مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره چهارم (پیاپی ۴۷)، زمستان ۹۴، ص ص ۱۳۶-۱۱۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها

شبنم رضویان*[1]
۱- استادیار، دانشگاه آزاداسلامی، واحد تهران جنوب، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱ مرداد ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۱۴ آذر ۱۳۹۴

چکیده

این مقاله موضوع تخصیص منابع متمرکز را از دیدگاه هزینه‌ای، درآمد و سود مورد بررسی قرار می‌دهد. در این راستا تصمیم‌گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود کلی خواهد بود. در واقع در این فرایند به جای مدنظر قرار دادن مستقل و انفرادی حداقل ورودی و یا حداکثر خروجی برای واحدها، تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود کلی و به صورت یکجا در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیری انجام می‌شود و بر این اساس تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده روی مرزهای کارایی هزینه، درآمد و سود تعیین می‌شود که اغلب متفاوت از تصویر روی مرز کارایی تکنیکی هستند؛ سپس مدل‌های تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین و در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه پیشنهاد می‌گردد. به طوری که نتایج مدل‌های پیشنهادی نشان می‌دهد، تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود کلی منجر به کاهش قابل ملاحظه هزینه‌ها و افزایش درآمد و سود کل سیستم می‌شود. در انتها موضوع از طریق مثال‌های تجربی و فرضی با هزینه‌ها و قیمت‌های معلوم، متغیر و نامعین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، هزینه‌ها و قیمت‌های متغیر و نامعین، تخصیص منابع متمرکز، کارایی هزینه، کارایی درآمد، کارایی سود.

۱ مقدمه

اندازه‌گیری کارایی به دلیل اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان همواره مورد توجه محققین قرار داشته است. فارل در سال ۱۹۵۷ [۱] با استفاده از روشی همانند اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی، به اندازه‌گیری کارایی برای واحدهای تولیدی اقدام کرد. چارنز ،کوپر و رودز دیدگاه فارل [۱] را توسعه دادند و الگویی را ارایه کردند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این الگو، تحت

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Sh_razavyan@azad.ac.ir

عنوان تحلیل پوششی داده‌ها، نام گرفت و اولین بار، در رساله دکترای ادوارد رودز و به راهنمائی کوپر [۲] تحت عنوان ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان مدارس ملی آمریکا در سال ۱۹۷۶، در دانشگاه کارنگی مورد استفاده قرار گرفت. امروزه تحلیل پوششی داده‌ها در زمینه‌های مختلف [۳] و روی داده‌های مختلف (مانند داده‌های نادقیق) [۴] توسعه داده‌شده‌است.

اکثریت مطالعات صورت گرفته بر روی کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) به صورت مستقل از سایر واحدها بوده است؛ اما سال ۱۹۹۳ را می‌توان به عنوان نقطه شروع مطالعات در زمینه محاسبه کارایی کل سیستم نام‌گذاری کرد. آغاز این مطالعات، تحقیقات گلونی و همکارانش [۵] بود. آن‌ها موفق به ارایه مدلی برای محاسبه کارایی کل سیستم شدند. ولی مدل ارایه شده توسط آن‌ها، از نظر محاسبه کارایی ضعف‌هایی داشت. بعد از آن گلونی و همکارانش یک مدل برنامه‌ریزی خطی در ماهیت خروجی ارایه دادند که در آن مدل یک کران بالا برای مصرف کل ورودی‌ها لحاظ شده بود. از ضعف‌های مدل ارایه شده، نشدنی بودن آن در برخی حالات خاص بود. در سال۱۹۹۵، آتاناسوپولوس [۶] یک مدل برنامه‌ریزی چند هدفه خطی (MOLP) ارایه کرد. در مدل مذکور، برای مصرف نهایی هر یک از ورودی‌ها و یا هر یک از خروجی یک سری مساله برنامه‌ریزی خطی بایستی مورد بررسی قرار می‌گرفت که از نظر زمانی، توجیهی نداشت. فارل و همکارانش [۱] در سال ۱۹۹۷یک مدل برنامه‌ریزی خطی دو مرحله‌ای در ماهیت خروجی ارایه کردند که توانایی لازم برای محاسبه کارایی کل سیستم را نداشت.

در سال ۲۰۰۴، لوزانو [۷] برای محاسبه کارایی کل سیستم، یک مدل برنامه‌ریزی خطی شعاعی و غیرشعاعی تحت بازده به مقیاس متغیر ارایه دادند. تقریباً می‌توان گفت این مدل و تئوری تشکیل آن، مبنای کلیه مطالعات بعدی قرار گرفت. از مطالعات کاربردی در این زمینه نیز می‌توان به لوزانو و همکارانش [۸] در بهینه سازی صنعت بازیافت در اسپانیا اشاره کرد. از دیگر مقالات ارایه شده در این زمینه اسمیلد و همکارانش [۹] می‌باشد که در آن، استفاده از DMUهای کارا برای محاسبه کارایی بود. در سال ۲۰۱۲، سیسیلیو و همکارانش [۱۰] مدلی که توسط لوزانو و همکارانش در سال ۲۰۰۴ ارایه شده بود تغییر دادند و نشان دادند که می‌توان آن مدل را ساده‌تر و با قیدها و متغیرهای کم‌تری نوشت. از دیگر مطالعات و پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه می توان به مقالات فنگ [۱۱]، دو و همکارانش [۱۲] و یو و همکارانش [۱۳] اشاره کرد.

با توجه به تجربیات بشری در دنیای امروز، اصل خصوصی سازی بسیار حایز اهمیت است و موجب رونق و گسترش اقتصاد جوامع می‌شود. در این راستا خصوصی‌سازی سازمان‌های دولتی، زمانی مفید واقع خواهد شد که کارایی لازم را داشته باشد؛ بنابراین، می‌توان از تخصیص منابع متمرکز برای محاسبه کارایی سازمان خصوصی‌سازی شده استفاده کرد و نقاط ضعف آن را که موجب کاهش کارایی کل سیستم شده‌است مشخص کرده، در جهت رفع آن نواقص قدم برداشت. عوامل بسیاری در بازدهی یا کارایی یک سیستم تاثیرگذار هستند و زمانی که یک سیستم نتیجه دلخواه را نمی‌تواند اخذ کند از کارایی لازم بهرمند نیست، طبیعتاً نواقص موجود در آن باعث عدم نتیجه‌گیری لازم بوده است؛ لذا، می‌توان با محاسبه جزء به جزء کارایی سیستم (تجزیه کارایی به عامل‌های کوچک‌تر) نقص یا نواقص احتمالی سیستم را تشخیص داده، در جهت رفع آن‌ها کوشید. حال اگر

بتوان کارایی به صورت تخصیص منابع متمرکز را به طور مناسب و دقیق تجزیه و تحلیل نمود، می‌توان نقاط ضعف سیستم را تشخیص داده، آن‌ها را رفع کرد.

پژوهش‌های قبلی تخصیص منابع متمرکز را با در نظر گرفتن جنبه تکنیکی آن مورد بررسی قرار داده‌اند؛ ولی در این مقاله، موضوع از دیدگاه‌های هزینه‌ای، درآمد و سود مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت تصمیم‌گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه یا بیش‌ترین درآمد و یا بیش‌ترین سود کلی خواهد بود. در واقع در این فرایند به جای مدنظر قرار دادن مستقل و انفرادی حداقل ورودی برای هر یک از واحدها، تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه کلی یا بیش‌ترین درآمد و یا بیش‌ترین سود به صورت یکجا و شبکه‌ای برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیری انجام می‌شود؛ سپس مدل‌های تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه پیشنهاد می‌گردد. در پایان موضوع از طریق مثال‌های تجربی و فرضی در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید که n تعداد DMUها و $r, j=1,\ldots,n$ و m تعداد ورودی‌ها $(i=1,\ldots,m)$ و p تعداد خروجی‌های هر DMU $(k=1,\ldots,p)$ و x_{ij} ورودی iام واحد jام و y_{kj} خروجی kام واحد jام باشد، هرگاه ورودی iام در واحد jام (x_{ij}) دارای هزینه c_i $(i=1,\ldots,m)$ باشد و بخواهیم تخصیص منابع با کم‌ترین هزینه کلی انجام شود در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی هزینه به جای مرز کارایی تکنیکی به دنبال تخصیص منابع با کم‌ترین متوسط هزینه کلی خواهیم بود. در واقع در این حالت با متغیر در نظر گرفتن ورودی iام در واحد jام به صورت $\hat{x}_{ij}$ واز آنجا که یک واحد ورودی iام در تمامی واحدهای تصمیم‌گیری دارای هزینه یکسان c_i $(i=1,\ldots,m)$ است، مدل مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij}, \qquad i=1,\cdots,m, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} y_{kr}, \qquad k=1,\cdots,p, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \qquad\qquad r=1,\cdots,n, \\
& \qquad \lambda_{jr} \geqslant 0, \qquad\qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $x_i=\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}$ $(i=1,\ldots,m)$ می‌توان مدل (۱) را به مدل زیر با تعداد متغیرهای کم‌تر، تغییر داد:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant x_i, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} y_{kr}, \quad k = 1,\cdots,p, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \qquad r = 1,\cdots,n, \\
& \qquad \lambda_{jr} \geqslant 0, \qquad j, r = 1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۲) تصویر واحد تصمیم‌گیرنده rام به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$
\left(x_{ir}^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj}^* x_{ij}, \ \ i = 1,\ldots,m, y_{kr}^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj}^* y_{kj}, \ \ k = 1,\ldots,p \right).
$$

بر اساس این نقطه تصویر سیاست تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه انجام می‌شود. ولی در اغلب مواقع در یک سیستم متمرکز یک واحد ورودی یکسانی در واحدهای تصمیم‌گیری مختلف دارای هزینه متفاوتی است که در بخش بعدی مدل تخصیص منابع متمرکز مربوطه، ارایه می‌گردد.

۲-۱ تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور هزینه‌های متفاوت

تونی [۱۴] در سال ۲۰۰۲ با فرض اینکه ورودی iام در واحد jام $(j = 1,\ldots,n, i = 1,\ldots,m)$ (x_{ij}) دارای هزینه c_{ij} باشد، حالت کلی از مجموعه امکان تولید را مطرح نمود. در واقع ایشان این فرض که "یک واحد ورودی iام در تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای هزینه یکسان c_i است" را کنار گذاشتند و بدین ترتیب حالت کلی مجموعه امکان تولید را تحت عنوان $T_{new}(\bar{x}, y)$ به صورت زیر مطرح نمودند:

$$
T_{new}(\bar{x}, y) = \left\{ (\bar{x}, y) \mid \bar{x} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, \ j = 1,\ldots,n \right\}
$$

که در آن $\bar{x}_j = (\bar{x}_{1j},\ldots,\bar{x}_{mj})$ و $\bar{x}_{ij} = c_{ij} x_{ij} \ (i = 1,\ldots,m, \ j = 1,\ldots,n)$. با در نظر گرفتن $T_{new}(\bar{x}, y)$ مدل کلی تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور هزینه‌های متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\bar{x}_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}, \qquad i=1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n}y_{kr}, \qquad k=1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1, \qquad r=1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda_{jr}\geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{۳}
$$

که در آن متغیر $\tilde{x}_{ij}$ سطح ورودی iام در واحد تصمیم‌گیرنده jام است که باید مقدار بهینه آن تعیین شود. بدین ترتیب با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}\ (i=1,\ldots,m)$ می‌توان مدل (۳) را به مدل زیر تبدیل نمود:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_{i} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\bar{x}_{ij} \leqslant \tilde{x}_{i}, \qquad i=1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n}y_{kr}, \qquad k=1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1, \qquad r=1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda_{jr}\geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۴) تصویر واحد تصمیم‌گیرنده rام روی مرز کارایی هزینه به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$
\left(x_{ir}^{*}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{rj}^{*}x_{ij}, \ \ i=1,\ldots,m, y_{kr}^{*}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{rj}^{*}y_{kj}, \ \ k=1,\ldots,p \right).
$$

در واقع، هزینه متناظر تولید خروجی‌های $\sum_{r=1}^{n}y_{kr}, (k=1,\cdots,p)$ به حداقل مقدار خود در نقاط تصویر می‌رسد. براساس ویژگی‌های کارایی هزینه تخصیص منابع متمرکز از این طریق با دستکاری نمودن ترکیب ورودی‌های مصرفی به دنبال ترکیب مناسبی از ورودی‌ها در مصرف برای کاهش هزینه تخصیص منابع متمرکزمی‌باشد.

۳ تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین درآمد در تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید یک واحد خروجی kام در واحد تصمیم‌گیری jام دارای درآمد d_k $(k=1,\dots,p)$ باشد و بخواهیم تخصیص منابع به همراه بیش‌ترین درآمد کلی انجام شود، در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی درآمد به دنبال تخصیص منابع با بیش‌ترین متوسط درآمد کلی خواهیم بود. در این حالت با متغیر در نظر گرفتن خروجی kام در واحد jام به صورت $\hat{y}_{kj}$ و از آنجا که یک واحد خروجی kام در تمامی واحدهای تصمیم‌گیری دارای درآمد یکسان d_k است، مدل مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{k=1}^{p} d_k \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_{kj} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i=1,\dots,m, \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} \hat{y}_{kr}, \quad k=1,\dots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \quad r=1,\dots,n, \\
& \quad \lambda_{jr} \geqslant 0, \quad j,r=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

با استفاده از تغییر متغیر $y_k=\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_{kj}\ (k=1,\dots,p)$ می‌توان مدل (۵) را به مدل زیر تغییر داد:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{k=1}^{p} d_k y_k \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant y_k, \quad k=1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \quad r=1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda_{jr} \geqslant 0, \quad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

بدین ترتیب با استفاده از جواب بهینه مدل (۶) تصویر واحد تصمیم‌گیری rام براساس سیاست تخصیص منابع با حداکثر درآمد کل به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\left(x_{ir}^{*}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{rj}^{*}x_{ij}, \ \ i=1,\dots,m, y_{kr}^{*}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{rj}^{*}y_{kj}, \ \ k=1,\dots,p \right).$$

در واقـع واحـد تصـمیم‌گیرنـده rام بـا الگـو قـرار دادن واحـد تصـمیم‌گیـری $(x_{ir}^{*},\ \ i=1,\dots,m, y_{kr}^{*},\ \ k=1,\dots,p)$ در مصرف و تولید به هـدف تخصـیص منـابع بـا حـداکثر درآمـد کـل خواهد رسید.

۳-۱ تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین درآمد در حضور قیمت‌های متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها

براساس مقاله تونی [۱۴] با فـرض ایـن‌که یـک واحـد خروجـی kام در واحـد jام $(j=1,\dots,n, k=1,\dots,p)$ دارای درآمد d_{kj} است حالت کلی از مجموعه امکان تولید مطرح گردید. براساس فرض تونی (۲۰۰۲) مجموعه امکان تولید مورد نظر به صورت زیر است:

$$T_{new}(x,\bar{y})=\left\{(x,\bar{y})\,|\,x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,\bar{y}\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{y}_j,\lambda_j\geq 0,\ j=1,\dots,n\right\}$$

که در آن فرض شده‌است که $\bar{y}_j=(\bar{y}_{1j},\dots,\bar{y}_{mj})$ و $\bar{y}_{kj}=d_{kj}y_{kj}\ (k=1,\dots,p,\ j=1,\dots,n)$.

با استفاده از $T_{new}\,(x,\bar{y})$ مدل تخصیص منابع متمرکز با در نظر گرفتن بیش‌ترین درآمد متوسـط در حضـور قیمت‌های متفاوت خروجی‌های یکسان در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_{kj}\\
&s.t.\\
&\qquad\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{n}x_{ij}, && i=1,\dots,m,\\
&\qquad\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj}\geqslant\sum_{r=1}^{n}\tilde{y}_{kr}, && k=1,\dots,p,\\
&\qquad\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1, && r=1,\dots,n,\\
&\qquad\lambda_{jr}\geqslant 0, && j,r=1,\dots,n.
\end{aligned}\tag{۷}$$

که در آن متغیر $\tilde{y}_{kj}$ سطح خروجی kام در واحد تصمیم‌گیرنده j ام است که مقدار بهینه آن از طریق مـدل (۷) تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\tilde{y}_k=\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_{kj}\ (k=1,\dots,p)$ مدل (۷) به مدل زیر تبـدیل مـی‌شـود که در آن تعداد متغیرها کاهش یافته‌است:

$$\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{k=1}^{p} \tilde{y}_k \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{r=1}^{n} x_{ir}, \quad i=1,\ldots,m, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \tilde{y}_k, \quad k=1,\ldots,p, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \quad r=1,\ldots,n, \\
& \qquad \lambda_{jr} \geqslant 0, \quad j,r=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{8}$$

از طریق جواب بهینه مدل (۸) راه‌کار تخصیص منابع متمرکز با در نظر گرفتن بیش‌ترین درآمد به‌دست می‌آید و بر اساس جواب بهینه این مدل، تصویر واحد تصمیم‌گیری rام روی مرز کارایی درآمد به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\left(x_{ir}^{*} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj}^{*} x_{ij}, \ \ i=1,\ldots,m, y_{kr}^{*} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj}^{*} y_{kj}, \ \ k=1,\ldots,p \right).$$

٤ کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین سود کلی

فرض کنید خروجی kام در واحد تصمیم‌گیری jام دارای درآمد d_k $(k=1,\ldots,p)$ به ازای یک واحد از آن خروجی باشد و هم‌چنین یک واحد ورودی iام در واحد تصمیم‌گیری jام دارای هزینه c_i $(i=1,\ldots,m)$ باشد و بخواهیم تخصیص منابع با بیش‌ترین سود کلی در سرتاسر واحد تصمیم‌گیری انجام شود، در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی سود به دنبال تخصیص منابع با بیش‌ترین سود متوسط کلی خواهیم بود.

بدین منظور کارایی متمرکز سود برای تخصیص منابع متمرکز با هدف بیش‌ترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p} d_k \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_{kj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} y_{kr}, \quad k=1,\cdots,p, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1, \quad r=1,\cdots,n, \\
& \qquad \lambda_{jr} \geqslant 0, \quad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{9}$$

که در آن متغیرهای $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{kj}$ به ترتیب مقادیر ورودی i ام و خروجی k ام در واحد تصمیم‌گیری j ام است که باید مقادیر بهینه آن‌ها تعیین شود. با استفاده از تغییر متغیر چارنز کوپر یعنی $t = 1\Big/\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij}$ مدل کسری (۹) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p} d_k \sum_{j=1}^{n} t\hat{y}_{kj} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} t\hat{x}_{ij} = 1, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} tx_{ij}, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} ty_{kr}, \quad k = 1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr} = t, \qquad r = 1,\cdots,n. \\
& \quad t\lambda_{jr} \geqslant 0, \qquad j,r = 1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{10}
$$

با استفاده از تغییر متغیر $\hat{x}'_{ij} = t\hat{x}_{ij}$, $\lambda'_{jr} = t\lambda_{jr}$ و $y'_{kj} = t\hat{y}_{kj}$ مدل (۱۰) به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p} d_k \sum_{j=1}^{n} \hat{y}'_{kj} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \hat{x}'_{ij} = 1, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{x}'_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} tx_{ij}, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{y}'_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} ty_{kr}, \quad k = 1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} = t, \qquad r = 1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda'_{jr} \geqslant 0, \qquad j,r = 1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{11}
$$

از طریق تغییر متغیر $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}'_{ij}, (i = 1,\ldots,m)$ و $\tilde{y}_k = \sum_{j=1}^{n} \hat{y}'_{kj}, (k = 1,\ldots,p)$ مدل (۱۱) به مدل زیر با تعداد متغیرهای کم‌تر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p} d_k \tilde{y}_k \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} c_i \tilde{x}_i = 1, \\
& \quad \tilde{x}_i = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} t x_{ij}, \qquad i = 1,\cdots,m, \\
& \quad \tilde{y}_k = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} t y_{kr}, \quad k = 1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda'_{jr} = t, \qquad\qquad r = 1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda'_{jr} \geqslant 0, \qquad\qquad j, r = 1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

از طریق مدل (۱۲) کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود.

۴-۱ تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین سود در حضور هزینه‌ها و درآمدهای متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها

هرگاه ورودی iام در واحد jام $(j=1,\ldots,n, i=1,\ldots,m)$ دارای هزینه واحد c_{ij} و خروجی kام در واحد jام $(j=1,\ldots,n, k=1,\ldots,p)$ دارای درآمد واحد d_{kj} باشد، حالت کلی از مجموعه امکان تولید به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
T_{new}(\bar{x},\bar{y}) = \left\{ (\bar{x},\bar{y}) \mid \bar{x} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_j, \bar{y} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{y}_j, \lambda_j \geq 0, j = 1,\ldots,n \right\}
$$

که در آن $\bar{x}_j = (\bar{x}_{1j},\ldots,\bar{x}_{mj})$، $\bar{x}_{ij} = c_{ij}x_{ij}\ (i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)$، $\bar{y}_j = (\bar{y}_{1j},\ldots,\bar{y}_{mj})$ و $\bar{y}_{ij} = d_{kj}y_{kj}\ (k=1,\ldots,p, j=1,\ldots,n)$. با در نظر گرفتن $T_{new}\ (\bar{x},\bar{y})$ مدل کلی‌تر تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین سود در حضور درآمدها و هزینه‌های متفاوت در واحدهای تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\hat{y}_{kj} \Big/ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\bar{x}_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n}\hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\bar{y}_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n}\bar{y}_{kr}, \quad k=1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1, \qquad r=1,\cdots,n, \\
& \quad \lambda_{jr} \geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

با استفاده از تغییر متغیر چارنز کوپر، یعنی $t = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}$ مـدل برنامـه‌ریـزی خطـی کسـری (١٣) بـه مـدل غیرخطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} t\hat{y}_{kj} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t\hat{x}_{ij} = 1, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr}\bar{x}_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} t\bar{x}_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr}\bar{y}_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n} t\bar{y}_{kr}, \quad k=1,\cdots,p, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} t\lambda_{jr} = t, \qquad r=1,\cdots,n, \\
& \quad t\lambda_{jr} \geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

با استفاده از تغییر متغیر $\hat{x}'_{ij} = t\hat{x}_{ij}$ ، $\lambda'_{jr} = t\lambda_{jr}$ و $y'_{kj} = t\hat{y}_{kj}$ مدل (١۴) به مدل برنامه‌ریزی خطی زیـر تبـدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\hat{y}'_{kj}\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}'_{ij}=1,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\hat{x}'_{ij}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}\bar{x}_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{n}t\bar{x}_{ij}, \quad i=1,\cdots,m,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\hat{y}'_{kj}=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}\bar{y}_{kj}\geqslant\sum_{r=1}^{n}t\bar{y}_{kr}, \quad k=1,\cdots,p,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}=t, \qquad r=1,\cdots,n,\\
&\quad \lambda'_{jr}\geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{15}$$

از طریق تغییر متغیر $\tilde{x}_i=\sum_{j=1}^{n}\hat{x}'_{ij},(i=1,\ldots,m)$ و $\tilde{y}_k=\sum_{j=1}^{n}\hat{y}'_{kj},(k=1,\ldots,p)$ مدل (۱۵) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max \sum_{k=1}^{p}\tilde{y}_k\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i=1,\\
&\quad \tilde{x}_i=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}\bar{x}_{ij}\leqslant\sum_{j=1}^{n}t\bar{x}_{ij}, \quad i=1,\cdots,m,\\
&\quad \tilde{y}_k=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}\bar{y}_{kj}\geqslant\sum_{r=1}^{n}t\bar{y}_{kr}, \quad k=1,\cdots,p,\\
&\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda'_{jr}=t, \qquad r=1,\cdots,n,\\
&\quad \lambda'_{jr}\geqslant 0, \qquad j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{16}$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۱۶) داریم:

$$\hat{x}_{ij}=\hat{x}^{*}_{ij}/t^{*},\ \hat{y}_{kj}=\hat{y}'^{*}_{kj}/t^{*}/t^{*},\ \lambda^{*}_{jr}=\lambda'^{*}_{jr}/t^{*} \text{ و } \hat{y}^{*}_{kj}=y'^{*}_{kj}/t^{*}$$

و بدین ترتیب جواب بهینه مدل (۱۳) به‌دست می‌آید. از طریق مدل فوق کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیش‌ترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود.

٥ تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین

کارایی هزینه در حضور قیمت‌های مشخص به دنبال بررسی امکان تولید خروجی‌های جاری واحد تصمیم‌گیرنده با کم‌ترین هزینه است. در حالی که در بعضی از کاربردها تحلیل پوششی داده‌ها به دلایلی مانند:

[١] شرایط ناپایدار اقتصادی و متغیر بودن هزینه‌ها و قیمت‌ها

[٢] ناکافی بودن اطلاعات در رابطه با هزینه ورودی‌ها

با هزینه‌ها و قیمت‌های نامعین مواجه هستیم. در این بخش تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه در تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض کنید $v_i\ (v_h)$ وزن برای ورودی $i\ (h)$ از واحد تصمیم‌گیری oام و $c_i^{\min}(c_h^{\min})$ کم‌ترین هزینه تخمین‌زده شده برای ورودی $i\ (h)$ و $c_i^{\max}(c_h^{\max})$ بیش‌ترین هزینه تخمین‌زده شده برای ورودی $i\ (h)$ از واحد تصمیم‌گیری oام باشد. بر این اساس با تحمیل $2\times C_2^m$ محدودیت روی مدل فرم مضربی تخصیص منابع متمرکز در حالت خوشبینانه مدل زیر پیشنهاد می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \sum_{k=1}^{n} y_{rk} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{p} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \xi_k \le 0, \qquad j,k = 1,\dots,n, \\
&\qquad \frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \le \frac{v_i}{v_h} \le \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, 1 \le i < h \le m, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1, \\
&\qquad v_i \ge 0, \qquad\qquad i = 1,\dots,m, \\
&\qquad u_r \ge 0, \qquad\qquad r = 1,\dots,p.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

برای به‌دست آوردن کم‌ترین کارایی هزینه، هرگاه تابع هدف را از ماکزیمم به مینیمم تغییر دهیم مقدار بهینه و لذا کارایی هزینه صفر خواهدشد. مدل کم‌ترین کارایی هزینه را در حضور قیمت‌های نامعین به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \sum_{k=1}^{n} y_{rk} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{p} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \xi_k \le 0, \qquad j,k = 1,\dots,n, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{p} u_r \hat{y}_r + \sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_i = 1, \\
&\qquad \frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \le \frac{v_i}{v_h} \le \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, 1 \le i < h \le m, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1, \\
&\qquad v_i \ge 0, \qquad\qquad i = 1,\dots,m, \\
&\qquad u_r \ge 0, \qquad\qquad r = 1,\dots,p.
\end{aligned} \tag{۱۸}
$$

کـه در آن $(\hat{x},\hat{y}) = (\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m,\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_p)$ تصـویر نقطـه $(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \forall i, \sum_{j=1}^{n} y_{rj}, \forall r)$ توسـط مـدل تخصیص منابع متمرکز لوزانو و ویلا [۹] روی مرز کارایی است. از آنجا که مدل تخصیص منابع متمرکز لوزانـو و ویلا [۹] در ارزیابی خود کارایی نقطه $(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \forall i, \sum_{j=1}^{n} y_{rj}, \forall r)$ را در نظر مـی‌گیـرد. بـدین منظـور بـرای جلوگیری از صفر شدن کارایی در حالت بدبینانـه، وزن‌هـای متنـاظر نقطـه $(\hat{x},\hat{y})$ را در نظر گرفتـه‌ایـم. بـدین ترتیب تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضـور قیمـت‌هـای نـامعین در دو حالـت خوشـبینانه و بدبینانـه انجام می‌شود.

برای تعیین مختصات نقاط تصویر واحدهای تصمیم‌گیری اطلاعات فرم پوششی مدل‌های (۱۷) و (۱۸) مورد نیـاز اسـت. لـذا دوگـان آنهـا را بـه صـورت زیـر در نظـر مـی‌گیـریم. بـا در نظـر گـرفتن متغیرهـای دوگـان $\lambda_{n+t}, \lambda_{n+h}, (t = 1,\dots,\binom{m}{2}, t < h)$ متنـاظر قیـود $\frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \le \frac{v_i}{v_h} \le \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, 1 \le i < h \le m$ دوگـان مـدل (۱۷) بـه صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \theta \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} + \sum_{\substack{t,h=1\\t<h}}^{\binom{m}{2}}\left(\lambda_{n+t} - \lambda_{n+h} - \frac{c_t^{\min}}{c_h^{\max}}\lambda_{n+t} + \frac{c_t^{\max}}{c_h^{\min}}\lambda_{n+h}\right) \\
&\quad \leqslant \theta\sum_{j=1}^{n}x_{ij}, i=1,\cdots,m, \qquad (19) \\
&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} \geqslant \sum_{r=1}^{n}y_{kr}, k=1,\cdots,p, \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1, r=1,\cdots,n, \\
&\lambda_{n+t},\lambda_{n+h},\lambda_{jr}\geqslant 0, t,h=1,\cdots,\binom{m}{2}, t<h, j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

که در آن $\binom{m}{2}$ همان تعداد راه‌های انتخاب بدون ترتیب دو شی از m شی است. بدین ترتیب با در نظر گرفتن مفروضات فوق هرگاه ϕ متغیر دوگان متناظر قید $\sum_{r=1}^{p}u_r\hat{y}_r + \sum_{i=1}^{m}v_i\hat{x}_i = 1$ باشد، دوگان مدل (۱۸) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \theta+\phi \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} + \phi\hat{x}_i + \sum_{\substack{t,h=1\\t<h}}^{\binom{m}{2}}\left(\lambda_{n+t} - \lambda_{n+h} - \frac{c_t^{\min}}{c_h^{\max}}\lambda_{n+t} + \frac{c_t^{\max}}{c_h^{\min}}\lambda_{n+h}\right) \\
&\quad \leqslant \theta\sum_{j=1}^{n}x_{ij}, i=1,\cdots,m, \qquad (20) \\
&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} + \phi\hat{y}_k \geqslant \sum_{r=1}^{n}y_{kr}, k=1,\cdots,p, \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1, r=1,\cdots,n, \\
&\lambda_{n+t},\lambda_{n+h},\lambda_{jr}\geqslant 0, t,h=1,\cdots,\binom{m}{2}, t<h, j,r=1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

در بخش بعدی تعدادی از مدل‌های پیشنهادی را از طریق مثال‌های تجربی و فرضی مورد بررسی قرار داده، نتایج عددی را بر اساس آن‌ها به‌دست می‌آوریم.

۶ مثال عددی

جدول ۱ داده‌های دوازده بیمارستان را با دو ورودی x_1 و x_2 (به ترتیب تعداد پزشکان و تعداد پرستاران هر بیمارستان) با قیمت‌های متغیر و دو خروجی y_1 و y_2 (به ترتیب تعداد بیماران مداوا شده‌ی سرپایی و تعداد بیماران مدوا شده‌ی بستری شده) نشان می‌دهد که در آن c_1 و c_2 به ترتیب حقوق یک نفر پزشک و یک نفر پرستار در بیمارستان مربوطه است. فرض کنید این بیمارستان‌ها دارای ساختار متمرکز هستند.

جدول ۱. ورودی‌ها، خروجی‌ها و هزینه‌های متغیر متناظر هر یک از ورودی‌ها

DMU	x_1	x_2	$\bar{x}_1 = c_1x_1$	$\bar{x}_2 = c_2x_2$	c_1	c_2	y_1	y_2
۱	۲۰	۱۵۱	۱۰۰۰۰	۱۵۱۰۰	۱۰۰	۹۰	۱۰۰	۵۰۰
۲	۱۹	۱۳۱	۶۶۵۰	۱۰۴۸۰	۱۵۰	۵۰	۸۰	۳۵۰
۳	۲۵	۱۶۰	۱۱۲۵۰	۱۴۴۰۰	۱۶۰	۵۵	۹۰	۴۵۰
۴	۲۷	۱۶۸	۱۶۲۰۰	۲۰۱۶۰	۱۸۰	۷۲	۱۲۰	۶۰۰
۵	۲۲	۱۵۸	۶۶۰۰	۱۱۰۶۰	۹۴	۶۶	۷۰	۳۰۰
۶	۵۵	۲۵۵	۲۴۷۵۰	۲۰۴۰۰	۲۳۰	۹۰	۸۰	۴۵۰
۷	۳۳	۲۳۵	۱۶۵۰۰	۲۳۵۰۰	۲۲۰	۸۸	۱۰۰	۵۰۰
۸	۳۱	۲۰۶	۱۳۹۵۰	۱۷۵۱۰	۱۵۲	۸۰	۸۵	۴۵۰
۹	۳۰	۲۴۴	۱۱۴۰۰	۱۸۵۴۴	۱۹۰	۱۰۰	۷۶	۳۸۰
۱۰	۵۰	۲۶۸	۲۰۵۰۰	۲۰۱۰۰	۲۵۰	۱۰۰	۷۵	۴۱۰
۱۱	۵۳	۳۰۶	۲۳۳۲۰	۲۴۴۸۰	۲۶۰	۱۴۷	۸۰	۴۴۰
۱۲	۳۸	۲۸۴	۱۵۲۰۰	۱۹۸۸۰	۲۵۰	۱۲۰	۷۰	۴۰۰

جدول ۲ نتایج اجرای مدل (۴) برای تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین را نشان می‌دهد. به طوری که دیده می‌شود ورودی‌ها در تخصیص بهینه با در نظر گرفتن هزینه‌های مربوطه تخصیص داده شده‌اند. به عنوان نمونه، در این تخصیص DMU_1 سطح ورودی‌های خود را از $(x_1, x_2) = (۲۰,۱۵۱)$ به $(x_1^*, x_2^*) = (۱۳,۴۶)$ تغییر می‌دهد.

فرض کنید در رابطه با ورودی‌ها اطلاعات قیمتی به صورت نامعین در دسترس باشد، هر گاه در رابطه با ورودی‌های اول و دوم اطلاعات قیمتی به ترتیب به صورت $[c_1^{\min}, c_1^{\max}] = [۹۴, ۲۶۰]$ و $[c_2^{\min}, c_2^{\max}] = [۵۰, ۱۴۷]$ معلوم باشد، متناظر این اطلاعات برای این مثال قیود $\frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \le \frac{v_i}{v_h} \le \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, ۱ \le i < h \le m$ به صورت $\frac{۹۴}{۱۴۷} \le \frac{v_1}{v_2} \le \frac{۲۶۰}{۵۰}$ خواهد بود. با در نظر گرفتن این قیود مساله (۱۷) (مدل تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در حالت خوشبینانه) به صورت زیر خواهد بود:

جدول ۲. تخصیص بهینه ورودی‌ها با قیمت‌های متغیر

DMU	$x_۱^*$	$x_۲^*$	$\overline{x}_۱^*$	$\overline{x}_۲^*$
۱	۱۳	۴۶	۴۶۲۰	۶۶۳۶
۲	۲۷	۷۲	۵۷۷۵	۹۴۸۰
۳	۲۲	۷۴	۶۶۸۴/۳۸	۹۷۶۱/۲۲۴
۴	۲۲	۷۴	۸۸۶۶/۶۶۷	۱۳۲۵۳/۳۳
۵	۸۸	۲۱۷	۱۵۲۰۰	۲۶۵۰۶/۶۷
۶	۳۹	۱۶۶	۱۳۳۰۰	۱۷۶۷۱/۱۱
۷	۳۲	۱۰۶	۱۰۶۴۰	۱۵۹۰۴
۸	۳۹	۱۴۷	۱۲۵۱۷/۶۵	۱۷۶۷۱/۱۱
۹	۴۶	۱۵۵	۱۱۷۴۷/۸۳	۱۷۲۹۹/۱۳
۱۰	۲۲	۹۵	۷۰۹۳/۳۳۳	۸۹۴۶/۳۴۱
۱۱	۱۹	۸۳	۶۶۵۰	۸۳۳۶/۳۶۴
۱۲	۲۳	۱۰۹	۷۶۰۰	۹۱۷۰

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{r=۱}^{۱۲} u_r \sum_{k=۱}^{۱۲} y_{rk} + \sum_{j=۱}^{۱۲} \xi_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{r=۱}^{۲} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{۲} v_i x_{ij} + \xi_k \le ۰, \ j,k = ۱,...,۱۲, \\
& \qquad \frac{۹۴}{۱۴۷} \le \frac{v_۱}{v_۲} \le \frac{۲۶}{۵}, \\
& \qquad \sum_{i=۱}^{۲} v_i \sum_{k=۱}^{۱۲} x_{ik} = ۱, \\
& \qquad v_i \ge ۰, \quad i = ۱,۲, \\
& \qquad u_r \ge ۰, \quad r = ۱,۲, \\
& \qquad \xi_k \ free, \ \ k = ۱,...,۱۲.
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

با در نظر گرفتن قیود $\frac{۹۴}{۱۴۷} \le \frac{v_۱}{v_۲} \le \frac{۲۶۰}{۵۰}$ مدل تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در حالت بدبینانه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& Min \quad \sum_{r=1}^{2} u_r \sum_{k=1}^{12} y_{rk} + \sum_{j=1}^{12} \xi_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{r=1}^{2} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{2} v_i x_{ij} + \xi_k \le 0, \; j,k = 1,\ldots,12, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{2} u_r \hat{y}_r + \sum_{i=1}^{2} v_i \hat{x}_i = 1, \\
& \qquad \frac{94}{147} \le \frac{v_1}{v_2} \le \frac{26}{5}, \\
& \qquad \sum_{i=1}^{2} v_i \sum_{k=1}^{12} x_{ik} = 1, \\
& \qquad v_i \ge 0, \quad i = 1,2, \\
& \qquad u_r \ge 0, \quad r = 1,2, \\
& \qquad \xi_k \; free, \; k = 1,\ldots,12.
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

با حل مدل‌های (۲۱) و (۲۲) تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در حالت

جدول ۳. تخصیص بهینه ورودی‌ها با هزینه‌های نامعین در حالت خوشبینانه

DMU	x_1^*	x_2^*
۱	۱۹	۱۳۱
۲	۱۹	۱۳۱
۳	۲۷	۱۶۸
۴	۲۷	۱۶۸
۵	۲۷	۱۶۸
۶	۲۷	۱۶۸
۷	۱۹	۱۳۱
۸	۱۹	۱۳۱
۹	۱۹	۱۳۱
۱۰	۱۹	۱۳۱
۱۱	۱۹	۱۳۵
۱۲	۱۹	۱۳۱

خوشبینانه و بدبینانه تعیین می‌گردد. به عنوان نمونه این تخصیص‌ها در حالت خوشبینانه در جدول ۳ آورده شده است. ستون‌های دوم و سوم جدول ۳ مقادیر بهینه ورودی‌های مثال از طریق مدل (۲۱) را نشان می‌دهد. به طوری که دیده می‌شود تخصیص از این طریق متفاوت از تخصیص از طریق روش‌های قبلی (مانند مدل (۴)) است.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله موضوع تخصیص منابع متمرکز از دیدگاه هزینه‌ای، درآمد و سود در حضور هزینه‌ها و قیمت‌های ثابت، متغیر و نامعین بررسی گردید. بدین ترتیب تصمیم‌گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود کلی در حالت‌های مختلف هزینه‌ها و قیمت‌ها خواهد بود و بر این اساس تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده روی مرزهای کارایی هزینه، درآمد و سود که اغلب متفاوت از تصویر روی مرز کارایی تکنیکی هستند، تعیین گردید.

بالاخره مدل‌های تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه انجام پیشنهاد گردید. در انتها موضوع تخصیص منابع متمرکز از طریق مثال‌های تجربی و فرضی مورد بررسی قرار گرفت.

سپاسگزاری

از دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب به دلیل حمایت مالی از این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی (با عنوان: تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و تعیین بودجه بهینه برای آن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها) قدردانی می‌گردد.

مراجع

[۳] کردرستمی، س.، امیرتیموری، ع. ر.، معصوم‌زاده ع.، (۱۳۹۴). ارزیابی عملکرد نیروی انسانی و شعب بانک صادرات گیلان با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲ (۲)، ۱۳۷–۱۲۵.

[۴] خدابخشی، م.، کرمی خرم‌آبادی، م.، ثامری‌پور، ع.، (۱۳۹۴). مدل ابرکارایی با داده‌های ترتیبی در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (یک مطالعه موردی: بررسی مراکز خدمات مخابراتی کره جنوبی). تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲(۲)، ۱۸–۱.

[1] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. J. R. Stat. Soc. Ser., A 120, 253–281.

[2] Charnes, A., Coope, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring efficiency of decision making units. Eur. J. Opl. Res., 2, 429–444.

[5] Galony, B., Phillips, F. Y., Rousseau, J. J., (1993). Models for Improved Efficiency Result. IIE Transactions, 25(6), 2-10.

[6] Athanas Sopoulos, A. D., (1995). Goal Programming of Data Envelopment Analysis (GoDEA) For Target Based Multi-Level Planning: Alocating Central Grant to the Greek Local Authorities. European Journal of Operational Research, 87, 535-55.

[7] Lozano, S., Villa, G., (2004). Centralized resource allocation using data envelopment analysis. Journal of Productivity Analysis, 22, 143–161.

[8] Lozano, S., Villa, G., (2005). Centralized DEA models with the possibility of downsizing. Journal of the Operational Research Society, 56 (4), 357–364.

[9] Asmild, M., Paradi, J. C., Pastor, J. T., (2009). Centralized resource allocation BCC models. Omega, 37, 40–49.

[10] Cecilio, M. M., Prior, D., Segovia, M. M., Portillo, F., On centralized resource utilization and its reallocation by using DEA, Ann Oper Res, DOI: 10.1007/s10479-012-1083-8.

[11] Lei, F., Zhang, C. Q., (2008). Resource allocation based on the DEA model. Journal of the Operational Research Society, 59 (8), 1136–1141.

[12] Du, J., Liang, L., Chen, Y., Bi, G., (2010). DEA-based production planning. Omega, 38, 105–112.
[13] Yu, M. M., Chern, C. C., Hsiao, B., (2013). Human resource rightsizing using centralized data envelopment analysis: evidence from Taiwan's airports. Omega, 41, 119–130.
[14] Tone, K., (2002). A strange case of the cost and allocative efficiencies in DEA. Journal of the operational research society, 53, 1225-1231.