مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره دوم (پیاپی ۵۳)، تابستان ۹۶، ص ص ۱۲۱-۱۱۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# ناحیه جواب جدید برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای

**مهدی الله‌دادی[1*]، حسن میش‌مست نهی[2]**
۱- استادیار، دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، زاهدان، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی، زاهدان، ایران

رسید مقاله: ۲۶ آذر ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۵ اردیبهشت ۱۳۹۶

## چکیده
در این مقاله مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP) مد نظر می‌باشد. روش بهترین- بدترین (BWC) یکی از روش‌های حل مدل ILP می‌باشد. روش بهترین- بدترین مقادیر تابع هدف را تعیین می‌کند؛ اما برخی از جواب‌های حاصل نشدنی است. برای تضمین شدنی بودن جواب‌ها (جلوگیری از نقض قیود) روش دو گامی بهبود یافته (ITSM) پیشنهاد شده است. در این روش بسیاری از جواب‌های شدنی از دست می‌روند. با استفاده از یک الگوریتم، روش گوی بسته (CBM) به عنوان یک روش جدید برای حل مدل ILP معرفی می‌شود. در این روش، یک آزمون، شدنی بودن فضای حاصل را تضمین می‌کند. برای نشان دادن تاثیر روش پیشنهادی، چند مثال عددی حل و نتایج مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، روش BWC، روش ITSM، عدم قطعیت.

## ۱ مقدمه
برخی از پارامترهای موجود در مسایل عالم واقعیت به واسطه‌ی عدم قطعیت، دارای کران بالا و پایین می‌باشند. یک روش برای کنار آمدن با چنین عدم قطعیت‌هایی مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP) می‌باشد. محققین با در نظر گرفتن رویکردهای مختلف، چندین روش برای حل مدل‌های ILP پیشنهاد نموده‌اند. برخی دو مدل برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تحت عدم قطعیت ارایه نموده‌اند[۱]. برخی از آن‌ها حساب بازه‌ای و بسط روش سیمپلکس را مورد استفاده قرار داده‌اند[۲-۵]. بعضی از نویسندگان روی پایداری پایه تمرکز نموده‌اند[۶-۱۰]. تحت فرض پایداری پایه، مجموعه جواب ILP تعیین می‌شود. برخی نیز دو زیر مدل برای تعیین مجموعه جواب ILP معرفی کرده‌اند[۱۱-۱۷].

در روش حالات بهترین- بدترین (BWC) که توسط تانگ پیشنهاد شده است، مدل ILP به دو زیر مدل تبدیل می‌شود، زیرمدل‌های بهترین و بدترین که به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی را دارند[۱۳].

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: m_allahdadi@math.usb.ac.ir



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]
[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

یک نقطه، جواب شدنی مدل ILP است اگر در قیود مدل بهترین که بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را داراست صدق کند. روش BWC توسط چاینک و رمدان [۱۸] برای حالتی که مدل ILP شامل قیود تساوی باشد، توسعه داده شده است. هوانگ و مور [۱۲] یک روش جدید با عنوان ILP برای حل پیشنهاد نمودند.

جواب‌های حاصل از روش‌های BWC و ILP در برخی مثال‌ها منجر به ناحیه نشدنی می‌شود. روش BWC کران‌های واقعی تابع هدف را به دست می‌آورد؛ اما جواب‌های حاصل کاملا شدنی نیستند. برای تضمین شدنی بودن جواب، روش برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای اصلاح شده (MILP) توسط ژو و همکاران [۱۵] و روش دو گامی بهبود یافته (ITSM) توسط وانگ و همکاران [۱۴] پیشنهاد شده است.

به عنوان یک روش جدید برای حل مدل ILP برای تضمین شدنی بودن جواب، روش گوی بسته (CBM[1]) را ارایه می‌دهیم. در این روش، با استفاده از نقطه‌ی مرکز ناحیه‌ی حاصل از روش BWC یک گوی بسته به دست می‌آوریم.

یک عدد بازه‌ای $x^{\pm}$ به طور کلی به صورت $[x^-, x^+]$ نمایش داده می‌شود که $x^- \le x^+$. اگر $x^- = x^+$، آنگاه $x^{\pm}$ تباهیده خواهد بود. اگر $A^-$ و $A^+$ دو ماتریس در $\mathbb{R}^{m\times n}$ باشند که $A^- \le A^+$، آنگاه مجموعه ماتریس‌های

$$A^{\pm} = [A^-, A^+] = \{A \mid A^- \le A \le A^+\},$$

ماتریس بازه‌ای و ماتریس‌های $A^-$ و $A^+$ کران‌های آن نامیده می‌شوند. ماتریس‌های مرکز و شعاع به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^c = \frac{1}{2}(A^- + A^+),\ \Delta_{A^{\pm}} = \frac{1}{2}(A^+ - A^-).$$

اگر هر $A \in A^{\pm}$ نامنفرد باشد، ماتریس بازه‌ای مربعی $A^{\pm}$ منظم نامیده می‌شود.

حالت خاصی از ماتریس بازه‌ای، بردار بازه‌ای به صورت $x^{\pm} = \{x \mid x^- \le x \le x^+\}$ می‌باشد که $x^-, x^+ \in \mathbb{R}^n$ [۱۹].

## ۲ روش‌های حل مدل ILP

در این بخش، برخی روش‌ها برای حل مدل ILP بیان می‌شوند. مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{\pm} = \sum_{j=1}^{n} c_j^{\pm} x_j^{\pm} \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\pm} x_j^{\pm} \le b_i^{\pm}, \qquad i = 1,2,\dots,m, \\ &\qquad x_j^{\pm} \ge 0, \qquad j = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

مدل مشخصه‌ی مدل ILP (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود.

[1] Closed Ball Method



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i=1,2,\dots,m, \\
&\qquad x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

که $a_{ij} \in a_{ij}^{\pm}$ ، $c_j \in c_j^{\pm}$ و $b_i \in b_i^{\pm}$ برای $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$.

مطابق با [۱۳]، دو زیر مدل روش BWC برای حل مدل (۱) به صورت زیر می‌باشد.

زیر مدل ۱: (مدل بهترین)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{+}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{+} x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le b_i^{+}, \qquad i=1,2,\dots,m, \\
&\qquad x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{3}
$$

زیر مدل ۲: (مدل بدترین)

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{-}=\sum_{j=1}^{n} c_j^{-} x_j \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le b_i^{-}, \qquad i=1,2,\dots,m, \\
&\qquad x_j \ge 0, \qquad j=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{4}
$$

مدل‌های (۳) و (۴) به ترتیب دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین نواحی شدنی می‌باشد؛ زیرا برای هر $a_{ij} \in a_{ij}^{\pm}$ و $b_i \in b_i^{\pm}$ که $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ ، با توجه به این که $x_j \ge 0$ ، داریم:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} x_j \le b_i^{-} \le b_i \le b_i^{+}.
$$

**قضیه ۱**- [۱۳] اگر $z_{opt}^{+}$ و $z_{opt}^{-}$ به ترتیب بهترین و بدترین مقادیر بهینه تابع هدف باشد، آنگاه تمام مقادیر بهینه تابع هدف در $[z_{opt}^{-}, z_{opt}^{+}]$ واقع می‌شود.

مطابق با [۱۴]، دو زیر مدل روش ITSM به صورت زیر می‌باشد.

زیر مدل ۱:



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

$$\text{Max} \quad z^{+} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{+} x_j^{+} + \sum_{j=k+1}^{n} c_j^{+} x_j^{-}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{k} sign(a_{ij}^{\pm}) \left| a_{ij}^{\pm} \right|^{-} x_j^{+} + \sum_{j=k+1}^{n} sign(a_{ij}^{\pm}) \left| a_{ij}^{\pm} \right|^{+} x_j^{-} \le b_i^{+},\ i = 1,\dots,m,$$

$$x_j^{\pm} \ge 0,\ \ j = 1,2,\dots,n.$$

زیر مدل ۲:

$$Max \quad z^{-} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{-} x_j^{-} + \sum_{j=k+1}^{n} c_j^{-} x_j^{+}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{k} sign(a_{ij}^{\pm}) \left| a_{ij}^{\pm} \right|^{+} x_j^{-} + \sum_{j=k+1}^{n} sign(a_{ij}^{\pm}) \left| a_{ij}^{\pm} \right|^{-} x_j^{+} \le b_i^{-},\ i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} x_j^{'} \le b_i^{+},\ \ x_j^{'} = \begin{cases} x_j^{-} & sign(a_{ij}^{\pm}) \ne sign(c_j^{\pm}) \quad j = 1,\dots,k \\ x_{jopt}^{+} & sign(a_{ij}^{\pm}) = sign(c_j^{\pm}) \quad j = 1,\dots,k \\ x_j^{+} & sign(a_{ij}^{\pm}) \ne sign(c_j^{\pm}) \quad j = k+1,\dots,n \\ x_{jopt}^{-} & sign(a_{ij}^{\pm}) = sign(c_j^{\pm}) \quad j = k+1,\dots,n \end{cases}$$

$$x_j^{-} \le x_{jopt}^{+},\ \ j = 1,\dots,k$$

$$x_j^{+} \ge x_{jopt}^{-},\ \ j = k+1,\dots,n$$

$$x_j^{\pm} \ge 0,\ \ j = 1,2,\dots,n.$$

که برای $j = 1,\dots,k$ ، $c_j^{\pm} \ge 0$ و برای $j = k+1,\dots,n$ ، $c_j^{\pm} \le 0$ و

$$|a_{ij}^{\pm}|^{-} = \begin{cases} a_{ij}^{-} & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -a_{ij}^{+} & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases},\quad |a_{ij}^{\pm}|^{+} = \begin{cases} a_{ij}^{+} & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -a_{ij}^{-} & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases},\quad sign(a_{ij}^{\pm}) = \begin{cases} 1 & a_{ij}^{\pm} \ge 0 \\ -1 & a_{ij}^{\pm} < 0 \end{cases}$$

که $x_{jopt}^{+},\ j = 1,\dots,k$ و $x_{jopt}^{-},\ j = k+1,\dots,n$ جواب‌های بهینه‌ی زیر مدل اول می‌باشند.

## ۳ روش گوی بسته (CBM)

در تمامی روش‌های حل مدل‌های ILP، با توجه به این که تعیین ناحیه جواب بهینه، یک مساله ی NP-hard است[۲]، مقادیر بهینه‌ی متغیرهای تصمیم به صورت بازه‌ای به دست می‌آیند به طوری که فضای جواب به دست آمده یا در ناحیه‌ی نشدنی نتیجه می‌شود (مانند روش‌های BWC، TSM و ILP) یا بسیاری از جواب‌های شدنی را از دست می‌دهند (مانند MILP، ITSM و ThSM). در روش جدید، با یک الگوریتم ساده یک گوی بسته به عنوان ناحیه جواب مدل ILP که تماما شدنی است معرفی می‌شود.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

روش BWC شامل دو زیرمدل بهترین و بدترین است که در تضمین شدنی بودن ناحیه جواب، تنها قیود زیرمدل بهترین که دارای بزرگ‌ترین ناحیه شدنی بوده و از درجه اهمیت یکسان برای قیود برخوردار است، استفاده می‌شود.

یک گوی بسته به صورت $\sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)^2 \le r^2$ تعریف می‌شود که $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ به عنوان مرکز گوی، مرکز ناحیه جواب به دست آمده از BWC و $r$ به عنوان شعاع گوی، کم‌ترین فاصله مرکز گوی تا ابرصفحه‌ی قیود مدل بهترین می‌باشد. گام‌های روش CBM به صورت زیر می‌باشد.

گام اول: ناحیه جواب مدل ILP را به روش BWC به دست آورید.

گام دوم: مرکز ناحیه جواب را به دست آورید.(این نقطه را $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ بنامید)

گام سوم: با توجه به این که قیود مدل بهترین بزرگ‌ترین ناحیه شدنی را داراست، اگر برای هر $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}\alpha_j \le b_i^{+},\quad i=1,2,...,m$ ، آن گاه $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ یک نقطه‌ی شدنی است و این بدان معناست که $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ آزمون شدنی را گذرانده است. در غیر این صورت مدل، جواب شدنی ندارد.

گام چهارم: شعاع $r$ را به صورت زیر پیدا کنید:

فرض کنید برای هر $i=1,2,...,m$ ، $d_i$ فاصله‌ی $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ تا ابرصفحه‌ی $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}x_j = b_i^{+}$ باشد؛ بنابراین:

$$d_i = \frac{|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}\alpha_j - b_i^{+}|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-2}}}$$

اکنون قرار دهید $r=\min_i d_i$؛ لذا ناحیه جواب مدل ILP به صورت $\sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)^2 \le r^2$ خواهد بود که کاملا شدنی است.

برای مدل ILP در ابعاد بالا، کران‌های بالا و پایین ناحیه جواب حاصل از روش CBM قابل تعین نیست. ضمن این که تجسم گوی بسته نیز با مشکل مواجه می‌شود. برای حل این مشکل جعبه‌ی CBM پیشنهاد می‌گردد.

فرض کنید $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ و $l=2\beta$ به ترتیب مرکز ناحیه جواب حاصل از CBM و طول هر ضلع جعبه باشد؛ یعنی برای هر $j=1,2,...,n$ ، $x_j^{\pm}=[\alpha_j-\beta,\alpha_j+\beta],$ و بنابراین:

$$x^{\pm}=\begin{pmatrix}[\alpha_1-\beta,\alpha_1+\beta]\\ [\alpha_2-\beta,\alpha_2+\beta]\\ \vdots \\ [\alpha_n-\beta,\alpha_n+\beta]\end{pmatrix}.$$

برای تضمین شدنی بودن $x^{\pm}$ ، کافی است برای هر $i=1,2,...,m$ ، $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{-}(\alpha_j \pm \beta) \le b_i^{+},$ یا



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

$$\beta = \min_{i} \left| \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-} \alpha_j - b_i^{+}}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}} \right|.$$

## ٤ مثال‌های عددی

برای نشان دادن تاثیر روش پیشنهادی در به دست آوردن ناحیه جواب مدل ILP، در این بخش چند مدل با روش‌های مختلف حل و جواب‌های حاصل مقایسه می‌شود.

مثال ۱- مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای زیر را از [۱۵] در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{\pm} = [26,30]x_1^{\pm} - [5/5,6]x_2^{\pm} \\ &s.t. \\ &\qquad [8,10]x_1^{\pm} - [12,14]x_2^{\pm} \le [3/8,4/2] \\ &\qquad [1,1/1]x_1^{\pm} + [0/19,0/2]x_2^{\pm} \le [6/5,7] \\ &\qquad x_1^{\pm}, x_2^{\pm} \ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

جواب‌های بهینه‌ی روش BWC عبارتند از $x_{1opt}^{\pm} = [5/182,6/366], x_{2opt}^{\pm} = [3/338,4/001]$ که از حل دو زیر مدل زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{+} = 30x_1 - 5/5x_1 \\ &s.t. \\ &\qquad 8x_1 - 14x_2 \le 4/2 \\ &\qquad x_1 + 0/19x_2 \le 7 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max \quad z^{-} = 26x_1 - 6x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 10x_1 - 12x_2 \le 3/8 \\ &\qquad 1/1x_1 + 0/2x_2 \le 6/5 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

جواب‌های حاصل از روش BWC در ناحیه نشدنی نتیجه می‌شود. برای مثال نقطه‌ی $(6/366, 4/001)$ که در ناحیه جواب BWC واقع است در نامساوی $x_1 + 0/19x_2 \le 7$ صدق نمی‌کند.

$$(6/366 + 0/19 \times 4/001 = 7/126 > 7)$$

جواب‌های بهینه‌ی روش ITSM عبارتند از: $x_{1opt}^{\pm} = [4/574,6/336], x_{2opt}^{\pm} = [3/320,3/495]$ که از حل دو زیر مدل زیر بدست می‌آیند.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{+} = ۳۰x_{۱}^{+} - ۵/۵x_{۲}^{-} \\
&s.t. \\
&\qquad ۸x_{۱}^{+} - ۱۴x_{۲}^{-} \le ۴/۲ \\
&\qquad x_{۱}^{+} + ۰/۲x_{۲}^{-} \le ۷ \\
&\qquad x_{۱}^{+}, x_{۲}^{-} \ge ۰
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{-} = ۲۶x_{۱}^{-} - ۶x_{۲}^{+} \\
&s.t. \\
&\qquad ۱۰x_{۱}^{-} - ۱۲x_{۲}^{+} \le ۳/۸ \\
&\qquad ۱/۱x_{۱}^{-} + ۰/۱۹x_{۲}^{+} \le ۷ \\
&\qquad x_{۱}^{-}, x_{۲}^{+} \ge ۰ \\
&\qquad x_{۱opt}^{+} + ۰/۱۹x_{۲}^{+} \le ۷ \\
&\qquad x_{۱}^{-} \le ۶/۳۳۶, x_{۲}^{+} \ge ۳/۳۲۰.
\end{aligned}
$$

اکنون ناحیه جواب حاصل مدل (۵) را به روش CBM به دست می‌آوریم.

گام ۱- ناحیه جواب روش BWC عبارت است از: $\begin{pmatrix} [۵/۱۸۲, ۶/۳۶۶] \\ [۳/۳۳۸, ۴/۰۰۱] \end{pmatrix}$.

گام ۲- نقطه مرکز ناحیه جواب BWC عبارت است از : $(\alpha_{۱}, \alpha_{۲}) = (۵/۷۷۴۰, ۳/۶۶۹۵)$.

گام ۳- چون

$$
\begin{aligned}
&۸\alpha_{۱} - ۱۴\alpha_{۲} = ۸ \times ۵/۷۷۴۰ - ۱۴ \times ۳/۶۶۹۵ = -۵/۱۸۱ < ۴/۲, \\
&\alpha_{۱} + ۰/۱۹ \times \alpha_{۲} = ۵/۷۷۴۰ + ۰/۱۹ \times ۳/۶۶۹۵ = ۶/۴۷۱۲ < ۷,
\end{aligned}
$$

بنابراین برای $i = ۱,۲$، $\sum_{j=۱}^{۲} a_{ij}^{-}\alpha_{j} \le b_{i}^{+}$. لذا $(\alpha_{۱}, \alpha_{۲}) = (۵/۷۷۴۰, ۳/۶۶۹۵)$ نقطه‌ی شدنی است.

گام ۴- شعاع $r$ را می‌یابیم.

$$
d_{۱} = \frac{|-۵/۱۸۱ - ۴/۲|}{\sqrt{۸^{۲} + ۱۴^{۲}}} = ۰/۵۸۱۸ \ , \ d_{۲} = \frac{|۶/۴۷۱۲ - ۷|}{\sqrt{۱^{۲} + ۰/۱۹^{۲}}} = ۰/۵۱۹۵
$$

بنابراین $r = \min\{۰/۵۸۱۸, ۰/۵۱۹۵\} = ۰/۵۱۹۵$. در نتیجه ناحیه جواب CBM عبارت است از:

$$
(x_{۱} - ۵/۷۷۴۰)^{۲} + (x_{۲} - ۳/۶۶۹۵)^{۲} \le (۰/۵۱۹۵)^{۲}.
$$

برای تعیین جعبه‌ی CBM،

$$
\beta = \min\left\{\left|\frac{۸ \times ۵/۷۷۴۰ - ۱۴ \times ۳/۶۶۹۵ - ۴/۲}{۸ - ۱۴}\right|, \left|\frac{۵/۷۷۴۰ + ۰/۱۹ \times ۳/۶۶۹۵ - ۷}{۱ + ۰/۱۹}\right|\right\} = ۰/۴۴۴۴,
$$

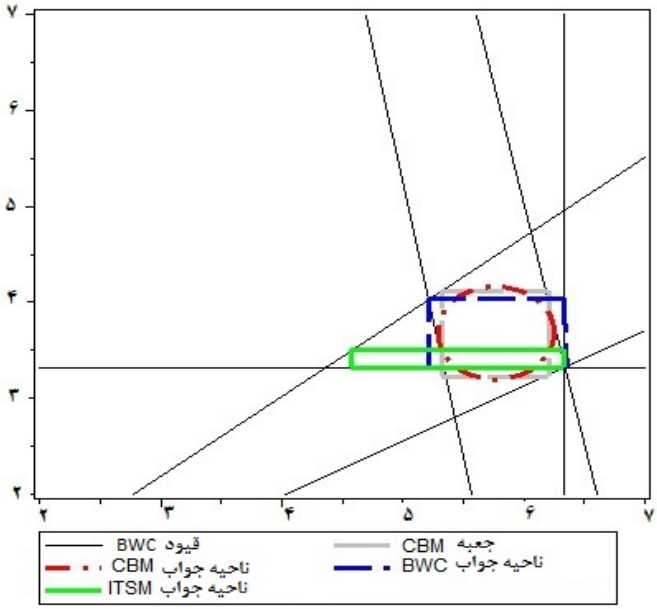
و لذا جعبه CBM عبارت است از : $\begin{pmatrix} [۵/۳۳۹۶, ۶/۲۱۸۴] \\ [۳/۲۲۵۲, ۴/۱۱۴۰] \end{pmatrix}$.

نتایج حاصل از روش‌های BWC، ITSM و CBM در شکل ۱ نمایش داده شده است. برخی از جواب‌های روش BWC نشدنی می‌باشند. نواحی جواب CBM و ITSM کاملا شدنی است؛اما ناحیه‌ی جواب حاصل از CBM بزرگ‌تر از ناحیه جواب ITSM است.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]




**شکل ۱.** نواحی جواب BWC، ITSM و CBM برای مدل (۵)

مثال ۲- مدل ILP زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{\pm} = [۱,۵]x_۱^{\pm} + [۳,۴]x_۲^{\pm} \\
&s.t. \\
&\qquad [-۱,-\tfrac{۱}{۲}]x_۱^{\pm} + [۱,۲]x_۲^{\pm} \geq [۰,۱] \\
&\qquad [۳,۴]x_۱^{\pm} - [۰,۱]x_۲^{\pm} \geq [۲,۳] \\
&\qquad x_۱^{\pm}, x_۲^{\pm} \geq ۰
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

نتایج به دست آمده از BWC، ITSM و CBM در جدول ۱ و شکل۲ داده شده است. جواب حاصل از روش BWC عبارت است از: $x_{۱opt}^{\pm} = [۰/۵,۲], x_{۲opt}^{\pm} = [۰/۱۲۵,۳]$ که برخی از نقاط آن در ناحیه‌ی نشدنی قرار می‌گیرد. برای مثال نقطه راسی $(۲,۰/۱۲۵)$ به عنوان یکی از نقاط ناحیه جواب BWC در نامساوی $-\frac{۱}{۲}x_۱ + ۲x_۲ \geq ۰$ صدق نمی‌کند. جواب‌های حاصل از ITSM عبارتند از $x_{۱opt}^{\pm} = [۰/۵۷۱۴۳,۱]$ و $x_{۲opt}^{\pm} = [۰/۲۸۵۷۱,۱/۵]$ که کاملا شدنی است. ناحیه جواب CBM و جعبه مربوطه عبارت است از:

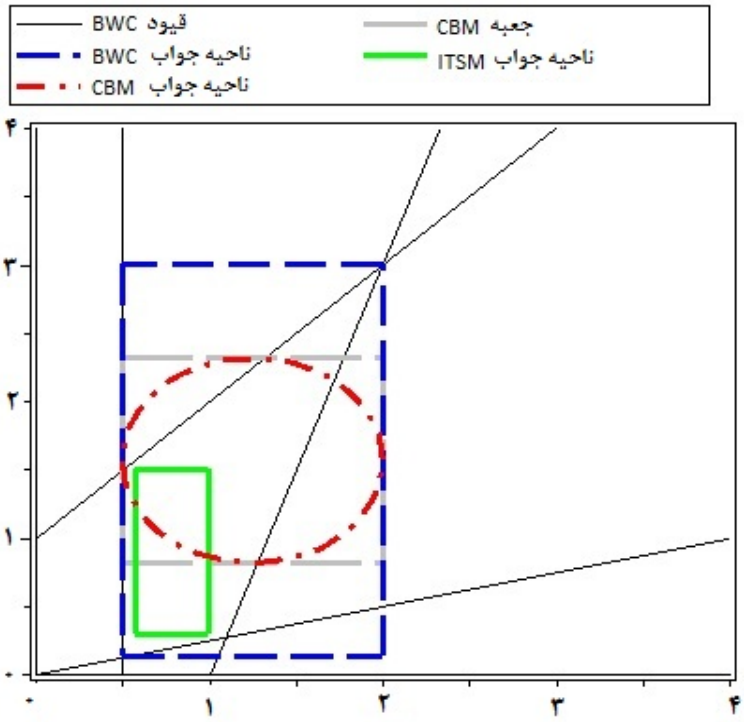
$$(x_۱ - ۱/۲۵)^۲ + (x_۲ - ۱/۵۶۲۵۵)^۲ \leq (۰/۷۵)^۲, \begin{pmatrix} [۰/۵,۲] \\ [۰/۸۱۲۵,۲/۳۱۲۵] \end{pmatrix}$$

که کاملا شدنی است و تعداد نقاط بیش‌تری را نسبت به ناحیه جواب ITSM شامل می‌شود.



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]




**شکل ۲.** نواحی جواب BWC، ITSM و CBM برای مدل (۶)

**جدول ۱.** جواب‌های حاصل از روش‌های BWC، ITSM و CBM برای مدل (۶)

| روش | نتایج |
|---|---|
| BWC | $z^{\pm}_{opt}=[۰/۸۷۵,۲۲]$<br>$x^{\pm}_{۱opt}=[۰/۵,۲], x^{\pm}_{۲opt}=[۰/۱۲۵,۳]$ |
| ITSM | $z^{\pm}_{opt}=[۲/۷۱,۸/۲۵]$<br>$x^{\pm}_{۱opt}=[۰/۵۷۱۴۳,۱], x^{\pm}_{۲opt}=[۰/۲۸۵۷۱,۱/۵]$ |
| CBM | $(x_۱-۱/۲۵)^۲+(x_۲-۱/۵۶۲۵۵)^۲\le(۰/۷۵)^۲,$ |
| جعبه CBM | $x^{\pm}_{۱opt}=[۰/۵,۲], x^{\pm}_{۲opt}=[۰/۸۱۲۵,۲/۳۱۲۵]$ |

مثال ۳- مدل ILP زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z^{\pm}=[۲,۲/۵]x^{\pm}_۱-[۱,۱/۵]x^{\pm}_۲+[۱/۵,۲]x^{\pm}_۳\\
&s.t.\\
&\qquad [۲,۳]x^{\pm}_۱+[۱/۵,۲]x^{\pm}_۲+[۳,۳/۴]x^{\pm}_۳\le[۱۵,۲۰]\\
&\qquad [۴/۵,۵/۵]x^{\pm}_۱+[۲/۵,۳/۵]x^{\pm}_۲-[۱,۱/۵]x^{\pm}_۳\le[۵,۱۰]\\
&\qquad [۱,۱/۶]x^{\pm}_۱-[۶,۷]x^{\pm}_۲+[۲,۳]x^{\pm}_۳\le[۴,۶]\\
&\qquad x^{\pm}_۱,x^{\pm}_۲,x^{\pm}_۳\ge ۰
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

نتایج در جدول ۲ داده شده است. چون نقطه‌ی راسی $(۳/۱۷۲۸,۱/۰۸۴۲,۴/۱۵۹۲)^t$ در نامساوی‌های $۲x_۱+۱/۵x_۲+۳x_۳\le۲۰$ و $۴/۵x_۱+۲/۵x_۲-۱/۵x_۳\le۱۰$ به عنوان قیود اول و دوم مدل بهترین صدق



[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

نمی‌کند؛ بنابراین این نقطه نشدنی است. لذا جواب‌های به دست آمده از روش BWC کاملا شدنی نیست. ITSM و CBM به ناحیه جواب کاملا شدنی منتهی می‌شوند. با توجه به نتایج واضح است که ناحیه جواب CBM نقاط شدنی بیش‌تری را به نسبت ITSM شامل می‌شود. از لحاظ زمانی نیز سه روش مقایسه شده است. با توجه به جدول ۲، در روش CBM زمان بیش‌تری مورد نیاز است؛ ولی جواب شدنی بیش‌تری حاصل می‌شود.

**جدول ۲.** جواب‌های حاصل از روش‌های BWC، ITSM و CBM برای مدل (۷)

| روش | نتایج | زمان (ثانیه) |
|---|---|---|
| BWC | $([۰/۷۸۰۲,۳/۱۷۲۸],[۰/۷۸۴۵,۱/۰۸۴۲],[۳/۰۸۵۶,۴/۱۵۹۲])^t$ | ۰/۰۱۵ |
| ITSM | $([۱/۰۲۱۷,۲/۶۰۰۰],[۰/۷۷۶۰,۱/۰۳۴۷],[۲/۸۵۷۸,۴/۴۱۶۰])^t$ | ۰/۰۱۵ |
| CBM | $(x_۱-۱/۹۷۶۵)^۲+(x_۲-۰/۹۳۴۴)^۲+(x_۳-۳/۶۲۲۴)^۲ \le (۰/۴۵۱۷)^۲$ | ۰/۱۲۴ |
| جعبه CBM | $([۱/۴۸۲۰,۲/۴۷۱۰],[۰/۴۳۹۹,۱/۴۲۸۹],[۳/۱۲۷۹,۴/۱۱۶۹])^t$ | ۰/۱۲۴ |

## ۵ نتایج

در این مقاله، روش گوی بسته (CBM) به عنوان یک ناحیه جدید برای مدل ILP معرفی می‌شود. در تمام روش‌های حل مدل ILP، برد جواب های بهینه بازه‌ای می‌باشد در حالی که در روش CBM، ناحیه جواب مدل ILP یک گوی است که می‌تواند بزرگ‌ترین ناحیه‌ی جوابی باشد که کاملا شدنی است. در روش BWC و ITSM ناحیه جواب از حل دو زیر مدل بهترین و بدترین حاصل می‌شود. در روش CBM ابتدا شدنی بودن نقطه-ی مرکز ناحیه‌ی جواب حاصل از BWC به عنوان یک گوی با شعاع صفر بررسی می‌شود. سپس مقدار شعاع گوی آن قدر افزایش می‌یابد که ناحیه‌ی حاصل در قیود مدل بهترین که دارای بزرگ‌ترین ناحیه شدنی است صدق کند. تعیین برد ناحیه جواب روش CBM برای مدل‌های با ابعاد بالا مشکل است. به همین دلیل جعبه ی CBM که به سادگی قابل محاسبه است پیشنهاد شده است.

## منابع


[۱] غفاری حدیقه، ع.، (۱۳۹۵). ارایه دو مدل جدید برنامه ریزی خطی در شرایط عدم قطعیت. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳ (۳)، ۵۱-۲۷.

[2] Beeck, H., (1978). Linear programming with inexact data. Munich: Technical report TUM-ISU-7830, Technical University of Munich,.

[3] Jansson, C., (1988). A self-validating method for solving linear programming problems with interval input data. In: Kulisch, U., Stetter, H. J. (eds.) Scientific computation with automatic result verification. Computing Suppl, 6, 33-45.

[4] Jansson, C., Rump, S. M. (1991). Rigorous solution of linear programming problems with uncertain data. Z. Oper. Res., 35(2), 87-111.

[5] Machost, B., (1970). Numerische Behandlung des Simplex verfahrens mit interval lanalytischen Methoden. Tech. Rep. 30, Berichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 54 pages, Bonn.

[6] Hladik, M., (2014). How to determine basis stability in interval linear programming. Optim. Lett., 8, 375-389.




[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]

[7] Konickova, J., (2001). Sufficient condition of basis stability of an interval linear programming problem. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., 81(3), 677-678.
[8] Mraz, F., (1996). On infimum of optimal objective function values in interval linear programming. Technical report KAM Series, pp. 96-337, Department of Applied Mathematics, Charles University, Prague.
[9] Rohn, J., (1993). Stability of the optimal basis of a linear program under uncertainty. Oper. Res. Lett., 13(1), 9–12.
[10] Rex, J., Rohn, J., (1998). Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 20(2), 437-445.
[11] Huang, G. H., Baetz, B. W., Patry, G. G., (1995). Grey integer programming: an application to waste management planning under uncertainty. Eur. J. Oper. Res., 83, 594-620.
[12] Huang, G. H., Moore, R. D., (1993). Grey linear programming, its solving approach, and its application. International Journal of Systems Science, 24, 159-172.
[13] Tong, S. C., (1994). Interval number, fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.
[14] Wang, X., Huang, G., (2014). Violation analysis on two-step method for interval linear programming. Information Sciences, 281, 85-96.
[15] Zhou, F., Huang, G. H., Chen, G., Guo, H., (2009) Enhanced-interval linear programming. European Journal of Operational Research, 199, 323-333.
[16] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H., Ashayerinasab, H. A., Javanmard, M., (2016). Improving the modified interval linear programming method by new techniques. Information Sciences, 339, 224-236.
[17] Allahdadi, M., Mishmast Nehi, H., (2013). The optimal solutions set of the interval linear programming problems. Optimization Letters, 7, 893-1911.
[18] Chinneck, J. W., Ramadan, K., (2000). Linear programming with interval coefficients. Journal of the Operational Research Society, 51, 209-220.
[19] Alefeld, G., Herzberger, J., (1983). Introduction to Interval Computations. New York: Academic Press.

[ Downloaded from jamlu.liau.ac.ir on 2025-10-24 ]

[ DOR: 20.1001.1.22517286.2017.14.2.5.2 ]