

## یک روش بر مبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با منابع محدود برای اولویت‌سازی پروژه

علی جهانتی‌گی\*<sup>۱</sup>، زهره مقدس<sup>۲</sup>، محسن واعظ قاسمی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان، گروه ریاضی، زاهدان، ایران

۲- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، گروه ریاضی، قزوین، ایران

۳- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۲ فروردین ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۱۵ شهریور ۱۳۹۴

### چکیده

در شرایط اندازه‌گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه‌حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب‌ها در یک محیط با منابع محدود مفید می‌باشد. این مطلب ضروری می‌باشد زیرا هرگاه ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه‌سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضا سازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، منبع محدود، اولویت سازی.

### ۱ مقدمه

در این مقاله روشی معرفی می‌شود که کاربرد مورد نظر مربوط به تصمیم‌سازی (تصمیم‌گیری چند معیاری) چند معیاری است که آن شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه پذیر می‌باشد. مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. روش ما در ارتباط با روش‌های موجود در ادبیات موضوع است. در مقالات موجود یک ارزیابی جمعی چند مرحله‌ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده است. روش ما مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است و به روش DEA-CCR پایبند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است. در این مقاله به ارایه دو مثال خواهیم پرداخت. اولین مورد شامل انتخاب از یک گروه مربوط به پروژه‌ها است، یک زیر گروهی که باید به کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چند گانه،

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mohamadjahantighi@yahoo.com

طراحی می‌گردد و ضمناً یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیرگروه پروژه‌هایی را به کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پروژه کامپوزیت) انتخاب کند. این پروژه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضا سازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایت‌ها برای تسهیلات خرده معین است. لذا مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

چنگ و لی [۲] بر مبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری فازی مدلی برای انتخاب پروژه در زمینه انتخاب پرتفوی با در نظر گرفتن منبع محدود معرفی کرده‌اند. مالکی و همکاران [۳] در مقاله‌ای برای انتخاب پروژه با در نظر گرفتن برنامه ریزی خطی فازی مدلی معرفی کرده‌اند. چپانچی و همکاران [۴] در مقاله‌ای با ذکر این مطلب که روش‌های انتخاب پروژه موجود در ادبیات موضوع قادر به در نظر گرفتن عدم قطعیت و اثر متقابل نبودند. لازم به ذکر است که برخی از روش‌های موجود عدم قطعیت را بدون در نظر گرفتن و اثر متقابل لحاظ کرده‌اند. در این مقاله نویسندگان با در نظر گرفتن متغیرهای فازی این عدم قطعیت را لحاظ کرده‌اند. در بخش بعد به معرفی مفاهیم و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه اولویت‌سازی پروژه بر مبنای تکنیک DEA با منابع محدود را معرفی و سپس نتیجه گیری ارائه می‌شود.

## ۲ مقدمه تحلیل پوششی داده‌ها

واحد تصمیم گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند  $(x_1, \dots, x_m)$ ، بردار خروجی  $(y_1, \dots, y_s)$  را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های با جنس مشابه، خروجی‌های با جنس مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی. از مثال‌ها مهم کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها می‌توان به بررسی پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده اشاره کرد، جهانگیری و همکاران [۱].

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود (ورودی/خروجی = کارایی). کارایی مطلق یک  $DMU$ ، مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک  $DMU$ ، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی به صورت

$$E_p = \frac{u_1 y_{1p} + \dots + u_s y_{sp}}{v_1 x_{1p} + \dots + v_m x_{mp}} \quad (1)$$

کارایی آن واحد را اندازه گیری می‌کند، که در آن  $u_r$  قیمت خروجی  $r$ ام یعنی  $(y_r, r=1, \dots, s)$  و  $v_i$  هزینه‌ی

ورودی نام یعنی  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است. کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگ‌ترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچک‌تر یا مساوی با یک بوده و حداقل یک واحد، کارایی نسبی برابر یک دارد. به طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده  $p$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$RE_p = \frac{E_p}{\max_j \{E_j\}} \quad (2)$$

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌آورد. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کرده و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و هر خروجی مشخص کند.

تکنیک DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گرو تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \{(X, Y) \in R^{m+s} : X \geq 0 \text{ تولید شود}; Y \geq 0 \text{ بتواند به وسیله } X \text{ تولید شود}\}.$$

مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود.

مدل CCR اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنزو همکاران ارائه شد [۵].

اگر در  $T_{CCR}$  امکان تولیدی مانند  $(X, Y)$  یافت نشود که غالب بر  $(X_o, Y_o)$  باشد، یعنی هیچ  $(X, Y)$  یافت نشود که  $(-X, Y) \geq (-X_o, Y_o)$  و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه گوئیم که  $(X_o, Y_o)$  کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا است. حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & (\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR} \end{aligned} \quad (3)$$

با توجه به تعریف کارایی نسبی و اصل شهودی تجرید و با توجه به اینکه  $(\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR}$ ، مدل (۳)، به مدل (۴) تبدیل می‌شود. مدل (۴)، که به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط  $0 < \theta^* \leq 1$  صدق می‌کند.

$$\text{Min } \theta$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i=1, \dots, m, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r=1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که  $\theta^* = 1$ . زیرا  $\theta^* = 1$ ، به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های  $DMU_o$ ، در مجموعه امکان تولید  $T_{CCR}$  وجود ندارد. اگر  $\theta^* < 1$ ، آن‌گاه  $DMU_o$ ، ناکارا در ماهیت ورودی است و  $(1 - \theta^*)$  مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است.  $DMU_o$ ، کارای قوی  $CCR$  گویند اگر و فقط اگر توسط هیچ  $DMU$ ی عضو  $T_{CCR}$  مغلوب نگردد. برای هر  $DMU_o$  ( $o \in \{1, \dots, n\}$ ) یک مجموعه مرجع به صورت  $\{ \text{حداقل در یک جواب بهین مدل (4)}, \lambda_j^* > 0 \}$  باشد  $E_o = \{j \mid$  تعریف می‌شود.

در حقیقت مجموعه مرجع  $DMU_o$  عبارتست از  $DMU_j$  هایی که حداقل در یک جواب بهین مدل (4) در ارزیابی  $DMU_o$ ،  $\lambda_j^*$  مقدار مثبت اختیار می‌کند. در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها ثابت شده است برای هر  $DMU_j$  ( $j=1, \dots, n$ )، داریم  $E_j \neq \emptyset$ . برای اثبات مطلب به مرجع [۱] رجوع شود. مدل  $BCC$  توسط بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴، مطرح شد [۳]. مرز کارایی مدل  $BCC$  به وسیله پوسته محدب  $DMU$ های مشاهده شده، گسترده می‌شود. فرم پوششی مدل  $BCC$  در ماهیت ورودی برای ارزیابی  $DMU_o$  به صورت زیر است:

$$\text{Min } \theta$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i=1, \dots, m, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r=1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

دوآل مدل (5) که به مدل مضربی  $BCC$  در ماهیت ورودی معروف است، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u^r y_{ro} + u_o \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{r=1}^s u^r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v^i x_{ij} + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v^i x_{io} = 1, \\
 & v_i \geq 0, \quad u_r \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad r=1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{6}$$

$DMU_o$  در مجموعه امکان تولید  $BCC$  کارای تکنیکی است اگر و فقط اگر  $\theta_{BCC}^* = 1$ . در غیر این صورت  $DMU_o$  ناکارا خواهد بود و  $(1 - \theta_{BCC}^*)$  نشان دهنده‌ی میزان ناکارایی تکنیکی آن در ماهیت ورودی است.

### ۳ منبع محدود در DEA

کاربرد مورد نظر در این مقاله مربوط به تصمیم‌سازی (تصمیم‌گیری چند معیاری) چند معیاری است. این روش شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه‌پذیر می‌باشد.

### ۳-۱ اولویت‌سازی پروژه با منابع محدود

مشکل اولویت دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. روش ما در ارتباط با روش‌های معرفی شده در ادبیات موضوع می‌باشد. در روش‌های معرفی شده موجود یک ارزیابی جمعی چند مرحله‌ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده اند. روش ما که مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است که به روش  $DEA - CCR$  پابند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

مجموعه  $p = \{1, \dots, k, \dots, |p|\}$  پروژه‌های پیشنهادی که هر کدام دارای خروجی  $o = \{1, \dots, j, \dots, |o|\}$  و ورودی  $I = \{1, \dots, i, \dots, |I|\}$  می‌باشد. پروژه  $(k)$  به وسیله خروجی‌های آن مشخص می‌گردد. که باید تولید شوند و همچنین وابسته به ورودی‌های خود است که باید مصرف گردند. یک محدودیت  $(L_i)$  در کمیت ورودی  $i$  در پروژه‌ها وجود دارد و ما فرض می‌گیریم که حداقل یک پروژه با این محدودیت‌ها قابل اجرا است. هدف انتخاب یک زیرمجموعه  $(S^* \subset P)$  است که به عنوان بهترین راه حل برای منابع در دسترس معرفی گردد. فرض کنید تمامی پروژه‌ها قابلیت اجرا شدن دارند و همگی آن‌ها دارای منابع محدود هستند و هم چنین فرض کنید پروژه‌ها مستقل هستند (تداخل ندارند) و اگر  $\alpha, \beta$  انتخاب شوند خروجی‌ها می‌توانند طبق ورودی‌های دریافتی خروجی‌ها تولید کنند. اگر تابع کارایی در دسترس باشند  $\theta_k = \theta(x_{kL}, \dots, x_{ki}, y_{kL}, \dots, y_{kj}, \dots)$  در این صورت می‌توانند مقدار کارایی  $\theta_k$  هر پروژه را محاسبه نمود. در نتیجه می‌تواند برای رتبه بندی پروژه‌ها

مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر آن S می‌تواند با یک روش مستقیم به دست آید. یک نمونه مشابه برای این شرایط می‌تواند مساله کوله پشتی با مدل ذیل باشد.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{k \in p} C_k \theta_k \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{k \in p} C_k X_{ki} \leq L_i, \quad i \in I, \\ & C_k \in \{0, 1\}, \quad k \in p. \end{aligned} \quad (7)$$

خود ارزیابی در تحلیل پوششی داده‌ها به وسیله حل مساله متناظر هر پروژه امکان‌پذیر است [۵].

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & h_k = \sum_{j \in O} u_{kj} y_{kj} \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{i \in I} v_{ki} x_{ki} = 1, \\ & \sum_{j \in O} u_{kj} y_{pj} - \sum_{i \in I} v_{pi} x_{pi} \leq 0, \quad p \in P, \\ & u_{kj} \geq 0, \quad v_{pi} \geq 0, \quad j \in O, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (8)$$

به کمک مقدار محاسبه شده  $h_k$  می‌توان پروژه‌ها را رتبه بندی نمود. شرایطی را تصور کنید که در آن ۳ پروژه وجود دارند، هر کدام یک ورودی و یک خروجی دارد.

جدول ۱. داده‌های سه پروژه با یک ورودی و یک خروجی

| DMU | x   | Y   | $e = \frac{y}{x}$ |
|-----|-----|-----|-------------------|
| A   | ۴۰۰ | ۴۰۰ | ۱۰۰               |
| B   | ۳۰۰ | ۲۲۵ | ۰/۷۵              |
| C   | ۱۰۰ | ۲۶  | ۰/۲۶              |

می‌توان به سادگی دید که پروژه A نسبت به پروژه‌های B و C ارجحیت دارد.

مقدار  $h_k$  می‌تواند یک رتبه بندی برای پروژه‌ها فراهم آورد ولی محدودیت منابع مانع از به کار بردن این روش به طور مستقل می‌گردد. حال، یک مدل اولویت‌دهی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. با توجه به اینکه پروژه‌ها مستقل هستند، هر زیر گروه S از مجموعه P پروژه‌ها می‌توانند به عنوان پروژه‌های بهینه در نظر گرفته شوند. پس به نظر می‌رسد تمام زیر مجموعه‌های ممکن از مجموعه مرجع را برای بهینه بودن چک نمود. این مورد با نام  $P(A)$  شناخته می‌شود و اساساً مجموعه توانی P قلمداد می‌شود. لذا برای هر یک از زیر مجموعه‌های

ممکن باید مساله ذیل حل گردد که در آن:

$$\frac{Y}{S_j} = \sum_{k \in S} y_{ki}, \quad X_{si} = \sum_{k \in S} x_{ki} \quad (9)$$

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in O} u_{sj} y_{sj}, \quad S \in P(A)$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} V_{si} X_{si} = 1, \quad (10)$$

$$\sum_{j \in O} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} V_{si} X_{pi} \leq 0, \quad P \in P(A),$$

$$u_{sj} \geq 0, \quad v_{si} \geq 0, \quad j \in O, \quad i \in I.$$

تعداد اعضای غیر تهی  $P(A)$  برابر  $2^{|P|} - 1$  است. در ادامه به عنوان یک گام اولیه به سوی عملیاتی کردن تعداد محدودیت‌های (۱۰) می‌تواند از  $2^{|P|} - 1$  به  $|P|$  به صورت زیر کاهش یابد. محدودیت‌ها در (۱۰) به دو گروه تقسیم می‌شود: اولین گروه مرتبط با زیر مجموعه‌های تک عضوی  $P$  است در حالی که گروه دوم مرتبط با زیرگروه‌های وابسته  $\{1, 2\}$  و  $\{3, 1\}$  و ... است که به صورت معادلات زیر است:

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in O} u_{sj} y_{sj}, \quad s \in P(A)$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} v_{si} X_{si} = 1, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in O} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} v_{si} X_{pi} \leq 0, \quad p \in P$$

$$\sum_{j \in O} u_{sj} y_{qj} - \sum_{i \in I} v_{si} X_{qi} \leq 0, \quad q \in P(A) = P', \quad P' = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{P\}\},$$

$$u_{sj} \geq 0, \quad v_{sj} \geq 0, \quad j \in O, \quad i \in I.$$

واضح است که هر محدودیت در گروه دوم به عنوان یک ترکیب خطی از دو یا چند محدودیت در گروه اول می‌باشد. اگر محدودیت‌های گروه اول برقرار باشند، پس باید هر کدام از آن‌ها در گروه دوم نیز به کار گرفته شود. بنابراین، گروه دوم شامل تنها محدودیت‌های زاید می‌شود و می‌توانند حذف گردند. لذا مدل اولویت‌دهی برای پروژه‌ها به صورت ذیل است.

$$\text{Max } h_s = \sum_{j \in O} u_{sj} y_{sj} \quad s \in P(A)$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} v_{si} X_{si} = 1, \quad (12)$$

$$\sum_{j \in O} u_{sj} y_{pj} - \sum_{i \in I} v_{si} X_{pi} \leq 0, \quad p \in P,$$

$$u_{sj} \geq 0, \quad v_{sj} \geq 0, \quad j \in O, \quad i \in I.$$

حال باید به دنبال زیرمجموعه  $S$  بود که در شرایط مساله صدق کند. این زیرمجموعه  $S$  می‌تواند به وسیله این دو شرایط مشخص گردد. شرط (a): برای هر زیرمجموعه انتخاب شده مجموع ورودی باید در شرایط منابع در اختیار صدق کند. یعنی:

$$\forall i \in I, \sum_{k \in S} X_{ki} \leq L_i \quad (13)$$

شرط (b): برای هر پروژه انتخاب نشده نتوان از منابع باقیمانده، آن را اجرا نمود. به عبارت دیگر ورودی هر پروژه انتخاب نشده نباید کوچک‌تر یا مساوی منابع باقیمانده باشد.

$$\forall p \in P - S, \exists i \in I \text{ such that } \sum_{k \in S \cup \{p\}} X_{ki} > L_i \quad (14)$$

شرط a یک نیاز واضح است در حالی که شرط b به این موضوع بر می‌گردد که تعداد پروژه‌های انتخاب شده حداکثر باشد. پس به جای معرفی زیرمجموعه‌های  $S$  و متعاقبا ارزیابی هر عضو آن توسط (12)، این کار را با اصلاح مدل (12) در یک چارچوب برنامه‌ریزی غیرخطی صفر-یک مانند (15) انجام خواهیم داد. در اینجا  $C_k$  عدد یک است اگر پروژه  $(K)$  در  $S$  قرار گیرد در غیر این صورت صفر است. در نهایت اینکه بهینه‌سازی در  $C_k$  و  $v_i u_j$  رخ خواهد داد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in O} u_j \left( \sum_{k \in p} C_k Y_{kj} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in O} v_j \left( \sum_{k \in p} C_k X_{ki} \right) = 1, \\ & \sum_{j \in O} u_j y_{pj} - \sum_{i \in I} v_i x_{pi} \leq 0, \quad p \in p, \\ & \sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i, \quad i \in I, \\ & (1 - C_k) X_{ki} + M c_k + M d_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I, \\ & \sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p, \\ & c_k, d_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k \in p, i \in I, \\ & u_j \geq 0, v_{ij} \geq 0, L_j \geq 0, \quad j \in O, i \in I, \\ & M \gg 0. \end{aligned} \quad (15)$$

قبل از تشریح این معادله به برخی از موضوعات اشاره می‌شود. مدل به دنبال بهترین زیرگروه ارزیابی شده و بر طبق شرایط a و b است. پس شرط a این محدودیت را معرفی می‌کند.

$$\sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i \quad (16)$$

که  $l_i$  مربوط به متغیر کمکی منبع  $i$  است. شرط b مقداری مشکل‌تر است اما به وسیله این محدودیت‌ها معرفی می‌شود:

$$(1-C_k) X_{ki} + M c_k + M d_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I, \quad (17)$$

$$\sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p,$$

حال باید شرایط را برای  $k \notin s$  و  $c_k = 0$  و  $x_{ki} \leq l_i$  بررسی کنید. اولین قید می تواند به وسیله  $d_{ki} = 1$  حل شود که همین به  $M$  بزرگ مثبت در سمت چپ منتهی می گردد. به هر حال تاثیر محدودیت مانع دوم برای اطمینان بخشی در مورد (حداقل) یکی از مسیرهای  $i \in I$  است که همچنان صفر باقی می ماند. از این رو  $\exists i \in I$  به طوری که  $x_{kj} \geq l_i + \frac{1}{M}$  در حالی که نرم افزار قابلیت حل کردن (۱۵) را دارد اما می توان آن را به صورت خطی تعریف کرد بدیهی است یک مساله برنامه ریزی خطی پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط می باشد. این خطی شدن شامل تغییرات زیر می شود:

$$a_{kj} = c_k u_j, b_{ki} = c_k v_i \quad (18)$$

مدل (۱۹) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\text{Max} \sum_{(k \in p, j \in o)} a_{kj} y_{kj}$$

s.t.

$$\sum_{(k \in p, i \in I)} b_{ki} x_{ki} = 1,$$

$$\sum_{j \in o} u_j y_{pj} - \sum_{i \in I} v_i x_{pi} \leq 0, \quad p \in P$$

$$\sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i \leq L_i, \quad i \in I,$$

$$(1-C_k) X_{ki} + M c_{ki} + M d_{ki} \geq l_i + \frac{1}{M}, \quad k \in p, i \in I,$$

$$\sum d_{ki} \leq |I| - 1, \quad k \in p,$$

$$c_k, d_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k \in p, i \in I,$$

$$a_{kj} \geq 0, \quad k \in p, j \in o,$$

$$a_{kj} \leq M c_k, \quad k \in p, j \in o,$$

$$u_j \geq a_{kj}, \quad k \in p, j \in o,$$

$$b_{ki} \leq M c_k, \quad k \in p, i \in I,$$

$$v_i \geq b_{ki}, \quad k \in p, i \in I,$$

$$v_i \leq b_{ki} + M (1-C_k), \quad k \in p, i \in I,$$

$$M \gg 0.$$

(۱۹)

در جایی که دو گروه از محدودیت‌ها به وسیله خطوط عمومی مشخص شده‌اند که در واقع نماد متغیرهای جدید  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$  به جای متغیرهای اصلی  $u_j$ ,  $c_k$ ,  $v_i$  قلمداد می‌شود. قبل از به کارگیری این مدل در بخش بعدی این نکته شایان ذکر است که همسانی در ارزیابی به وضوح در مدل (۴) اولویت‌دهی دیده می‌شود هر پیشنهاد پروژه دارای یک حق برابر در شکل‌گیری فن‌آوری تولید در ترکیب با دیگر پروژه‌ها است که بایستی در این انتخاب مورد ارزیابی قرار گیرد. این فرآیند تنها به داده‌های پروژه‌های مرتبط و منابع در دسترس بستگی دارد.

### ۲-۳ مدل پایه DEA

مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای انتخاب پروژه به شرح ذیل است.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{k \in S} [\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{k \in S} \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \\ \text{s.t.} \quad & [\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \leq 1, \quad k \in K_1, \\ & \bar{\theta}_1 \leq \left[ \sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \right] / \sum_{i \in I_i} v_i x_{ik} \leq \bar{\theta}_1, \quad k \in S, \\ & \sum_{k \in S} x_{ik} \leq C_i, \quad i \in I_1, \\ & x_{ik} \geq L_i, \quad i \in I_1, \quad k \in S, \\ & x_{ik} \geq 0, \quad i \in I_1, \mu_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i. \end{aligned} \quad (20)$$

چنان که در ادبیات موضوع مطرح شده است وقتی پروژه‌ها یا  $DMUs$  بررسی شدند تکنولوژی تولید مناسب همان CRS چارنر و همکارانش [۵] است. به طور مشابه می‌توان از تکنولوژی مختلف با فرض بازده به مقیاس افزایشی، کاهشی و یا متغیر مجموعه امکان تولید مختلف ساخت که به دنبال آن می‌توان مدل‌های دیگری از تحلیل پوششی داده‌ها را نیز طراحی نمود.

مقدار کران انتخاب کارایی  $\bar{\theta}_1$  در (۲۰) برای انتخاب پروژه‌ها به وسیله مدیریت انتخاب می‌شود. برای مثال، سطح عملکرد واقعی برای هر پروژه  $(k \in S)$  باید حداقل  $\bar{\theta}_1 = 80\%$  و بالاتر از یک مقدار مانند  $\bar{\theta}_1$  برای هر پروژه  $k \in S$  باشد، که به عنوان مقدار کوچک‌تر از واحد در نظر گرفته می‌شود. انتخاب  $\bar{\theta}_1 = 1$  باعث گردد پروژه‌های انتخاب شده کارا باشند. به طور معمول امتیاز عملکرد برای پروژه  $k$  به صورت ذیل خواهد بود.

$$e = \frac{\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk}}{\sum_{i \in I} v_i x_{ik}} \Rightarrow e = \frac{\left[ \sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in NOI} v_i x_{ik} \right]}{\sum_{i \in DI} v_i x_{ik}} \quad (21)$$

$x_{ik}$  همان ورودی است که در اختیار سازمان قرار می‌گیرد. پس  $I_1 \subseteq I$  زیر گروه‌های ورودی برای مواردی است که باید تحمیل شده باشد در مورد مشکل مکان‌یابی،  $I_1$  می‌تواند شامل ۲ ورودی و  $\bar{I}_1$  مکمل  $I_1$  است  $k_1$

می تواند مربوط به گروه واحدهای تصمیم گیرنده  $\{1, \dots, k_1\}$  و  $k_2$  گروه سایت های بالقوه  $\{k_2, \dots, k_1 + 1\}$  برای زیر مجموعه  $S$  باشد ابتدا رابطه (۲۰) را با قید ذیل جایگزین می شود:

$$\sum_{k \in S} v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i, \quad i \in I \quad (22)$$

که در آن  $s_i$  یک متغیر کمکی متناظر با محدودیت  $i \in I_1$  در (۲۰) است. سپس تمامی زیر گروه های احتمالی  $S$  معرفی می گردند و بعد از آن متغیرهای دودویی  $d_k$  توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر فروشگاه } a \text{ در } k \text{ تعیین شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\max \sum_{k \in K_2} \left[ \sum_{r \in R} d_k M_r y_{rk} - \sum_{i \in I} d_k v_i x_{ik} \right]$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_2} \sum_{i \in I} d_k v_i x_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r \in R} \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_1} v_i x_{ik} \leq 0, \quad k \in K_2,$$

$$\sum_{i \in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_1} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_2 \sum_{i \in I_1} d_k v_i x_{ik} \leq 0, \quad k \in K_2,$$

$$\sum_{i \in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i \in I_1} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_1 \sum_{i \in I_1} d_k v_i x_{ik} \geq 0, \quad k \in K_2,$$

$$\sum_{k \in K_2} d_k v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i, \quad i \in I,$$

$$d_k x_{ik} \geq d_k L_i, \quad i \in I, k \in K_2,$$

$$v_i s_i \leq v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M_{r_{ik}}, \quad i \in I, k \in K_2,$$

$$\sum_{i \in I_1} r_{ik} \leq |I_1| - 1, \quad k \in K_2,$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in I, k \in K_2,$$

$$M_r, v_i \geq E, \quad \forall r, i,$$

$$d_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k. \quad (23)$$

برای تسهیل در نوشتن مساله خطی دودویی مختلط ابتدا به رابطه زیر توجه نمایید:

$$x_{ik} \leq M d_k, \quad i \in I_1, \quad k \in K_v \quad (24)$$

سپس برای هر  $i \in I_1$  می‌توان محصول  $d_k x_{ik}$  را با  $x_{ik}$  جابه‌جا نمود.

اکنون مقدار  $y_{rk}$  را با  $d_k y_{rk}$  جابه‌جا می‌شود و متغیر تصمیم‌گیری  $x_{ik}$  را نیز با  $d_k x_{ik}$  جابه‌جا می‌نماییم. برای تکمیل این روش، متغیرهای دوتایی معرفی شده و محدودیت‌های جدید ذیل اضافه می‌شوند:

$$v_i s_i \leq v_i l_i - \frac{1}{M} + M d_k + M r_{ik}, \quad i \in I, \quad k \in K_v \quad (25)$$

$$\sum_{i \in I_1} r_{ik} \leq |I_1| - 1, \quad k \in K_v \quad (26)$$

می‌توانیم به واسطه رابطه (24) مشاهده کنیم که هر واحدی که عضو زیرمجموعه  $(k \in S)$  است. می‌تواند  $d_k = 1$  را داشته باشد. در غیر این صورت نیز برای تمامی آنها در  $(k \in S)$  شرط  $d_k = 0$  خواهند کرد، که این نشانگر این است  $r_{ik} = 1$  می‌باشد. محدودیت (26) تنها اجازه می‌دهد که  $|I_1| - 1$  متغیر دوتایی  $r_{ik}$  حداکثر یک باشد. پس هر واحدی که  $k$  را حداقل در یکی از ورودی‌های  $i$  داشته باشد باید متغیر کمکی  $v_i s_i$  کمتر از مرز پایین تر از  $v_i l_i$  می‌باشد.

برای هر  $\{x_{ik}\}$  و  $\{d_k\}$  مفروض، (به این معنی که متغیرها ثابت هستند) باید ذکر گردد که نتایج مربوط به مساله برنامه ریزی خطی کسری می‌تواند با یک مساله برنامه ریزی خطی معادل جایگزین شود. از وقتی که این رابطه غیر کسری معادل باشد مقادیر  $x_{ik}$  و  $d_k$  را می‌توان بدون توجه به ارزش آنها در نظر گرفت. بنابراین این مساله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_v} c_{ik} + e_i &= c_i v_i, & i \in I_1, \\ c_{ik} - l_i b_{ik} &\geq 0, & i \in I_p, \quad k \in K_v, \\ v_i l_i - e_i + M d_k + M r_{ik} &\geq 1/M, & i \in I_1, \quad k \in K_v, \\ \sum_{i \in I_1} r_{ik} &\leq |I_1| - 1, & k \in K_v, \\ a_{rk} - M d_k &\leq 0, & r \in R, \quad k \in K_v, \\ \mu_r - a_{rk} + M d_k &\leq M, & r \in R, \quad k \in K_v, \\ \mu_r + a_{rk} &\geq 0, & r \in R, \quad k \in K_v, \\ b_{ik} - M d_k &\leq 0, & i \in I, \quad k \in K_v, \\ v_i - b_{ik} + M d_k &\leq M, & i \in I, \quad k \in K_v, \\ v_i - b_{ik} &\geq 0, & i \in I, \quad k \in K_v, \\ c_{ik} - M b_{ik} &\leq 0, & i \in I, \quad k \in K_v, \\ a_{rk}, b_{ik}, c_{ik}, e_i &\geq 0, \mu_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon, & r \in R, i \in I, \quad k \in K, \\ d_k, r_{ik} &\in \{0, 1\}, & c_i \in I, \quad k \in K_v. \end{aligned} \quad (27)$$

#### ۴ نتیجه گیری

یک انتخاب چند معیاری را در نظر بگیرید که شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. توجه داشته باشید که پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به دست آورند. از این رو مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. از آن رو در این مقاله روش معرفی شده مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین به منظور برطرف ساختن این مشکل می‌باشد. توجه داشته باشید که این روش همچنان به روش DEA-CCR پایبند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

در شرایط اندازه‌گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه‌حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب و یک محیط با منابع محدود ضروری می‌باشد. وقتی ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه‌سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. اولین مورد شامل انتخاب از یک گروه مربوط به پروژه‌ها است، یک زیر گروهی که باید به کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چند گانه، طراحی می‌گردد و ضمناً یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیر گروه پروژه‌هایی را به کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پروژه کامپوزیت) انتخاب کند. این پروژه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به وسیله فضا سازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایت‌ها برای تسهیلات خرده معین است که مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

#### منابع

- [۱] جهانپناهی، م.ع.، مقدس، ز.، واعظ فاسمی، م.، (۱۳۹۰). شاخص بهره‌وری المکونست چند مرحله‌ای. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۸(۴)، ۷۰-۵۹.
- [2] Chang, P. T., Lee, J. H., (2012). A fuzzy DEA and knapsack formulation integrated model for project selection. Computers & Operations Research, 3, 112-125.
- [3] Maleki, I., Omrani, O, Ghodsi, R., Khoei, A., (2014). Project selection using fuzzy linear programming model. International Journal of Operational Research (IJOR), 19, 211-233.
- [4] Ghapanchi, A. H., Tavana, M., Khakbaz, M. H., Lo, G., (2012). A methodology for selecting portfolios of projects with interactions and under uncertainty. International Journal of Project Management, 30, 791-803.
- [5] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making unit. European Journal of operational research, 2, 429-444.