

مدل‌سازی جیره دام در شرایط عدم قطعیت با استفاده از رویکرد سیستم‌های خاکستری

سید هادی ناصری*^۱، داود درویشی سلوکلابی^۲

۱- استادیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۲۶ خرداد ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۷ آبان ۱۳۹۴

چکیده

برنامه‌ریزی خطی یکی از روش‌های مناسب به منظور تنظیم جیره خوراکی دام با کمترین هزینه می‌باشد. از آن جا که اغلب داده‌ها تجربی، نادقيق و تقریبی هستند از مدل‌های فازی و بازه‌ای استفاده شده تا جیره تنظیمی از انعطاف‌پذیری لازم برخوردار باشد. زمانی که داده‌ها کم و یا ناقص باشند، به دنبال یک جواب منحصر به فرد برای مساله باشیم و یا پیدا کردن تابع عضویت برای خبره مشکل باشد، استفاده از یک روش مناسب جهت برآوردن این مشکل بدیهی است. هدف اصلی این پژوهش معرفی رویکردی جدید برای مساله جیره‌نویسی در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب‌تر باشد. در این مطالعه تلاش شد تا جیره خوراکی مزرعه پرورش جوجه گوشتی در محیط خاکستری انجام شده و نتایج آن با مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی فازی مقایسه شوند. با این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت مواد خوراکی یا موجودی به دست آورد. به ویژه مطالعه مدل‌های یادشده نشان داد با به کارگیری روش‌های پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی و نیز با توسعه نتایج موجود می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

کلمات کلیدی: اعداد خاکستری، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی خاکستری، جیره خوراکی، عدم قطعیت.

۱ مقدمه

هزینه خوراک دام حدود ۶۵ تا ۷۵ درصد هزینه‌های دامداری را شامل می‌شود. کاهش قیمت تمام شده خوراک مصرفی دام، با توجه به محدودیت منابع خوراکی در هر منطقه یا فصل و همچنین، نیاز به صرفه جویی در مصرف علوفه مساله بهینه‌سازی برنامه تغذیه دام امری ضروری می‌باشد. اهمیت این موضوع همواره مورد توجه

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

پژوهشگران و از جمله اقتصاددانان قرار گرفته و منجر به ابداع راههایی برای کاهش هزینه در این واحدها شده است؛ بنابراین آشنایی با ترکیبات، کیفیت و نوع مواد خوراکی و احتیاجات خوراکی دام و اصول و استانداردهای مربوطه و مجاز بسیار مهم خواهد بود. از اوایل دهه ۱۹۵۰ کارشناسان علوم تغذیه دام و طیور با به کارگیری روش برنامه‌ریزی خطی اقدام به جیره‌نویسی می‌کردند [۱]. در تنظیم جیره خوراکی با حداقل قیمت، برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به کار برد که از حل دستگاه معادلاتی شامل محدودیت‌های منابع خوراکی و احتیاجات بهتر می‌باشد که در این روش‌ها هدف اصلی تامین کردن احتیاجات دام می‌باشد و سپس قیمت جیره خوراکی مشخص می‌شود. برنامه‌ریزی خطی ساده یکی از روش‌هایی است که از دیرباز مورد استفاده قرار گرفته است ولی به دلیل نیاز به اطلاعات و داده‌های دقیق در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی نتایج قابل قبولی ارایه نمی‌دهد، در جهان واقعی بسیاری از اطلاعات ناشناخته هستند. این اطلاعات نادقيق و مبهم معمولاً توسط اعداد قطعی بیان می‌شوند که با توجه و در نظر گرفتن عدم قطعیت نادرست است. از آنجایی که عدم قطعیت، فقدان دقت و اطلاعات ناقص در تنظیم بهینه جیره‌های خوراکی دام با روش‌های موجود که بر اساس برنامه‌ریزی‌های خطی انجام می‌شود، وجود دارد، استفاده از روش مناسبی جهت برآوردن این امر بدیهی است. در تصمیم‌گیری هنگامی که با عدم دقت و قطعیت مواجه هستیم، نظریه مجموعه‌های فازی یکی از بهترین ابزار برای لحاظ کردن عدم قطعیت در پارامترهای تصمیم‌گیری است. برنامه‌ریزی فازی به دلیل این که امکان دخالت داده‌های نادقيق و مبهم را در پارامترهای مدل، به تصمیم‌گیرندگان می‌دهد، نسبت به مدل‌های کلاسیک برنامه‌ریزی ریاضی برای استفاده در مسائل بهینه‌سازی دارای کاربرد انعطاف‌پذیری بیشتری بوده و نتایج قابل اعتمادتر می‌باشد. ناصری [۲] ضمن تعریف مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی کلاسیک در محیط فازی همچون جواب‌های شدنی، جواب‌های پایه‌ای، جواب بهینه، جواب تباہیده، شرایط بهینگی و... الگوریتم‌های سیمپلکس فازی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد فازی و مسائل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی را ارایه کرد.

مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای نوع خاصی از مدل‌های با ضرایب نادقيق است که در برنامه‌ریزی مسائل واقعی کاربرد فراوانی دارد. در حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای می‌توان جواب بهینه را در یک بازه به دست آورد که می‌تواند به‌نوبه خود اطلاعات بیشتری را در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار دهد؛ یعنی هر مقداری در این بازه، جواب بهینه است. همچنین با توجه به مجموعه برش‌ها در اعداد فازی می‌توان یک برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی را به مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای تبدیل نمود. با حل مساله بازه‌ای برای برش‌های متعدد می‌توان مقادیر بهینه تابع هدف را به دست آورد.

در روش فازی احتیاج به خبره دارید که دقیقاً میزان مصرف و احتیاجات و یا قیمت خوراک را مشخص کند که گاهی اوقات به دلیل اطلاعات ناقص و یا داده‌های کم این تخمین به درستی انجام نمی‌پذیرد. در روش بازه‌ای هم بیشتر حالت کلی مدنظر می‌باشد یعنی بازه قیمتی در حالت کلی در نظر گرفته می‌شود و اگر قیمت در یک روز مدنظر باشد و یا احتیاجات روز خاصی موردنوجه باشد امکان پذیر نیست. این در حالی است که با توجه به مفاهیم بنیادی اعداد خاکستری این امر به آسانی قابل دست‌یابی است. از این‌رو از روش برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری در هزینه، منابع و همچنین ضرایب مصرف استفاده شده است. مزیت این روش در آن

است که پارامترهای مساله را می‌توان به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای بیان کرد و با توجه به میزان اطمینان به داده‌ها مساله را حل کرد.

در زمینه نظریه سیستم‌های خاکستری دنگ [۳و۴] ضمن تشریح و توصیف سیستم‌های خاکستری و اعداد خاکستری به تصمیم‌گیری در موقعیت‌های خاکستری پرداخت. زنگ و لویس [۵] در مطالعه‌ای به ارایه مفهوم بهینه‌سازی سیستم‌های خاکستری پرداخته و به وسیله تحلیل نظری و مثال‌های عددی نشان دادند که مفهوم ارایه‌شده منطقی و معنادار است. چن و همکاران [۶] در مطالعه‌ای ضمن توصیف استفاده نظریه سیستم‌های خاکستری در مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پرداختند. همچنین استفاده از اعداد خاکستری بازه‌ای و پیش‌بینی خاکستری را در این مدل‌ها توسعه دادند که نتایج نسبت به مدل‌های قبلی در این زمینه رضایت‌بخش بوده است. لئو و همکاران [۷] در مطالعه‌ای به ارایه جواب‌های مکانی برای برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری پرداختند و با تبدیل این گونه مسایل به چندین مساله برنامه‌ریزی خطی معمولی آن را حل کرده‌اند و مشکل ارزیابی جواب‌ها را با معرفی درجه اطمینان جواب برطرف کردند. رضوی و همکاران [۸] در مطالعه‌ای با ارایه یک رویکرد برنامه‌ریزی چندهدفه به حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که روش ارایه‌شده می‌تواند هر مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را در حالت کلی حل کند و محدودیت‌های موجود در روش‌های قبل را برطرف کند. آن‌ها با توجه به رابطه ترتیب میان اعداد خاکستری بازه‌ای این روش را ارایه کردند. رن و همکاران [۹] در مطالعه‌ای یک مدل برنامه‌ریزی مبتنی بر برنامه‌ریزی خاکستری را برای سیستم مجتمع شیمیایی در شرایط عدم قطعیت ارایه دادند. به‌منظور حل مدل خاکستری مساله، یک روش جدید معرفی کردند که به تصمیم‌گیرنده در به دست آوردن هدف خواسته‌شده خود کمک بهتری می‌کند. در مدل خاکستری آن‌ها مقدار اعتبار جواب می‌تواند توسط تصمیم‌گیرنده پیشنهاد شود و نتایج برنامه‌ریزی تولید توسط مدل محاسبه می‌شود. لی و همکاران [۱۰] در مطالعه‌ای به ارایه یک فرمول کلی به‌منظور محاسبه معکوس ماتریس خاکستری پرداخته و از نتایج آن در حل برنامه‌ریزی خطی خاکستری استفاده کرده‌اند و نشان دادند که محاسبه آن بسیار ساده و مشکل دیگر روش‌های حل برنامه‌ریزی خطی و غیرقطعی را ندارد. نتایج آن‌ها همچنین می‌توانند در دیگر شاخه‌های تحقیق در عملیات هم استفاده شود. باغبان و همکاران [۱۱] رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری را در ارزیابی و رتبه‌بندی پیمان‌کاران و ارتقاء پیمان‌کاران ناکارا ارایه دادند. پس از جمع‌آوری داده‌ای اولیه در قالب مدل تحلیل پوششی داده‌های خاکستری نسبت به حل مدل اقدام گردید و با مشخص شدن جواب مدل اولیه تعدادی از پیمان‌کاران که دارای کارایی نسبی صد درصد بودند انتخاب شده، پس از مشخص شدن پیمان‌کاران کارا، با استفاده از الگوریتمی جهت رتبه‌بندی کامل عملکرد پیمان‌کاران کارا انجام گردید. در مرحله آخر ارایه راهکارهای مناسب برای بالابردن کارایی پیمان‌کاران ناکارا ارایه گردید. در مطالعه‌ای ثابت مطلق و همکاران [۱۲] از مفهوم نظریه خاکستری در ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان استراتژیک استفاده کردند. در این مطالعه تلاش شده است تا از یک رویکرد ترکیبی مبتنی بر فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری برای ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان استفاده شود. جباری و

همکاران [۱۳] در مقاله‌ای با عنوان ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام از مفهوم نظریه سیستم‌های خاکستری در تعیین مدل مناسب تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری با توجه به اندازه‌ی کوچک نمونه و نقص اطلاعات استفاده کردند که درنهایت نسبت سرمایه‌گذاری در هر صندوق با ارایه برنامه‌ریزی خطی خاکستری و برنامه‌ریزی عدد صحیح تعیین شد.

تاکنون استفاده چندانی از برنامه‌ریزی خطی خاکستری در تنظیم جیره دام نشده است اما مطالعات زیادی در زمینه تنظیم جیره خوراکی دام با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی خطی فازی صورت گرفته که از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به مطالعه اقدس طینت و همکاران [۱۴] اشاره کرد که به تنظیم جیره جوجه‌های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفتگی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن پرداختند. آن‌ها با استفاده از ۱۲ ماده خوراکی، ۱۱ مورد برای تامین شدن را مدنظر داشتند که شش جیره مختلف فازی با قیمت‌های مختلف را به دست آمد که همگی خوب، اما درجه خوبی آن‌ها متفاوت بوده است. کدنز و همکاران [۱۵] کاربرد بهینه‌سازی فازی در مساله جیره خوراکی در مزارع آرژانتین را ارایه کرده و نرم‌افزاری را هم تهیه کردند که قابلیت‌های فراوانی از جمله پیشنهاد جیره‌های مختلف با میزان اقتاع احتیاجات جیره، قیمت و میزان برآورده شدن قیود داشت. در این زمینه یاقوتی خراسانی و بخشوده [۱۶] در مطالعه‌ای با عنوان تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاو شیری با روش برنامه‌ریزی فازی که در شرکت سهامی زراعی تربت‌جام صورت گرفته است، ذکر کردند که یکی از اقلام عمدۀ هزینه در واحده‌ای دام‌پروری هزینه خوراک دام است که با گزینش یک جیره مناسب و با در نظر گرفتن نهاده‌های در دسترس می‌توان هزینه‌ها را کاهش داد. در این مطالعه به منظور تهیه یک جیره انعطاف‌پذیر به روش فازی ابتدا یک برنامه بهینه با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی تهیه شد. نتایج مقایسه دو روش قاطع و فازی نشان می‌دهد که جیره‌های به دست آمده از دو روش به مقدار زیادی مشابه هستند و به مقدار اندکی تفاوت دارند و هزینه‌های روش فازی کمتر از روش‌های قاطع است. درویشی سلوکالایی و همکاران [۱۷] در مطالعه‌ای که عنوان آن کاربرد بهینه‌سازی فازی در تنظیم جیره خوراکی گاوهای شیری است به جیره‌نویسی با روش برنامه‌ریزی ریاضی فازی پرداخته‌اند و نتایج حاصل از این جیره‌نویسی را با روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مقایسه کرده‌اند در مجموع در این مطالعه نتیجه گرفته شده است که با توجه به مفاهیم مربوط به مجموعه‌ها و اعداد فازی، استفاده از این روش در تنظیم جیره بسیار مفیدتر و واقع‌بینانه‌تر خواهد بود.

در این مطالعه، با توجه به عدم قطعیت موجود در مساله جیره‌نویسی دام و مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری، تنظیم مواد مغذی جیره خوراکی جوجه‌های گوشتی با استفاده از روش برنامه‌ریزی مکانی انجام و نتایج آن با نتایج مدل برنامه‌ریزی خطی معمولی، فازی، بازه‌ای مقایسه شدند. همچنین با استفاده از این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به انعطاف نظر مدیر به دست آورد. به این منظور پس از بیان مقدمه در بخش دوم مروری بر نظریه سیستم‌های خاکستری و اعداد و عملکردهای خاکستری ارایه می‌شود. در بخش سوم مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری و برنامه‌ریزی مکانی بیان می‌شود. در بخش چهارم رویکردهای مختلف ریاضی و عدم قطعیت در جیره‌نویسی دام بیان و نتایج حاصل مقایسه می‌شوند. در بخش پنجم نیز نتایج و پیشنهادات مطرح شده است.

۲ نظریه سیستم‌های خاکستری

پروفسور جولانگ دنگ، پژوهشگر چینی در سال ۱۹۸۲، نظریه سیستم‌های خاکستری را معرفی نمود که کاربردهای آن امروزه در پنج حوزه ارزیابی، مدل‌سازی، پیش‌بینی، تصمیم‌گیری و کنترل قابل دسته‌بندی است [۱۸]. اتخاذ تصمیمات درست نیازمند وجود اطلاعات کافی می‌باشد که در عمل کمتر سیستمی را می‌توان یافت که تمام اطلاعات آن شناخته شده باشند. چراکه تعیین تمام اجزا و روابط بین آن‌ها در بیشتر سیستم‌ها یا غیرممکن بوده و یا بسیار پرهزینه و غیرااقتصادی می‌باشد. اگر اطلاعات واضح و شفاف یک سیستم را با رنگ سفید و اطلاعات کاملاً ناشناخته یک سیستم با رنگ سیاه تجسم شود، در این صورت اطلاعات مربوط به بیشتر سیستم‌های موجود در طبیعت اطلاعات سفید (کاملاً شناخته شده) و یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیستند بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به رنگ خاکستری هستند. این گونه سیستم‌ها را سیستم خاکستری می‌نامند که اصلی‌ترین مشخصه آن‌ها، کامل نبودن اطلاعات مربوط به آن سیستم است. هر سیستم خاکستری به وسیله اعداد خاکستری، معادلات خاکستری و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود که در این میان اعداد خاکستری به مثابه اتم‌ها و سلول‌های این سیستم هستند.

عدد خاکستری می‌تواند به عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. یک عدد خاکستری می‌تواند به صورت $[a, b] \in \otimes$ تعریف شود؛ به عبارت دیگر عدد خاکستری به عددی اطلاق می‌شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در بر می‌گیرد شناخته شده است. طبق تعریف لی و همکاران [۱۸]، اعداد خاکستری را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

فرض کنیم X مجموعه مرجع باشد. آنگاه مجموعه خاکستری G از مجموعه مرجع X با دو نماد $(x)_G$ و $\underline{\mu}_G(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1]$$

$$\underline{\mu}_G(x) : x \rightarrow [0, 1]$$

که در آن $(x)_G = X$ و $\bar{\mu}_G(x) \geq \underline{\mu}_G(x)$ می‌باشد.

$\underline{\mu}_G(x)$ و $\bar{\mu}_G(x)$ به ترتیب حد بالا و حد پایین ازتابع عضویت G می‌باشند. شایان ذکر است که در حالت تساوی مجموعه خاکستری G تبدیل به مجموعه فازی می‌شود که نشان‌دهنده شمول نظریه خاکستری به حالت‌های فازی و انعطاف آن در مواجهه با مسایل فازی است [۱۸]. اعداد خاکستری می‌توانند فقط با کران پایین به شکل $(\underline{a}, \infty) \in \otimes$ یا فقط با کران بالا به شکل $(-\infty, \bar{a}) \in \otimes$ باشند و یا این که هم دارای کران پایین و هم دارای کران بالا \bar{a} باشند که در این صورت عدد خاکستری بازه‌ای نامیده می‌شود و به صورت $\underline{a} \otimes \bar{a} \in [\underline{a}, \bar{a}]$ نمایش داده می‌شود. به عنوان نمونه، وزن یک بسته که بین ۲۰ تا ۲۵ کیلوگرم می‌باشد و یا اندازه قد یک مرد که بین ۱/۸ تا ۱/۹ متر می‌باشد، نمونه‌هایی از اعداد خاکستری بازه‌ای هستند که به ترتیب به شکل $\underline{\otimes} \in [20, 25]$ و $\bar{\otimes} \in [1/8, 1/9]$ نوشته می‌شوند.

هرگاه دو عدد خاکستری $[c, d], \otimes, \in [a, b] \in \otimes$ مفروض باشند در این صورت روابط میان عملگرهای بازه‌ای گسترش یافته برای اعداد خاکستری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱) جمع دو عدد خاکستری: $\otimes_1 + \otimes_2 \in [a+c, b+d]$

(۲) تفریق دو عدد خاکستری: $\otimes_1 - \otimes_2 = \otimes_1 + (-\otimes_2) \in [a-d, b-c]$

(۳) قرینه یک عدد خاکستری: $-\otimes_1 = [-b, -a]$

(۴) معکوس یک عدد خاکستری: $\otimes_1^{-1} \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$

(۵) ضرب دو عدد خاکستری: $\otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [Min\{ac, ad, bc, bd\}, Max\{ac, ad, bc, bd\}]$

(۶) تقسیم دو عدد خاکستری: $\frac{\otimes_1}{\otimes_2} = \otimes_1 \cdot \otimes_2^{-1}$

$$\frac{\otimes_1}{\otimes_2} \in [Min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, Max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}]$$

هرگاه k یک عدد حقیقی مثبت باشد، ضرب عددی آن در مجموعه خاکستری به صورت زیر خواهد بود:

$$K \in \Re^+, K \cdot \otimes_1 \in [Ka, Kb]$$

طول عدد خاکستری که بانماد $L(\otimes_1)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\otimes_1) = [b-a]$$

برای مقایسه دو عدد خاکستری از مفهوم درجه امکان خاکستری استفاده می شود. هرگاه $\otimes_1, \otimes_2 \in [a, b]$ $a < b$ و

$\otimes_1, \otimes_2 \in [a, b]$, $c < d$ دو عدد خاکستری باشند درجه امکان خاکستری $\leq \otimes_1, \otimes_2$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$P\{\otimes_1 \leq \otimes_2\} = \frac{Max(\cdot, L^* - Max(\cdot, b-c))}{L^*}$$

که در آن $L^* = L(\otimes_1) + L(\otimes_2)$ می باشد. با توجه به نسبت دو عدد خاکستری چهار حالت برای \otimes_1 و \otimes_2 ممکن است رخدده:

الف) اگر $c = a$ و $b = d$ باشد، آنگاه دو عدد خاکستری مساوی هستند ($\otimes_1 = \otimes_2$). در این صورت می توان

$$P(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 0/5$$

ب) اگر $c > b$ باشد، آنگاه $\otimes_1 < \otimes_2$ و خواهیم داشت: 1

ج) اگر $a < d$ باشد، آنگاه $\otimes_2 < \otimes_1$ و خواهیم داشت: 0

د) اگر یک قسمت مشترک در دو عدد خاکستری وجود داشته باشد در این صورت اگر $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) < 0/5$ باشد در این صورت گفته می شود که عدد \otimes_2 از عدد \otimes_1 کوچک تر است و اگر $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) > 0/5$ باشد، عدد \otimes_2 از عدد \otimes_1 بزرگ تر است.

۳ مساله برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری

در این بخش به مفاهیم اولیه و برخی تعاریف مسایل برنامه ریزی خطی که دارای پارامترهای خاکستری بوده پرداخته و ضمن معرفی مقادیر سفید شده آنها، مساله برنامه ریزی مکانی نیز بررسی می شود. شکل کلی مساله برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\text{Min (Max)} \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

s.t.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq (\leq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq (\leq) b_2, \\ &\vdots && \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq (\leq) b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ C(\otimes) &= [c_1(\otimes), c_2(\otimes), \dots, c_n(\otimes)]^T \\ b(\otimes) &= [b_1(\otimes), b_2(\otimes), \dots, b_m(\otimes)]^T \\ A(\otimes) &= \begin{bmatrix} a_{11}(\otimes) & a_{12}(\otimes) & \cdots & a_{1n}(\otimes) \\ a_{21}(\otimes) & a_{22}(\otimes) & \cdots & a_{2n}(\otimes) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\otimes) & a_{m2}(\otimes) & \cdots & a_{mn}(\otimes) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} c_j(\otimes) &\in [\underline{c}_j, \bar{c}_j], \quad \underline{c}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ b_i(\otimes) &\in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \quad \underline{b}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_{ij}(\otimes) &\in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}], \quad \underline{a}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

آنگاه

$$\text{Max } S = C(\otimes)X$$

s.t.

$$\begin{aligned} A(\otimes)X &\leq b(\otimes), \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

یک مساله برنامه‌ریزی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود و $C(\otimes)$ بردار هزینه خاکستری، $A(\otimes)$ ماتریس مصرف خاکستری و $b(\otimes)$ بردار محدودیت منابع خاکستری و X بردار تصمیم برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری می‌باشد. در حقیقت X یک بردار خاکستری است [۱۹].

تعریف ۱: فرض کنید $\rho_j, \beta_i, \delta_{ij} \in [0, 1], i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$. مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری به ترتیب به صورت زیر باشند:

$$\tilde{c}_j(\otimes) = \rho_j \bar{c}_j + (1 - \rho_j) \underline{c}_j; j = 1, \dots, n.$$

$$\tilde{b}_i(\otimes) = \beta_i \bar{b}_i + (1 - \beta_i) \underline{b}_i; i = 1, \dots, m.$$

$$\tilde{a}_{ij}(\otimes) = \delta_{ij} \bar{a}_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \underline{a}_{ij}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

که در آن $\tilde{A}(\otimes), \tilde{b}(\otimes), \tilde{C}(\otimes)$ به ترتیب بردار سفید شده هزینه، محدودیت منابع و ماتریس سفید شده مصرف هستند. آنگاه

$$\text{Max } S = \tilde{C}(\otimes)X$$

s.t.

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\otimes)X &\leq \tilde{b}(\otimes), \\ X &\geq 0. \end{aligned} \tag{۲}$$

برنامه ریزی مکانی برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود.

$$\begin{aligned} (\rho_j)_{j=1,\dots,n} &\text{ ضرایب مکانی بردار هزینه، } (\beta_i)_{i=1,\dots,m} \text{ ضرایب مکانی بردار محدودیت منابع} \\ &\text{ } (\delta_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n} \text{ ضرایب مکانی مصرف می باشد.} \end{aligned}$$

در تعریف فوق، ρ_j بازتاب نوسان قیمت زمین محصول می باشد که می تواند با استفاده از تحلیل بازار تعیین شود. مقادیر کوچک تر ρ_j نمایشگر کمترین قیمت مورد انتظار از زمین محصول و مقادیر بزرگ تر ρ_j قیمت مورد انتظار بالاتری از زمین محصول است.

ضریب β_i بازتابی از موجودی بازار i این منبع است. کمترین مقدار β_i بیانگر کسری موجودی i این منبع بوده و بزرگترین مقدار β_i کفايت موجودی i این منبع را بیان می کند.

به طور مشابه کمترین مقدار δ_{ij} بیانگر کمترین مقدار مصرف i این منبع برای تولید یک واحد از زمین محصول و مقادیر بزرگتر δ_{ij} نشانگر بالاترین مصرف از i این منبع برای تولید یک واحد از زمین محصول می باشد.

گزاره ۱: مقدار بهینه ماکریزم S برنامه ریزی مکانی یک برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری تابعی با متغیر $(\rho_j, \beta_i, \delta_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$ می باشد [۱۹].

از گزاره ۱ مقدار بهینه ماکریزم S از برنامه ریزی مکانی می تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$\text{Max } S = f((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

به طور مشابه برنامه ریزی مکانی آن را می تواند به صورت $LP((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ نشان داد: برای راحتی، مفروضات زیر را در نظر می گیریم.

$$\text{فرض ۱. } \text{rank}(\tilde{A}(\otimes)) = m < n.$$

فرض ۲. مجموعه متشکل از جوابهای شدنی $LP((\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ ناتهی است.

فرض ۳. مجموعه $\{X | \tilde{A}(\otimes)X \leq \tilde{b}(\otimes), X \geq 0\}$ متشکل از بردارهای حقیقی کران دار است.

در عین حال برنامه ریزی مکانی $(\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}) | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } S &= [\tilde{C}_B(\otimes), \tilde{C}_N(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \\
 \text{s.t.} \\
 &[\tilde{B}(\otimes), \tilde{N}(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \leq \tilde{b}(\otimes), \\
 &X_B, X_N \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

یعنی، m ستون اول ماتریس سفید شده مصرف $(\otimes) \tilde{A}(\otimes)$ می‌باشد و $n-m$ ستون دیگر $(\otimes) \tilde{N}(\otimes)$ غیر پایه‌ای می‌باشد. بردارهای پایه‌ای و غیر پایه‌ای متناظر با $(\otimes) \tilde{B}(\otimes)$ و $(\otimes) \tilde{N}(\otimes)$ به ترتیب X_B و X_N می‌باشند. همچنین بردارهای سفید شده هزینه متناظر با X_B و X_N به ترتیب به صورت $(\otimes) \tilde{C}_B(\otimes)$ و $(\otimes) \tilde{C}_N(\otimes)$ نوشته می‌شوند. از فرض ۳ و با توجه به اینکه $X_N = 0$ ، بدیهی است که

$$\begin{aligned}
 X &= [X_B, X_N]^T = [\tilde{B}^{-1}(\otimes) \tilde{b}(\otimes), \cdot]^T \\
 S &= \tilde{C}_B(\otimes) \tilde{B}^{-1}(\otimes) \tilde{b}(\otimes)
 \end{aligned}$$

و بردار آزمون بهینگی به صورت زیر است:

$$r = \tilde{C}_B(\otimes) - \tilde{C}_B(\otimes) \tilde{B}^{-1}(\otimes) \tilde{A}(\otimes)$$

گزاره ۲: فرض کنید برنامه‌ریزی مکانی (۳) مفروضات ۱، ۲ و ۳ بالا را برآورده می‌سازد و $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ یک جواب پایه‌ای از برنامه‌ریزی مکانی (۳) باشد. آنگاه $\{x_j | j = 1, \dots, n\}$ کران‌دار است [۱۹].

گزاره ۳: حداقل یک جواب شدنی پایه‌ای برای مساله برنامه‌ریزی مکانی ($\rho_j, \beta_i, \delta_{ij}$) وجود دارد که در مفروضات ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کند [۱۹]. برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری همچنین برنامه‌ریزی خطی شناور خاکستری نیز نامیده می‌شود. در حقیقت، یک مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری، مجموعه‌ای مرکب از تعدادی مسایل معمولی از برنامه‌ریزی خطی است. فرض می‌کنیم بردارها و ماتریس‌های سفید شده داده شده در زیر خاصیت نامنفی بودن را حفظ می‌کنند.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } S &= [\tilde{C}_B(\otimes), \tilde{C}_N(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \\
 \text{s.t.} \\
 &[\tilde{B}(\otimes), \tilde{N}(\otimes)] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} \leq \tilde{b}(\otimes), \\
 &X_B, X_N \geq 0.
 \end{aligned}$$

تعريف ۲: فرض کنید برای هر $\rho = \rho_j$ آنگاه $\beta_i = \beta$, $\delta_{ij} = \delta$ و $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ داشته باشیم:

برنامه ریزی مکانی متناظر (ρ, β, δ) - برنامه ریزی مکانی نامیده می شود و به صورت $LP(\rho, \beta, \delta)$ نوشته می شود. مقدار بهینه آن با ماکریزم $S(\rho, \beta, \delta)$ نمایش داده و مقدار بهینه (ρ, β, δ) - مکانی نامیده می شود.

قضیه ۱ [۱۹]: برای برنامه ریزی مکانی (ρ, β, δ) داریم:

$$(1) \text{ هنگامی که } \rho = \rho_j, \beta = \beta_j, \delta \leq \delta_j \text{ آنگاه } Max S(\rho, \beta, \delta) \geq Max S(\rho_j, \beta_j, \delta_j).$$

$$(2) \text{ هنگامی که } \rho_j \leq \rho, \beta = \beta_j, \delta = \delta_j \text{ آنگاه } Max S(\rho, \beta, \delta) \geq Max S(\rho_j, \beta_j, \delta_j).$$

$$(3) \text{ هنگامی که } \rho = \rho_j, \beta_j \leq \beta, \delta = \delta_j \text{ آنگاه } Max S(\rho, \beta, \delta) \geq Max S(\rho_j, \beta_j, \delta_j).$$

در اینجا ρ نشانگر سطح هزینه کلی n نوع از محصولات، β بیانگر وضعیت کلی عرضه m نوع منابع و همچنین δ بازتاب جامع از سطوح روش صنعتی، اندازه نیروی کار و سطوح مدیریتی کاربردی در تولید می باشد.

تعريف ۳: زمانی که $\rho = \beta = 0, \delta = 0$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر آن $LP(0, 0, 0)$ یک مدل آل برای مساله

برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود که مقدار بهینه آن به صورت $Max \bar{S}$ نوشته می شود.

تعريف ۴: وقتی $\rho = \beta = 0, \delta = 1$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر آن $LP(0, 0, 1)$ یک مدل بحرانی برای مساله

برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می شود که مقدار بهینه آن به صورت $Max \underline{S}$ نوشته می شود.

تعريف ۵: هنگامی که $\theta = \beta = \delta = \rho$ ، برنامه ریزی مکانی متناظر یک برنامه ریزی θ - مکانی نامیده می شود و

با $LP(\theta)$ نشان می دهد. به طور مشابه، مقدار بهینه آن به صورت $Max S(\theta)$ نوشته و مقدار بهینه

θ - مکانی نامیده می شود. به ویژه زمانی که $\theta = 0/5$ ، برنامه ریزی θ - مکانی متناظر $LP(0/5)$ برنامه ریزی

سفید شده متوسط نامیده می شود.

به طور کلی، برنامه ریزی سفید شده متوسط رایج ترین نوع از برنامه ریزی خطی با پارامترهای خاکستری است.

قضیه ۲ [۱۹]: برای هر $\rho, \beta, \delta \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$Max \underline{S} \leq Max S(\rho, \beta, \delta) \leq Max \bar{S} \quad (1)$$

$$Max \underline{S} \leq Max S(\theta) \leq Max \bar{S} \quad (2)$$

اثبات: تنها به اثبات (۱) می پردازیم. اثبات دومین گزاره مشابه (۱) می باشد که از بیان آن صرف نظر می شود.

از آنجایی که $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1$ از قضیه ۱ نتیجه می شود که

$$Max \underline{S} = Max S(0, 0, 1) \leq Max S(\rho, 0, 1) \leq Max S(\rho, \beta, 1) \leq Max S(\rho, \beta, \delta).$$

به طور مشابه می توان نشان داد: $Max S(\rho, \beta, \delta) \leq Max \bar{S}$

۴ ارایه مدل خاکستری و مقایسه آن با مدل های ریاضی در تنظیم جیره ۱۵

در این بخش چهار مساله مدل سازی آورده می شود تا با مثال ضرورت استفاده از رویکرد سیستم های خاکستری در مدل سازی ریاضی توصیف گردد.

مساله ۱: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی خطی کلاسیک) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۲۲ کیلوگرم پروتئین و ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا ۰/۰۵ درصد پروتئین و ۰/۰۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۰۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل ۰/۰۰۶۵ درصد پروتئین و ۰/۰۰۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۰۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟

هر گاه x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز بر حسب کیلوگرم باشد، مدل مساله به صورت زیر خواهد

بود:

$$\text{Min } Z = ۰/۰۴x_1 + ۰/۰۲x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= ۱۱۵۰, \\ ۰/۰۵x_1 + ۰/۰۱x_2 &\geq ۲۲۰, \\ ۰/۰۰۶۵x_1 + ۰/۰۰۳x_2 &\geq ۵, \\ x_1, x_2 &\geq ۰. \end{aligned} \tag{۴}$$

مساله ۲: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی خطی فازی) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه در حدود ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۰۲۲ کیلوگرم پروتئین و در حدود ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا در حدود ۰/۰۵ درصد پروتئین و در حدود ۰/۰۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن در حدود ۰/۰۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل تقریباً ۰/۰۰۶۵ درصد پروتئین و تقریباً ۰/۰۰۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۰۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟ کمترین هزینه چقدر است؟

در صورتی که x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز بر حسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z = \overline{۰/۰۴}x_1 + \overline{۰/۰۲}x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \overline{۱۱۵۰}, \\ \overline{۰/۰۵}x_1 + \overline{۰/۰۱}x_2 &\geq \overline{۲۲۰}, \\ \overline{۰/۰۰۶۵}x_1 + \overline{۰/۰۰۳}x_2 &\geq \overline{۵}, \\ x_1, x_2 &\geq ۰. \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\overline{۰/۰۴}$ به عنوان یک عدد فازی است. این مدل، یک مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی محاسب می‌شود.

مساله ۳: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی بازه‌ای) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شود که برای تهیه خوراک آن‌ها از دو نوع ماده سویا و ارزن استفاده می‌گردد. هر جوجه ۱-۱/۳ کیلوگرم سویا و ارزن در روز

می خورد و روزانه حداقل به $0/210 - 0/230$ کیلوگرم پروتئین و $0/004 - 0/006$ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. هر کیلوگرم از سویا شامل $0/48 - 0/52$ درصد پروتئین و $0/05 - 0/08$ درصد کلسیم می باشد. قیمت هر کیلوگرم $0/38 - 0/42$ دلار است. هر کیلوگرم از ارزن شامل $0/115 - 0/118$ درصد پروتئین و $0/03 - 0/05$ درصد کلسیم می باشد که قیمت هر کیلوگرم آن $0/2$ دلار می باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک مرغداری حداقل گردد؟ کمترین هزینه چقدر است؟

واضح است که پارامترها در مساله بهینه سازی فوق اعداد بازه ای هستند که برای حل آن باید مسائل بی شماری را بهینه سازی نمود؛ لذا از روش های معمولی برنامه ریزی خطی نمی توان آن را حل نمود و نیاز به روش های مناسب تری است. از این رو مساله را به صورت قالب برنامه ریزی بازه ای ذیل بیان می کنیم:

هر گاه x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن مورد نیاز بر حسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$Min \ Z = [0/38, 0/42]x_1 + [0/20, 0/23]x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1000, 1300], \\ [0/48, 0/52]x_1 + [0/085, 0/115]x_2 &\geq [210, 230], \\ [0/005, 0/008]x_1 + [0/003]x_2 &\geq [4, 6], \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $[0/38, 0/42]$ عدد بازه ای نامیده می شود و $[0/20, 0/23]$ عدد بازه ای نامیده می شود و

مساله ۴: (توصیف مساله از نگاه برنامه ریزی خاکستری) ۱۰۰۰ جوجه در مزرعه پرورش جوجه که دو نوع علوفه سویا و ارزن مصرف می کنند، وجود دارند. چون شرایط برای هر جوجه متفاوت است، نمی توان اطلاعات کافی را به منظور محاسبه مقدار ارزن واقعی که هر جوجه روزانه به آن نیاز دارد را جمع آوری کرد. اگرچه، بررسی روش های مناسب نشان می دهد مقدار واقعی علوفه ای که یک جوجه در روز باید بخورد در دامنه $1-1/3$ کیلوگرم می باشد و علوفه مورد نیاز همه جوجه ها در روز خیلی مشابه است. برای به دست آوردن وزن مناسب، هر جوجه به مقادیر مختلفی از پروتئین و کلسیم نیاز دارد. همچنین مقدار واقعی که هر جوجه روزانه به پروتئین و کلسیم نیاز دارد را نمی دانیم زیرا شرایط متفاوت است؛ اما با مشاهدات عملی می توان مشخص کرد که مقادیر واقعی پروتئین و کلسیم مصرفی هر جوجه به ترتیب $0/210 - 0/230$ کیلوگرم می باشد. به علاوه، به خاطر اینکه شرایط تولید استفاده شده توسط هر تولید کننده متفاوت است مقدار واقعی پروتئین و کلسیم سویا را نمی دانیم؛ بنابراین آن ها به ترتیب میان بازه $[0/48, 0/52]$ و $[0/005, 0/008]$ هستند. قیمت واقعی سویا در یک روز خاص معلوم نیست به خاطر پیچیدگی بازار، اما باید بین $0/38 - 0/42$ دلار باشد. به دلایل مشابه، مقدار واقعی پروتئینی که ارزن دارد بین $[0/115, 0/118]$ کیلوگرم و مقدار کلسیم واقعی آن $0/003 - 0/006$ کیلوگرم و قیمت آن $0/2$ دلار برای هر کیلوگرم می باشد. علوفه چطور باید مخلوط شود که هزینه آن برای یک روز خاص مینیمم شود؟

برای مسائله های مشابه، از نگاه بازه مقدار طولانی مدت بررسی می شود در حالی که از دید خاکستری مقادیر فقط برای یک روز بررسی می شوند. گذشته از یک زمان طولانی، هر مقدار در دامنه داده ها از مسائل بازه ای

می‌تواند درست باشد بنابراین دامنه همه داده‌ها بازه‌ها هستند. برای یک روز، مقدار واقعی داده می‌تواند تنها یک مقدار باشد و نمی‌توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. اگرچه می‌توان دامنه تغییرات آن را با استفاده از روش‌های بررسی مناسب مشخص کرد. این نکته قابل ذکر است که مقدار واقعی یک متغیر در روز دیگر ممکن متفاوت باشد، حتی اگر دامنه یکسانی به دست آوریم. برای مثال، یک جوجه را در نظر بگیرید که ۰/۲۲۳ کیلوگرم پروتئین در یک روز و ۰/۲۲۳ کیلوگرم در روز بعدی مصرف می‌کند. هردوی ۰/۲۲۲ و ۰/۲۲۳ متعلق به بازه [۰/۲۳، ۰/۲۱] می‌باشند اما مقادیر واقعی متفاوت هستند. اگر هزینه واقعی سویا در یک روز مشخص نباشد آنگاه قیمت آن یک عدد خاکستری است. با استفاده از روش‌های بررسی مناسب می‌توان تخمینی از دامنه [۰/۴۲، ۰/۳۸] را به دست آورد و اطمینان داد که قیمت واقعی باید در این بازه قرار داشته باشد. در این صورت به این بازه مجموعه عدد پوشاننده می‌گویند؛ اما یک عدد بازه‌ای است. به طور مشابه برای متغیرهای دیگر هم این موضوع صادق است. حال اگر x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز بر حسب کیلوگرم باشد، مدل خاکستری آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = c_1(\otimes)x_1 + 0/2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_1(\otimes), \\ a_{11}(\otimes)x_1 + a_{12}(\otimes)x_2 &\geq b_2(\otimes), \\ a_{21}(\otimes)x_1 + 0/003x_2 &\geq b_3(\otimes), \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

مدل پوشاننده رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = [0/38, 0/42]x_1 + 0/20x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1000, 1300], \\ [0/48, 0.52]x_1 + [0/085, 0/115]x_2 &\geq [210, 230], \\ [0/005, 0/008]x_1 + 0/003x_2 &\geq [4, 6], \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

ظاهرآً معادله (6) و (7) یکسان هستند. هر چند مدل پوشاننده رابطه (8) متفاوت از مدل رابطه (6) است. وقتی که اطلاعات بیشتری جمع آوری شود مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند و تنها یک فرم نمایش از رابطه (7) است. مدل واقعی تنها یکی از موارد داخل مدل پوشاننده است و آن تنها مدل بالقوه واقعی نامیده می‌شود. با اضافه شدن اطلاعات، مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند اما مدل بالقوه واقعی تغییر نمی‌کند و در بین مدل پوشاننده جدید قرار می‌گیرد. درحالی که مدل بازه‌ای ثابت است. هر مدل مشخص بین آن صحیح است و همه آن‌ها مربوط به یک واقعیت خاص برای روزهای متفاوت می‌باشند.

مساله‌های بیان شده با رویکردهای متفاوت برنامه‌ریزی خطی ساده، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی فازی و برنامه‌ریزی خطی خاکستری را با روش‌های معمول مربوطه حل شده و جواب‌های به دست آمده در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱. مقایسه جواب رویکردهای قطعی، فازی، بازه‌ای و خاکستری مساله جیره خوراکی

نوع مساله	Z	x_1	x_2
برنامه‌ریزی خطی کلاسیک	۳۱۸/۵۷	۷۰۷/۱۷	۴۴۲/۸۶
برنامه‌ریزی خطی فازی (تانگ شوچنگ)	[۲۲۸، ۳۴۶]	۵۶۴	۳۹۷
برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (تانگ شوچنگ)	[۲۴۲ / ۲۲، ۴۹۱]	[۲۵۰، ۷۶۵ / ۴۳]	[۲۳۴ / ۵۷، ۱۰۵۰]
برنامه‌ریزی خطی خاکستری (جواب پوشانده)	[۱۵۹ / ۴۱، ۵۰۲ / ۸۱]	[۲۶۳ / ۱۵، ۸۱۹]	[۲۸۱، ۸۲۶ / ۸۵]

بر اساس نتایج جدول ۱ مشاهده می‌شود که مدل برنامه‌ریزی خطی با روش ساده‌ک حل شده، جواب قطعی و مقدار بهینه آن در سطر اول جدول آمده است. تانگ شوچنگ [۲۰] یک جواب برای مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای و فازی مساله را به دست آورد و نشان داده است که می‌توان مساله را با انعطاف پیش تری حل کرد. لی و همکاران [۱۰] یک جواب پوششی برای مساله با رویکرد خاکستری به دست آوردند که در سطر آخر جدول آمده است. حال به منظور حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری با روش برنامه‌ریزی مکانی ابتدا مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری را نوشته سپس جواب مساله به ازای مقادیر مختلف ρ ، β و δ محاسبه می‌شود. مدل برنامه‌ریزی خطی سفید شده مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری مساله جیره فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{Min } Z = (0/42\rho_1 + 0/38(1-\rho_1))x_1 + 0/2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1300\beta_1 + 100(1-\beta_1), \\ (0/52\delta_{11} + 0/48(1-\delta_{11}))x_1 + (0/115\delta_{12} + 0/085(1-\delta_{12}))x_2 &\geq 230\beta_2 + 210(1-\beta_2), \\ (0/008\delta_{21} + 0/005(1-\delta_{21}))x_1 + 0/003x_2 &\geq 6\beta_3 + 4(1-\beta_3), \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ضرایب هر یک از پارامترهای سفید شده را می‌توان به صورت جداگانه اعمال کرد که برای سهولت و بدون از دادن کلیت، ضرایب پارامترهای هزینه ρ و ضرایب پارامترهای منابع β و ضرایب پارامترهای تکنولوژیکی δ در نظر گرفته شده است. مدل‌های روش برنامه‌ریزی مکانی با مقادیر مختلف ρ ، β و δ و با استفاده از نرم‌افزار GAMS حل شده و جواب‌های به دست آمده در جدول ۲ آمده است.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که بهترین مقدار جواب (ایده‌آل) برابر ۴۹۱ و بحرانی‌ترین مقدار جواب ۲۴۲/۲۲ می‌باشد که شباهت زیادی به جواب مدل بازه‌ای دارد. مقدار جواب برنامه‌ریزی سفید شده متوسط ۳۲۲/۸۶ به دست آمده است که خیلی نزدیک به روش برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. مشاهده می‌شود مقدار ضرایب در پارامترهای سفید شده به طور مستقیم بر روی مقدار جواب نهایی تاثیرگذار است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در جدول ۲ مجموعه‌ای از جواب‌ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن‌ها متفاوت است. در این میان می‌توان بررسی کرد که بیشتر بودن کدام ضریب‌ها می‌تواند روی مقدار

بهینه تاثیر بیشتری داشته باشد. در کل حالات بسیار زیادی را می‌توان در نظر گرفت که ما فقط چند نمونه از آن را بررسی نموده‌ایم.

جدول ۲. جواب برنامه‌ریزی مکانی مساله جیره با ازای مقادیر مختلف

Z	x_2	x_1	(ρ, β, δ)
۲۴۲/۲۲	۷۵۶/۴۳	۲۳۴/۵۷	(۰, ۰, ۱)
۴۹۱	۲۵۰	۱۰۵۰	(۱, ۱, ۰)
۳۲۲/۸۶	۹۸۵/۷۱	۳۱۴/۲۹	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)
۲۷۹/۵۷	۷۶۹/۳۱	۳۲۰/۶۹	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)
۳۳۰/۲۶	۵۶۰/۴۶	۵۲۹/۵۵	(۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)
۳۴۴/۴۷	۴۹۳/۴۵	۵۹۶/۵۵	(۰/۸, ۰/۵, ۰/۳)
۳۷۲/۲۶	۷۰۱/۴۳	۵۶۸/۵۷	(۰/۷, ۰/۹, ۰/۵)
۲۹۷/۶۴	۷۹۷/۷۳	۳۵۲/۲۷	(۰/۳, ۰/۵, ۰/۸)

۵ نتیجه‌گیری

به طور معمول در تنظیم جیره خوراکی دام روش برنامه‌ریزی خطی کلاسیک به کاربرده می‌شود؛ اما با توجه به این که اغلب داده‌ها تجربی، نادقيق و تقریبی هستند از مدل‌های فازی و بازه‌ای استفاده شده تا جیره تنظیمی از انعطاف‌پذیری لازم برخوردار باشد. بازه‌ها معمولاً برای مقادیر تقریبی و یا زمان طولانی مدت بررسی می‌شوند درحالی که از دید خاکستری مقادیر فقط برای یک زمان خاص بررسی می‌شوند. گذشته از این، هر مقدار در دامنه داده‌ها از مسایل بازه‌ای می‌تواند درست باشد و این در حالی است که برای یک عدد خاکستری، مقدار واقعی داده می‌تواند تنها یک مقدار باشد و نمی‌توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. برای تصمیم‌گیری در محیط فازی نیاز به تابع عضویت و خبره دارید که همواره امکان‌پذیر نمی‌باشد. مزیت نظریه دستگاه‌های خاکستری این است که شرایط فازی بودن را در برمی‌گیرد. هدف اصلی این پژوهش معرفی روشی جدید برای جیره‌نویسی دام در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب‌تر باشد. در حقیقت نتایج حاصل از حل و مقایسه مدل رویکردهای مختلف، موید این مطلب است که به غیراز رویکرد رویکرد کلاسیک جواب‌های همه به صورت یک بازه بیان می‌شوند که تنها طول بازه‌های آن‌ها متفاوت است؛ اما با رویکرد خاکستری و با روش برنامه‌ریزی مکانی می‌توان بدون نیاز به حل مسایل بازه‌ای یا تابع عضویت، آن را حل نمود و مقدار قطعی تابع هدف را برای مقادیر مختلف به دست آورد و این رویکرد از لحاظ محاسباتی بسیار حائز اهمیت است. درواقع مجموعه‌ای از جواب‌ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن‌ها متفاوت است. به طوری که مقدار جواب برنامه‌ریزی سفید شده متوسط به دست آمده خیلی نزدیک به روش برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. با استفاده از این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت نهاده‌ها و همچنین میزان موجودی و مقدار مصرف منابع با نظر مدیر به دست آورد. با استفاده از توانایی این روش نویسنده‌گان

در صددند چنین روشی را برای کاربردهای واقعی دیگر و نیز برای مسایل با عدم قطعیت ادراکی مطالعه نمایند. به ویژه می‌توان در مطالعات آتی از روش‌های پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی همچون الگوریتم سیمپلکس اولیه خاکستری که اخیراً توسط ناصری و همکاران [۲۱] پیشنهاد نمودند برای حل این مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری استفاده کرد. علاوه بر آن، با توسعه نتایج اخیر می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

منابع

- [۱] ناصری، س.ه. (۱۳۸۶). روش‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۳)، ۷۶-۶۷.
- [۲] باغبان، ع.، امیری، م.، افت، ل.، شرفی آورزمان، ز.، (۱۳۹۳). ارزیابی و رتبه‌بندی پیمانکاران و ارتقاء پیمانکاران ناکارا با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری-مورد مطالعه پیمانکاران گروه مپنا. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۲۹(۲)، ۳۸-۲۱.
- [۳] ثابت مطلق، م.، صالحی صدقیانی، ج.، ایازی، س.ع.، عابدی نایینی، م.، (۱۳۹۳). ارزیابی و انتخاب تامین‌کنندگان استراتژیک با استفاده از روش ترکیبی فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۴)، ۱۱۷-۱۰۱.
- [۴] جباری، ر.، صدقیانی، ج.، امیری، م.، (۱۳۹۱). ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۱)، ۱۹-۱.
- [۵] اقدس طینت، ج.، مرتضوی، س.ا.، (۱۳۸۳). تنظیم جیره جوجه‌های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفتگی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی متقاضان. مجموعه مقالات، پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی، ایران، تهران، ۴۸۱-۴۷۳.
- [۶] یاقوتی خراسانی، م.، بخشوده، م.، (۱۳۸۶). تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاوهاشیری با روش برنامه‌ریزی فازی. فصلنامه اقتصاد و کشاورزی، ۱۲(۱)، ۱۱۷-۱۰۳.
- [۷] Waugh, F., (1951). The minimum cost dairy feed. *Farm Economics*, 33, 299-310.
- [۸] Deng, J., (1982). The control problems of grey systems, *System Control Letter*, 5, 288-294.
- [۹] Deng, J., (1989). Introduction to grey system theory. *The Journal of Grey Systems*, 1(1), 1-24.
- [۱۰] Zheng, Y., Lewis, R. W., (1993). On the optimization concept of grey systems. *Applied Mathematical Modelling*, 17, 388-392.
- [۱۱] Chen, Z., Chen, Q., Chen, W., Wang, Y., (2004). Grey linear programming. *Kybernetes*, 33(2), 238-246.
- [۱۲] Liu, S., Dang, Y., Forrest, J., (2009). On positioned solution of linear programming with grey parameters. *International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, USA, 751-756.
- [۱۳] Razavi Hajiagha, S. H., Akrami, H., Hashemi, Sh. S., (2012). A multi-objective programming approach to solve grey linear programming. *Grey Systems: Theory and Application*, 2(2), 259-271.
- [۱۴] Ren, J., Tan, Sh., Dong, L., Zhou, Z., Gao, S., Pan, C., (2013). A planning model for the chemical integrated system under uncertainty by grey programming approach. *Journal of Chemical Technology*, 15(2), 16-22.
- [۱۵] Li, Q. X., Liu, S., Wang, N. A., (2014). Covered solution for a grey linear program based on a general formula for the inverse of a grey matrix. *Grey Systems: Theory and Application*, 4(1), 72-94.
- [۱۶] Cadena, J. M., Pelta, D. A., Pelta, H. R., Verdegay, J. L., (2004). Application of fuzzy optimization to diet problems in Argentian farms. *European Journal of Operational Research*, 158, 218-228.
- [۱۷] Darvishi SalooKolayi, D., Teimouri Yansari, A., Nasseri, S. h., (2011). Application of fuzzy optimization in diet formulation. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 2, 459-468.
- [۱۸] Li, G. D., Yamaguchi, D., Nagai, M., (2007). A grey based decision-making approach to the supplier selection problem. *Mathematical and Computer Modeling*, 46(3-4), 573-581.

- [19] Liu, S., Lin, Y., (2006). Grey Information: Theory and Practical Applications. London, Springer-Verlag, London Limited.
- [20] Shoacheng, T., (1994). Interval number and fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.
- [21] Nasseri, S. H., Yazdani, A. and Darvishi salikolaei, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 121-141.