مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال یازدهم، شماره سوم (پیاپی ۴۲)، پاییز ۹۳، ص ص ۱۱-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌های بازده به مقیاس ثابت

مازیار صلاحی*[1]، نرگس ترابی[2]، علی جمالیان[3]
۱- دانشیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران
۳- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱۱ دی ۱۳۹۲
پذیرش مقاله: ۷ خرداد ۱۳۹۳

چکیده
با توجه به اهمیت لحاظ نمودن عدم قطعیت در مدل‌های مسایل ارزیابی عملکرد که در دنیای واقعی با آن‌ها مواجه می‌شویم و نیز کاربرد روزافزون آن در مسایل مختلف، رویکرد بهینه‌سازی استوار برای تحلیل این مساله پیشنهاد شده است. در این مقاله، به مطالعه‌ی ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده با روش تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم که داده‌های پارامترهای ورودی و خروجی دارای عدم قطعیت هستند. بدین منظور، همتای استوار مدل تحلیل پوششی داده‌ها را در شرایط عدم قطعیت بازه‌ای مورد بررسی قرار داده، نشان می‌دهیم که با فرض وجود عدم قطعیت بازه‌ای برای پارامترهای ورودی و خروجی، دوگان همتای استوار مدل پوششی با همتای خوش‌بینانه دوگان آن معادل است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت بازه‌ای، بازده به مقیاس ثابت.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها یکی از ابزارهای مهم برای ارزیابی کارایی نسبی سازمان‌هاست که به عنوان یک روش برنامه‌ریزی ریاضی غیرپارامتریک، در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی همسانی که پارامترهای ورودی و خروجی مشابه دارد، مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱]. چارنز، کوپر و رودز، دیدگاه فارل را که مدلی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده شامل یک ورودی و یک خروجی بود، گسترش دادند و الگویی ارایه کردند که توان اندازه‌گیری کارایی را با چندین ورودی و چندین خروجی داشته باشد. این مدل به افتخار پدیدآورندگان آن CCR نام گرفت و برای اولین بار در رساله‌ی دکترای رودز و به راهنمایی کوپر تحت عنوان ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس آمریکا استفاده شد [۲].

* عهده دار مکاتبات
پست الکترونیکی: salahim@guilan.ac.ir

با توسعه‌ی روش تحلیل پوششی داده‌ها، از آن در ارزیابی کارایی سازمان‌ها و صنایع گوناگون از جمله بانکداری، نیروگاه‌ها، دانشگاه‌ها و... استفاده می‌شود. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف واحدهای تحت ارزیابی را در متغیرهای مختلف تعیین کرده، با معرفی الگوهای کارا برای واحدهای ناکارا، به بهبود بهره‌وری و افزایش کارایی سازمان کمک کند. همچنین میزان تاثیر هر یک از متغیرها را در کارایی سازمان مشخص می‌سازد. الگوهای کارا واحدهایی هستند که نسبت به یک واحد ناکارا، با بهره-گیری از میزان ورودی مشابه، می‌تواند خروجی بیشتری را تولید کنند یا با استفاده از میزان ورودی‌های کمتر، حداقل به همان اندازه خروجی داشته باشند.

تاکنون، محققان تحلیل پوششی داده‌ها را با دو فرض بازده به مقیاس ثابت و بازده به مقیاس متغیر به کار برده‌اند. در مدل‌های بازده به مقیاس ثابت، واحدهای کوچک و بزرگ همگی با هم مقایسه می‌شوند؛ درحالی که مدل بازده به مقیاس متغیر، واحدهای مشابه را برای بررسی کارایی با هم مقایسه می‌کند. لذا، بازده به مقیاس متغیر در مقایسه با بازده به مقیاس ثابت، واحدهای بیشتری را کارا نشان می‌دهد؛ بنابراین، هنگامی که واحدها مشابه باشد بازده به مقیاس نمی‌تواند نقش مهمی را در تعیین کارایی ایفا کند. همچنین در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها دو دیدگاه مطرح است که عبارت است از: از دیدگاه ورودی محور و دیدگاه خروجی محور. در دیدگاه ورودی محور، تابع هدف به صورت ماکزیمم نسبت خروجی‌ها بر روی ورودی‌ها می‌باشد و در دیدگاه خروجی محور، تابع هدف به صورت مینیمم نسبت ورودی‌ها بر روی خروجی‌هاست. چون واحدهای تصمیم گیرنده در انتخاب وزن ورودی‌ها و خروجی‌ها آزاد هستند، ممکن است وزن‌های نزدیک به صفر را انتخاب کنند که برای تصمیم گیرنده‌ها چندان مطلوب نیست. از دیگر معایب انتخاب آزاد وزن‌ها این است که واحدهای مختلف تمایل دارند که برای ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه وزن‌های مختلف اختیار کنند که در رتبه‌بندی نهایی واحدها تغییراتی ایجاد کند؛ بنابراین باید وزن‌ها طوری انتخاب شود که اگر برای واحد تحت ارزیابی، در محاسبه‌ی کارایی سایر واحدها نیز لحاظ شده باشد، نمره‌ی کارایی آن‌ها را بیش‌تر از عدد یک محاسبه نکند.

مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها برای داده‌های قطعی پیشنهاد شد و توانایی برخورد را با عدم قطعیت در داده‌ها نداشت. در برخی از مطالعات اولیه که براساس تحلیل پوششی داده‌ها صورت پذیرفت، شرط غیرقطعی بودن پارامترها را کنار گذاشته، به رتبه‌بندی کارایی پرداختند. در حالی که در مسایل دنیای واقعی، وجود داده‌های غیردقیق و مبهم اجتناب ناپذیر است. بن- تال و نیمروفسکی [۳]، نشان دادند که انحراف بسیار کوچک در داده‌ها می‌تواند منجر به غیر موجه شدن جواب شود و به همین دلیل نتایج حاصل از روش تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک با پارامترهای قطعی قابل اطمینان نیست.

پیشرفت‌های اخیر در بهینه‌سازی استوار و استفاده از آن در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها منجر به تولید رتبه‌بندی‌هایی شده که با تغییر کوچک پارامترهای ورودی و خروجی تغییری در نتایج ایجاد کند. در نتیجه رتبه‌بندی‌هایی که با این روش به‌دست می‌آید قابل اعتماد می‌باشد. استواری به این مفهوم است که خروجی الگو حساسیت زیادی به مقادیر دقیق پارامترها و ورودی‌های الگو ندارد. بهینه‌سازی استوار جایگزینی برای تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی تصادفی است و یکی از مزیت‌های مهم آن، کاربردی بودن و انعطاف‌پذیری آن می‌باشد.

به این ترتیب که در این روش، ابتدا درصدی از انحراف در داده‌ها فرض می‌شود. سپس استواری کارایی تخمین زده شده به‌دست می‌آید.

تاکنون مدل‌های مختلفی در بهینه‌سازی استوار و اعمال عدم قطعیت در داده‌ها مطرح شده است. بهینه‌سازی استوار تحت شرایط عدم قطعیت بیضوی توسط بن- تال و نیمروفسکی [۵-۴]، تحت شرایط عدم قطعیت قابل کنترل توسط برتسیماس و سیم [۸-۶] و در عدم قطعیت بازه‌ای توسط کوپر و همکاران [۱۱-۹]. گرگانی و همکاران [۱۲] و سجادی و عمرانی [۱۳] مطرح شد که به ترتیب به ارزیابی کارایی مدارس ایران و ارزیابی کارایی شرکت توزیع برق پرداختند و از روش استوار تحلیل پوششی داده‌ها با فرض عدم قطعیت روی پارامترهای خروجی با روش‌های بن- تال و نیمروفسکی و برتسیماس استفاده کردند و نشان دادند که مدل بهینه‌سازی استوار تحلیل پوششی داده‌ها در مقایسه با روش آماری SFA، نتایج قابل قبول تری را ارایه می‌دهد.

با توجه به محدودیت‌هایی که در اعمال عدم قطعیت بر داده‌های موجود در قیدهای به فرم تساوی وجود دارد، در نظرگرفتن عدم قطعیت داده‌های ورودی در مدل مضربی CCR با مشکل مواجه می‌شود. عمرانی [۱۴]، با استفاده از بهینه‌سازی استوار، یک مجموعه‌ی متعارف از وزن‌ها را با فرض عدم قطعیت روی داده‌های ورودی و خروجی در مدل مضربی CCR پیشنهاد کرد. او با جایگزینی قید نرمال‌سازی مجموع وزن ورودی‌ها و خروجی‌ها، عدم قطعیت را علاوه بر خروجی‌ها بر روی ورودی‌ها نیز در نظر گرفت و با استفاده از روش برتسیماس و سیم به ارزیابی کارایی شرکت‌های گاز استان‌های مختلف پرداخت. آقایی و همکاران [۱۵]، عدم قطعیت در داده‌های ورودی و خروجی را تحت شرایط عدم قطعیت بازه‌ای بررسی کردند و کارایی هر واحد تصمیم گیرنده را با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای، به صورت یک بازه نشان دادند به طوری که کران بالای بازه، خوش‌بینانه‌ترین مقدار و کران پایین بازه، بدبینانه‌ترین نمره‌ی کارایی واحد تصمیم‌گیرنده را مشخص کرد. شکوهی و همکاران [۱۶]، مدل بهینه‌سازی استوار روی پارامترهای ورودی و خروجی متعلق به مجموعه‌ی عدم قطعیت را با افزودن قیدهایی بر اساس بدترین حالت جواب نسبت به مجموعه‌ی عدم قطعیت پیشنهاد دادند.

در این مقاله، با رویکردی جدید به ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با تکنیک بهینه‌سازی استوار بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها (بازده به مقیاس ثابت و ماهیت ورودی) تحت شرایط عدم قطعیت بازه‌ای روی داده‌های ورودی و خروجی با دیدگاه بدبینانه و خوش‌بینانه می‌پردازیم. به این ترتیب که، در دیدگاه بدبینانه هر واحد تصمیم گیرنده را تحت بدترین شرایط مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و در دیدگاه خوش‌بینانه، تحت بهترین شرایط به ارزیابی هر واحد تصمیم گیرنده می‌پردازیم. بدین منظور، همتای استوار فرم مضربی مدل CCR (بازده به مقیاس ثابت) را در ماهیت ورودی تحت شرایط عدم قطعیت بازه‌ای بر روی پارامترهای ورودی و خروجی ارایه می‌کنیم و در ادامه با محاسبه‌ی همتای خوش‌بینانه‌ی دوگان فرم پوششی مدل CCR، نشان می‌دهیم که دوگان همتای استوار فرم پوششی CCR با همتای خوش‌بینانه‌ی دوگان آن معادل است.

ساختار ادامه‌ی مقاله به این صورت است که در بخش ۲، مروری بر روش تحلیل پوششی داده‌ها و مدل‌های آن می‌کنیم و در بخش ۳، مدل‌های بهینه‌سازی استوار تحلیل پوششی داده‌ها در شرایط عدم قطعیت بازه‌ای و نیز

ارتباط همتای استوار دوگان با دوگان همتای استوار مساله بیان می‌شود. در پایان نیز نتایج حاصل از این مدلسازی ارایه خواهد شد.

۲ تحلیل پوششی داده‌ها

روش تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای همسان با ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه، از دو فرض بازده به مقیاس ثابت و متغیر و دو ماهیت ورودی و خروجی استفاده می‌کند. منظور از کارایی نسبی، کارایی یک واحد تصمیم گیرنده نسبت به دیگر واحدهای تصمیم گیرنده است. مدل تحلیل پوششی داده‌ها با بازده به مقیاس ثابت به صورت برنامه‌ریزی کسری زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\
&s.t. \\
&\qquad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \qquad j=1,\dots,n, \\
&\qquad u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad i=1,\dots,m, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

که در آن، r ،i و j به ترتیب اندیس ورودی‌ها، خروجی‌ها و واحدهای تصمیم گیرنده، m تعداد ورودی‌ها، s تعداد خروجی‌ها، n تعداد واحدهای تحت بررسی، $o \in \{1,\dots,n\}$ اندیس واحد تحت ارزیابی، $x_{1j},\dots,x_{mj}$ و $y_{1j},\dots,y_{sj}$ به ترتیب بیان‌گر ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده است. بردارهای u_r و v_i نیز به ترتیب، وزن خروجی‌ها و ورودی‌ها را نشان می‌دهد.

مدل (۱) معادل برنامه‌ریزی خطی زیر است [۸]:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\
&\qquad u_r \ge 0, v_i \ge 0, \quad i=1,\dots,m, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

مدل (۲) را فرم مضربی CCR، (بازده به مقیاس ثابت) در ماهیت ورودی می‌نامند.

در تحلیل پوششی داده برای اجتناب از غیر واقعی شدن نتایج، از دوگان فرم مضربی CCR استفاده می‌کننـد. مزیت مدل دوگان این است که هرگاه تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده بیشتر از تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها باشد، مدل برنامه‌ریزی خطی را به صورت کاراتری نسبت به مدل اولیه حـل کنـد. دوگـان فـرم مضـربی را فـرم پوششـی گویند که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\ & \qquad \lambda_j \ge 0, \qquad\qquad j=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{۳}$$

۳ تحلیل پوششی داده‌های استوار با عدم قطعیت بازه‌ای

مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها توانایی برخورد را با عدم قطعیت در داده‌ها ندارد و برای داده‌های قطعی طراحی شده است. به همین دلیل با توجه به عدم قطعیت موجود در اکثر داده‌هـای واقعـی، مـدل تحلیـل پوششـی داده‌ها در فضای غیر قطعی با استفاده از تکنیک بهینـه‌سـازی اسـتوار توسـعه داده شـد. یکـی از مزایـای اسـتفاده از بهینه‌سازی استوار انعطاف پذیری آن است. به این صـورت کـه عملکـرد واحـد تصـمیم گیرنـده را تحـت بـدترین شرایط مورد ارزیابی قرار می‌دهد. همچنین مدل همتای استوار تحلیل پوششی داده‌ها، تحـت شـرایط عـدم قطعیـت بازه‌ای، خطی بودن مدل اولیه را حفظ می‌کند.

در این بخش، فرم پوششی مدل CCR را به عنوان مساله‌ی اولیه و فـرم مضـربی CCR را مسـاله‌ی دوگـان در نظر می‌گیریم. در قضیه‌ی ۱، همتای استوار فرم پوششـی را تحـت شـرایط عـدم قطعیـت بـازه‌ای بـرای پارامترهـای ورودی و خروجی ارایه می‌دهیم.

قضیه‌ی ۱: اگر x_{ij} و y_{rj} به ترتیب متعلق به بازه‌های غیرقطعی $\eta_{ij}=\left[\underline{x}_{ij},\overline{x}_{ij}\right]$ و $\delta_{rj}=\left[\underline{y}_{rj},\overline{y}_{rj}\right]$ باشد، همتای استوار فرم پوششی مدل CCR، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} R\text{-}CCR: \quad & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{io} p_i - \underline{x}_{io} q_i \le 0, \qquad i=1,\dots,m, \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underline{y}_{rj} \ge \overline{y}_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\ & \qquad -p_i + q_i = \theta, \qquad i=1,\dots,m, \\ & \qquad p_i, q_i, \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n, \quad i=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{۴}$$

اثبات: برای $x_{ij} \in \eta_{ij}$ و $y_{rj} \in \delta_{rj}$ مساله‌ی (۳) معادل است با

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \theta\\
&s.t.\\
&\quad Min_{x_{io}} \theta x_{io} - Max_{x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m,\\
&\quad Min_{y_{rj}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - Max_{y_{ro}} y_{ro} \geq 0, \qquad r = 1,\dots,s,\\
&\quad \lambda_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{5}
$$

با توجه به اینکه λ_jها نامنفی است؛ داریم:

$$
\begin{aligned}
&Max_{x_{ij}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overline{x}_{ij}\\
&Min_{y_{rj}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underline{y}_{rj}\\
&Max y_{ro} = \overline{y}_{ro}
\end{aligned}
$$

همچنین برای $\underset{x_{io}}{Min}\, \theta x_{io}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \theta x_{io}\\
&s.t.\\
&\quad x_{io} \leq \overline{x}_{io},\\
&\quad -x_{io} \leq -\underline{x}_{io}.
\end{aligned}
$$

دوگان این مدل به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad -\overline{x}_{io} p_i + \underline{x}_{io} q_i\\
&s.t.\\
&\quad -p_i + q_i = \theta,\\
&\quad p_i, q_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

با استفاده از قضیه‌ی دوگانی ضعیف داریم $-\overline{x}_{io} p_i + \underline{x}_{io} q_i \leq \theta x_{io}$ و با جای‌گذاری در (۵)، مدل R-CCR به‌دست می‌آید. ■

به دلیل وجود قید تساوی $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$، در فرم مضربی CCR، امکان در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای ورودی مدل استوار تحلیل پوششی داده‌های به روش کلاسیک وجود ندارد؛ لذا با توجه به عدم قطعیت در اکثر داده‌های واقعی و برای رسیدن به رتبه‌بندی قابل اطمینان، از همتای خوش‌بینانه‌ی دوگان مدل پوششی CCR استفاده می‌کنیم و عدم قطعیت را علاوه بر پارامترهای خروجی، روی پارامترهای ورودی نیز در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱: مساله‌ی بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
&Min \quad g(x;u) \\
&s.t. \\
&\qquad H(x;v_1) \le 0, \\
&\qquad K(x;v_2) = 0, \\
&\qquad x \in R^n.
\end{aligned}$$

که در آن توابع برداری H,K و g تابعی از متغیر x است. همچنین $u \in R^p, v_1 \in R^{q_1}, v_2 \in R^{q_2}$ پارامترهای دارای عدم قطعیت مساله می‌باشند که به ترتیب متعلق به مجموعه‌های فشرده U,V_1,V_2 است. همتای خوش‌بینانه‌ی این مساله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{Min} \quad \left[\underset{u\in U}{Min}\ g(\mathrm{x;u})\right] \\
&s.t. \\
&\qquad H(x;v_1) \le 0, \qquad \text{for some } \mathrm{v}_1 \in V_1, \\
&\qquad K(x;v_2) = 0, \qquad \text{for some } \mathrm{v}_2 \in V_2, \\
&\qquad x \in R^n.
\end{aligned}$$

قضیه‌ی ۲: دوگان همتای استوار فرم پوششی (DR-CCR)، تحت شرایط عدم قطعیت بازه‌ای با همتای خوش‌بینانه‌ی دوگان مدل CCR (OD-CCR)، معادل و به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} \overline{y}_{ro} u_r \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} \underline{y}_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_{ij} v_i \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_{io} v_i \le 1, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_{io} v_i \ge 1, \\
&\qquad u_r \ge 0, v_i \ge 0, \quad i=1,\dots,m, \quad r=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{۶}$$

اثبات: از تعریف ۱ شکل خوش‌بینانه‌ی دوگان فرم مضربی CCR به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} u_r \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_i \le 0, \quad \text{for some } y_{rj} \in [\underline{y}_{rj}, \bar{y}_{rj}],\ x_j \in [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}] \quad j = 1,\dots,n,\ j \ne o, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} y_{ro} u_r \le 1, \qquad \text{for some } y_{ro} \in [\underline{y}_{ro}, \bar{y}_{ro}], \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{io} v_i = 1, \qquad \text{for some } x_{io} \in [\underline{x}_{io}, \bar{x}_{io}], \\
&\qquad u_r \ge 0, v_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,m, \quad r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{7}$$

در مدل (۷) قید $\sum_{i=1}^{m} x_{io} v_i = 1, \quad \text{for some } x_{io} \in [\underline{x}_{io}, \bar{x}_{io}]$ با دو قید زیر هم ارز است

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \underline{x}_{io} v_i \le 1 \\
&\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} v_i \ge 1
\end{aligned} \tag{8}$$

از طرفی قید $\sum_{r=1}^{s} y_{ro} u_r \le 1, \quad \text{for some } y_{ro} \in [\underline{y}_{ro}, \bar{y}_{ro}]$، معادل است با $\sum_{r=1}^{s} \underline{y}_{ro} u_r \le 1$. لذا با استفاده از این قید و قید دوم (۸) داریم:

$$\sum_{r=1}^{s} \underline{y}_{ro} u_r - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} v_i \le 0 \tag{9}$$

بنابراین مدل (۷) با استفاده از قیود (۸) و (۹) با مساله‌ی (۶) معادل خواهد شد. برای محاسبه‌ی دوگان همتای استوار فرم پوششی، از مدل (۴) داریم:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \theta \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{x}_{ij} + \bar{x}_{io} p_i - \underline{x}_{io} q_i \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underline{y}_{rj} \ge \bar{y}_{ro}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
&\qquad -p_i + q_i = \theta, \qquad i = 1,\dots,m, \\
&\qquad p_i, q_i, \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}$$

که دوگان استوار آن (DR-CCR) به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
DR\text{-}CCR: \quad & Max \quad \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} u_r \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{s} \underline{y}_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} v_i \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& \quad \underline{x}_{io} v_i + t_i \le 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \quad -\bar{x}_{io} v_i - t_i \le 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \quad -\sum_{i=1}^{m} t_i = 1, \\
& \quad u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m, \quad r = 1,\dots,s.
\end{aligned}
$$

با جمع دو دسته قید $\underline{x}_{io} v_i + t_i \le 0$ و $-\bar{x}_{io} v_i - t_i \le 0$ روی اندیس i داریم:

$$
\sum_{i=1}^{m} \underline{x}_{io} v_i + \sum_{i=1}^{m} t_i \le 0
$$

$$
-\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} v_i - \sum_{i=1}^{m} t_i \le 0
$$

با جای‌گذاری $\sum_{i=1}^{m} t_i = -1$ نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} u_r \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{r=1}^{s} \underline{y}_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} v_i \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_{io} v_i \le 1, \\
& \quad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} v_i \ge 1, \\
& \quad u_r \ge 0, v_i \ge 0
\end{aligned}
$$

که با مدل (۶) معادل است. ■

در قضیه‌ی ۲ نشان دادیم که OD-CCR = DR-CCR. طبق قضیه‌ی قوی دوگانی، R-CCR = DR-CCR و از این نتیجه می‌شود که R-CCR = OD-CCR. به عبارت دیگر، بدترین برای مساله‌ی اولیه CCR معادل با بهترین برای دوگان آن است [۱۷].

الگوی پوششی این امکان را می‌دهد که ترکیب محدب ایجاد شده برای هر واحد ناکارا و میزان دخیل بودن واحدهای کارا در این ترکیب مشخص شود؛ لذا برای هر واحد ناکارا می‌توان واحدهای کارایی را به عنوان مرجع و الگو در نظر گرفت و تحلیلی بر اساس میزان تغییرات لازم برای کارا شدن واحد تحت ارزیابی انجام داد. با لحاظ نمودن عدم قطعیت بر داده‌های ورودی و خروجی، می‌توان کران‌های بهتری برای تغییرات در ورودی‌ها و خروجی‌های واحد به‌دست آورد تا بتواند کارا شود. الگوی مضربی مشخص می‌کند که واحدهای تصمیم

گیرنده در کجای مرز کارا قرار دارد و برای رسیدن به این مرز چه ترکیبی از ورودی‌ها و خروجی‌ها را باید انتخاب کرد و این امر جز با مشخص کردن ضرایب ورودی‌ها و خروجی‌های هر واحد انجام نمی‌شود. با اعمال عدم قطعیت بر داده‌های ورودی و خروجی، مدل استوار ضرایب را به گونه‌ای مشخص می‌کنند که بتوان نسبت ترکیب ورودی‌ها و خروجی‌ها برای کارا شدن واحد تحت ارزیابی را به‌دست آورد. قضیه‌ی ۲ بیان می‌کند که با حل مدل استوار فرم مضربی، ضرایب ورودی‌ها و خروجی‌ها مشخص می‌شود و جایگاه واحدها نسبت به مرز کارایی معلوم می‌گردد. حال برای کارا شدن آن باید ترکیبی از این ضرایب را در نظر گرفت که نمره‌ی کارایی را برابر با ۱ می‌کند. این ضرایب در واقع قیمت‌های سایه‌ای است و هم‌زمان با آن واحدهای مرجع که در کارایی آن موثر می‌باشد، معلوم می‌گردد.

٤ نتیجه‌گیری

در این مقاله، همتای استوار فرم پوششی CCR و همتای خوش‌بینانه‌ی فرم مضربی CCR در شرایط عدم قطعیت بازه‌ای روی پارامترهای ورودی و خروجی مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به این‌که همتای خوش‌بینانه‌ی فرم مضربی با خوش‌بینانه ترین ضرایب (در بهترین شرایط) یک واحد تصمیم گیرنده را ارزیابی می‌کند، اگر واحدی تحت بهترین شرایط با خوش‌بینانه‌ترین ضرایب ناکارا باشد، با هر روش دیگر و نیز تغییرات داده‌ها بررسی شود، همچنان ناکارا خواهد بود. همچنین در همتای استوار فرم پوششیCCR واحد تصمیم گیرنده را با بدترین ضرایب تحت ارزیابی قرار می‌دهیم؛ لذا اگر واحدی در بدترین شرایط کارا باشد، حتما کاراست و مرجع مناسبی برای ارتقای کارایی واحدهای دیگر است. در صورتی که با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها اگر واحدی کارا می‌بود نمی‌توانستیم با اطمینان در مورد کارایی آن اظهار نظر کنیم. از طرفی استفاده از فرم استوار مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، پایه‌ای برای رتبه‌بندی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده با درصد اطمینان بالاتر می‌شود. همچنین، نشان داده شد که دوگان استوار فرم پوششی CCR با همتای خوش‌بینانه صورت مضربی CCR معادل است.

منابع

[1] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. Berlin, Springer-Verlag.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2 (6), 429-444.

[3] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical programming, 88, 411-421.

[4] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1999). A Robust solutions of uncertain linear programs. Operations Research Letters, 25(1), 1-13.

[5] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1998). Robust convex optimization. Mathematics of Operations Research, 23(4), 769-805.

[6] Bertsimas, D., Pachamanova, D., Sim, M., (2004). Robust linear optimization under general norms. Operations Research Letters, 32, 510-516

[7] Bertsimas, D., Sim, M., (2003). Robust discrete optimization and network flows. Mathematical Programming Series B, 98, 49-71.

[8] Bertsimas, D., Sim, M., (2006). Tractable approximations to robust conic optimization problems. Mathematical Programming, 107(1), 5-36

[9] Cooper, W. W., Park, K .S., Yu, G., (2001). An illustrative application of IDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company. Operations Research, 49, 807-820.

[10] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu, G., (1999). IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA. Management Science, 45, 597-607.

[11] Cooper, W. W., Park, K. S., Yu, G., (2001). IDEA (imprecise data envelopment analysis) with CMDs (column maximum decision making units). Journal Of the Operational Research Society, 52, 176-181.

[12] Gharakhani, M., Kazemi, I., Alizadeh haji, H., (2011). A robust DEA model for measuring the relative efficiency of Iranian high schools. Management Science Letters, 389-404.

[13] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. Energy Policy, 36, 4247-4254.

[14] Omrani, H., (2013).Common weights data envelopment analysis with uncertain data: a robust optimization approach. Computers & Industrial Engineering, doi: http://dx.doi.org/ 10.1016/ J.cie 2013.07.023

[15] Aghayi, N., Agrell, P., Hatami-Marbini, A., (2013). Imprecise data envelopment analysis for the two-stage precess. International Association for Research And Teaching, 1-20.

[16] Shokouhi, H. A., Hatami-Marbini, A., Tavana, M., Saati, S.و (2010). A robust optimization approach for imprecise data envelopment analysis. Computers and Industrial Engineering, 59, 389-397.

[17] Beck, A., Ben-Tal, (2009). Duality in robust optimization: primal worst equals dual best. Operations Research Letters, 37, 1-6.