_0) = \tilde{f}$ و $\tilde{f}$ مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده $\tilde{f} \in [f_۲, f_۱]$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = c(\alpha_۰)^T x, \\ s.t.\ A(\alpha_۰)x \le b(\alpha_۰), \\ x \ge ۰. \end{cases}$$

که $[f_۲, f_۱]$ بازه مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری است.

اثبات قضیه ۵-۱ نشان می‌دهد که مساله برنامه‌ریزی خطی پارامتری $P(\alpha)$ بخش مهمی از مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری است. به‌این‌ترتیب لازم است به برخی از بحث‌های مساله برنامه‌ریزی خطی پارامتری بپردازیم:

لم ۵-۱ برای هر $\alpha_۱, \alpha_۲ \in [۰,۱]$ که $\alpha_۱ \le \alpha_۲$ خواهیم داشت:

$$R(\alpha_۱) \subseteq R(\alpha_۲)$$

که در آن $R(\alpha_۲), R(\alpha_۱)$ به ترتیب نمایش ناحیه موجه $P(\alpha_۱)$ و $P(\alpha_۲)$ است.

اثبات: برای هر $\alpha_۱, \alpha_۲ \in [۰,۱]$ که $\alpha_۱ \le \alpha_۲$ باشد، برای $x \in R(\alpha_۱)$ داریم:

$$[\bar{A} - \alpha_۲(\bar{A} - \underline{A})]x = [\bar{A} - \alpha_۱(\bar{A} - \underline{A})]x + (\alpha_۱ - \alpha_۲)(\bar{A} - \underline{A})x$$
$$\le \underline{b} + \alpha_۱(\bar{b} - \underline{b}) + (\alpha_۱ - \alpha_۲)(\bar{A} - \underline{A})x \le \underline{b} + \alpha_۱(\bar{b} - \underline{b}) \le \underline{b} + \alpha_۲(\bar{b} - \underline{b}).$$

و این؛ یعنی $x \in R(\alpha_۲)$ درنتیجه خواهیم داشت: $R(\alpha_۱) \subseteq R(\alpha_۲)$.

همچنین در معادله فوق ازآنجاکه $x \ge ۰$، $(\alpha_۱ - \alpha_۲) \le ۰$ و $(\bar{A} - \underline{A}) \ge ۰$ خواهیم داشت:

$$(\alpha_۱ - \alpha_۲)(\bar{A} - \underline{A})x \le ۰$$

قضیه ۵-۲ مقدار بهینه تابع هدف $Z^*(\alpha)$ برای α تابع یکنواست.

برای مثال برای هر $\alpha_۱, \alpha_۲ \in [۰,۱]$ که $\alpha_۱ \le \alpha_۲$ باشد خواهیم داشت: $Z^*(\alpha_۱) \le Z^*(\alpha_۲)$.

اثبات: فرض کنید $\alpha_۱, \alpha_۲ \in [۰,۱]$ که $\alpha_۱ \le \alpha_۲$، از لم ۵-۱ داریم:

$$\underline{c} + \alpha_۱(\bar{c} - \underline{c}) \le \underline{c} + \alpha_۲(\bar{c} - \underline{c})$$
$$c(\alpha_۱) \le c(\alpha_۲), x \ge ۰.$$
$$Z^*(\alpha_۱) = \max_{x \in R(\alpha_۱)} c(\alpha_۱)^T x \le \max_{x \in R(\alpha_۱)} c(\alpha_۲)^T x \le \max_{x \in R(\alpha_۲)} c(\alpha_۲)^T x = Z^*(\alpha_۲),$$
$$Z^*(\alpha_۱) \le Z^*(\alpha_۲).$$

همان‌طور که در بحث‌های بالا دیده می‌شود تعریف اولین و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری کلید حل آن است. با حل اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده و دومین مساله

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

برنامه‌ریزی خطی سفیدشده یک دید کلی در مورد کران‌های جواب بهینه مساله اصلی به دست می‌آید. جواب بهینه مساله اصلی، ترکیبی از نقاط بهینه آن دو مساله است.

دامنه جواب‌های بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری به‌صورت بازه است. همچنین $Z^*(\alpha)$ مقدار بهینه تابع هدف $P(\alpha)$ یکنواست. در حقیقت مساله برنامه‌ریزی خطی پارامتری $P(\alpha)$ یک ابزار مناسب برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری است.

به‌عبارت‌دیگر برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری با استفاده از برنامه‌ریزی پارامتری می‌توان گفت ابتدا $Z^*(0)$ و $Z^*(1)$ را بیابید. حدود تغییرات جواب‌های مساله را به دست آورید. با توجه به یکنوایی $Z^*(\alpha)$، α_0 مناسب را انتخاب کنید $P(\alpha_0)$ را برای دستیابی به جواب رضایت‌بخش حل کنید.

٦ مثال عددی

با توجه به نتایج به‌دست آمده و برای روشن ساختن بحث‌های صورت گرفته به مثال زیر توجه کنید.

مثال ٦-۱ مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری زیر را در نظر بگیرید.

$$(GL)\quad \begin{cases} Max\ Z = \otimes c_1 x_1 + \otimes c_2 x_2 \\ s.t. \\ \otimes a_{11} x_1 + \otimes a_{12} x_2 \le \otimes\, b_1, \\ \otimes a_{21} x_1 + \otimes a_{22} x_2 \le \otimes b_2, \\ \otimes a_{31} x_1 + \otimes a_{32} x_2 \le \otimes b_3, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

که در آن پارامترها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\otimes c_1 \in [1,7], \otimes c_2 \in [4,12],$$
$$\otimes a_{11} \in [1,2]\ , \otimes a_{12} \in [4,10], \otimes a_{21} \in [4,6]\ , \otimes a_{22} \in [1,3]\ , \otimes a_{31} \in [1,3], \otimes a_{32} \in [-1,1]\ ,$$
$$\otimes b_2 \in [150,200], \otimes b_1 \in [200,240], \otimes b_3 \in [30,40].$$

مساله را به‌صورت زیر حل خواهیم کرد:

مرحله۱) اولین و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری اولیه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(SP)\ \begin{cases} Max\ Z = x_1 + 4x_2 \\ s.t. \\ 2x_1 + 10x_2 \le 200, \\ 6x_1 + 3\ x_2 \le 150\ , \\ 3x_1 + x_2 \le 30, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (FP)\ \begin{cases} Max\ Z = 7x_1 + 12x_2 \\ s.t. \\ x_1 + 4x_2 \le 240, \\ 4x_1 +\ x_2 \le 200\ , \\ x_1 - x_2 \le 40, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

مرحله۲) دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری به‌صورت زیر است:

$$(DGL)\quad \begin{cases} Min\ W = \otimes b_1 v_1 + \otimes b_2 v_2 + \otimes b_3 v_3 \\ s.t. \\ \otimes a_{11} v_1 + \otimes a_{21} v_2 + \otimes a_{31} v_3 \geq \otimes c_1, \\ \otimes a_{12} v_1 + \otimes a_{22} v_2 + \otimes a_{32} v_3 \geq \otimes c_2, \\ v_1, v_2, v_3 \geq 0. \end{cases}$$

اولین و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله دوگان خاکستری به‌صورت زیر خواهند بود:

$$(FD)\quad \begin{cases} Min\ W = 200 v_1 + 150 v_2 + 30 v_3 \\ s.t. \\ 2 v_1 + 6 v_2 + 3 v_3 \geq 1, \\ 10 v_1 + 3 v_2 + v_3 \geq 4, \\ v_1, v_2, v_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$(SD)\quad \begin{cases} Min\ W = 240 v_1 + 200 v_2 + 40 v_3 \\ s.t. \\ v_1 + 4 v_2 + v_3 \geq 7, \\ 4 v_1 + v_2 - v_3 \geq 12, \\ v_1, v_2, v_3 \geq 0. \end{cases}$$

مرحله۳) جواب بهینه اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه برابر است با $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{112}{3}, \frac{152}{3})$. جواب بهینه دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان به‌صورت $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (\frac{41}{15}, \frac{16}{15}, 0)$ است. مقدار بهینه هردو مساله $Z^* = W^* = 869$ است. از طرف دیگر جواب بهینه دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه برابر است با $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{25}{7}, \frac{135}{7})$ و همچنین جواب بهینه اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان به‌صورت $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (\frac{11}{28}, 0, \frac{1}{14})$ است. مقدار بهینه هردو مساله $Z^* = W^* = 81$ است؛ بنابراین مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری در بازه $[81, 869]$ است.

با حل این مسایل خواهیم داشت که اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله دوگان، دوگان دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان، دوگان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است.

مدل پارامتری مساله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
p(\alpha)\begin{cases}
Max\ Z=(1+6\alpha)x_1+(4+8\alpha)x_2\\
s.t.\\
(2-\alpha)x_1+(10-6\alpha)x_2\leq 200+40\alpha,\\
(6-2\alpha)x_1+(3-2\alpha)\ x_2\leq 150+50\alpha\ ,\\
(3-2\alpha)x_1+(1+2\alpha\ )x_2\leq 30+10\alpha,\\
x_1,x_2,x_3\geq 0.
\end{cases}
$$

در حقیقت $P(0)$ همان دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و $P(1)$ همان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است. مقدار بهینه $Z^*(0)=81$ و $Z^*(1)=869$ است. همچنین برای $\alpha=0/8$ جواب بهینه آن به‌صورت $(x_1^*,x_2^*)=(\frac{829}{26},\frac{12593}{338})$ و مقدار بهینه مساله نیز $Z^*(0/8)=556\in[81,869]$ خواهد بود.

۷ نتیجه‌گیری

در این پژوهش مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب خاکستری بازه‌ای موردبحث قرار گرفت. برخی از مفاهیم و تعاریف موردنیاز، مفهوم جواب شدنی و بهینه خاکستری ارایه شد. با استفاده از مفهوم سفیدسازی اعداد خاکستری، اولین و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری و همچنین ارتباط جواب‌های آن‌ها موردبحث قرار گرفت. نتایج نشان داده است که اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده مساله دوگان، دوگان دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است و دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده دوگان، دوگان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است. بررسی نتایج مقایسه مدل پارامتری و سفیدشده مدل برنامه‌ریزی خطی خاکستری نشان داد که در مدل پارامتری، مساله با ازای $\alpha=0$ دومین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه و برای $\alpha=1$ همان اولین مساله برنامه‌ریزی خطی سفیدشده اولیه است. با توسعه نتایج اخیر می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت خاکستری را نیز فراهم کرد. نتایج بیش‌تری ازجمله شرایط مکمل لنگی و قضایای ضعیف و قوی دوگانی در برنامه‌ریزی خاکستری توسط نویسنده در دست بررسی است.

منابع

[۱] ناصری، س. ه.، (۱۳۸۶). روش‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۳)، ۶۷-۷۶.

[۳] باغبان، ع.، امیری، م.، افت، ل.، شرفی آورزمان، ز.، (۱۳۹۳). ارزیابی و رتبه‌بندی پیمانکاران و ارتقاء پیمانکاران ناکارا با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری-مورد مطالعه پیمانکاران گروه مپنا. مجله تحقیق در عملیات درکاربردهای آن، ۹(۲)، ۲۱-۳۸.

[۴] ثابت مطلق، م.، صالحی صدقیانی، ج.، ایازی، س.ع.، عابدی نایینی، م.، (۱۳۹۳). ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان استراتژیک با استفاده از روش ترکیبی فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری. مجله تحقیق در عملیات درکاربردهای آن، ۱۱(۴)، ۱۰۱-۱۱۷.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]

[۵] جباری، ر.، صدقیانی، ج.ص.، امیری، م.، (۱۳۹۱). ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام. مجله تحقیق در عملیات درکاربردهای آن، ۹(۱)، ۱–۱۹.

[۶] ناصری، س.ه.، درویشی سلوکلایی، د.، (۱۳۹۴). مدل‌سازی جیره دام در شرایط عدم قطعیت با استفاده از رویکرد سیستم‌های خاکستری، مجله تحقیق در عملیات درکاربردهای آن، ۱۲(۴)، ۲۹–۴۷.

[2] Deng, J. L., (1982). The control problems of grey systems. Systems and Control Letters, 15, 288–294

[7] Li, Q. X. and Liu, S. F., (2008). The foundation of the grey matrix and the grey input-output analysis. Applied Mathematical Modelling, 32, 267–291.

[8] Deng J., (1985). Grey Control System. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press.

[9] Deng, J., (1989). Introduction to grey system theory. The Journal of Grey Systems. 1(1), 1-24.

[10] Zheng, Y. and Lewis R. W., (1993). On the optimization concept of grey systems. Applied Mathematical Modelling, 17, 388-392.

[11] Chen, Z., Chen, Q., Chen, W. and Wang, Y., (2004). Grey linear programming. Kybernetes, 33(2), 238-246.

[12] Liu, S., Dang, Y. and Forrest, J., (2009). On positioned solution of linear programming with grey parameters. Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, San Antonio, TX, USA, 11-14 October, 751-756.

[13] Razavi Hajiagha, S. H., Akrami, H. and Hashemi, S. S., (2012). A multi objective programming approach to solve grey linear programming. Grey Systems: Theory and Application, 2(2), 259-271.

[14] Mahmoudi, A., Feylizadeh, M. R. and Darvishi, D., (2018). A note on "A multi-objective programming approach to solve grey linear programming". Grey Systems: Theory and Application, 8(1), 35-45.

[15] Li, Q. X., Liu S. F. and Wang, N. A., (2014). Covered solution for a grey linear program based on a general formula for the inverse of a grey matrix. Grey Systems: Theory and Application, 4(1), 72-94.

[16] Nasseri, S. H., Yazdani, A. and Darvishi Salikolaei, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 121-141.

[17] Nasseri, S. H., Darvishi, D. and Yazdani, A., (2017). A new approach for solving grey assignment problems. Control and Optimization in Applied Mathematics, 2(1), 15-28.

[18] Darvishi. D., Liu, S. and Nasseri, S. H., (2018). A new approach in animal diet by grey system theory. Grey Systems: Theory and Application, 8(2), 167-180.

[19] Mahdavi-Amiri, N. and Nasseri, S. H., (2006). Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. Applied Mathematics and Computation, 180, 206- 216.

[20] Mahdavi-Amiri, N. and Nasseri, S. H., (2007). Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 158, 1961-1978.

[21] Nasseri, S. H. and Mahdavi-Amiri, N. (2009). Some duality results on linear programming problems with symmetric fuzzy numbers. Fuzzy Information and Engineering, 1, 59–66.

[22] Maoqin, L., Yurong, D., (1989). Research on a kind of grey programming and their dual theories. Journal of Chongqing University, 12(4), 22-29.

[23] Nasseri S. H. and Darvishi, D., (2018). Duality results on grey linear programming problems. The Journal of Grey System, 30 (3), 127-142.

[24] Li, Q. X. and Lin, Y., (2014). A briefing to grey systems theory. Journal of Systems Science and Information, 2(2), 178-192.

[25] Liu, S. and Lin, Y., (2006). Grey information theory and practical applications. London, Springer.

[26] Liu, S. and Lin, Y., (2011). Grey Systems: Theory and Applications. Springer Verlag, Berlin.

[27] Liu, S., Yang, Y., Xie, N. and Forrest, J., (2016). New progress of grey system theory in the new millennium. Grey Systems: Theory and Application. 6(1), 2-31.

[28] Liu S., Yang Y., Forrest, J., (2017). Grey Data Analysis. Springer Singapore.

[29] Yang, Y. and John, R., (2012). Grey sets and greyness. Information Sciences, 185, 249–264.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.3.5.8]