مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره دوم (پیاپی ۵۳)، تابستان ۹۶، ص ص ۹۳-۸۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

به‌کارگیری بهینه‌سازی استوار در مساله انتخاب سبد سهام با افت سرمایه در معرض خطر مشروط

محمدحسین رضایی*[۱]، علیرضا قهطرانی[۲]، امیرعباس نجفی[۳]
۱- مربی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، گروه مهندسی صنایع، قزوین، ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران
۳ - دانشیار، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۲ دی ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۱ خرداد ۱۳۹۶

چکیده

مساله انتخاب سبد سهام یکی از مهم‌ترین مسایل در حوزه مسایل مهندسی مالی می‌باشد. این مساله تلاش می‌کند ترکیب بهینه‌ای از سرمایه‌گذاری در سهام و دارایی‌های مالی را به نحوی مشخص کند که بازده سرمایه‌گذاری، بیشینه و ریسک سرمایه‌گذاری کمینه شود. تاکنون سنجه‌های متعددی برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری توسعه داده‌شده است. یکی از جدیدترین سنجه‌های اندازه‌گیری ریسک، افت سرمایه در معرض خطر مشروط می‌باشد که از خانواده‌ی سنجه ریسکِ ارزش در معرض خطر مشروط است. مدل کلاسیک توسعه داده‌شده توسط این سنجه، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بوده و عدم‌قطعیت داده‌ها را در نظر نمی‌گیرد. در سال‌های اخیر و برای در نظرگیری عدم قطعیت داده‌ها از رویکردهای متعددی استفاده‌شده، که یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها بهینه‌سازی استوار می‌باشد. در بهینه‌سازی استوار با استفاده از یک مجموعه عدم قطعیت برای محدودیت‌های غیرقطعی، همتای استوار تعریف می‌شود. مقاله حاضر به توسعه مدل انتخاب سبد سهام که سنجه ریسک آن افت سرمایه در معرض خطر مشروط است با استفاده از بهینه‌سازی استوار می‌پردازد. رویکرد استوار مورداستفاده در این تحقیق، رویکرد برتسیماس و سیم می‌باشد. در این رویکرد همتای استوار ارایه‌شده برای یک مدل برنامه‌ریزی خطی همچنان خطی باقی می‌ماند که باعث می‌شود مزایای مدل برنامه‌ریزی خطی در آن‌ها حفظ شود. مدل ارایه‌شده در این مقاله با استفاده از داده‌های واقعی ۲۰ سهم از بازار بورس اوراق بهادار تهران حل و نتایج آن نشان‌دهنده کارایی بالای مدل در توسعه مدل‌های تحت شرایط عدم قطعیت می‌باشد. همچنین نتایج نشان می‌دهد درصورتی‌که سطح محافظه‌کاری افزایش یابد، مقدار تابع هدف افزایش خواهد یافت.

کلمات کلیدی: مساله انتخاب سبد سرمایه، افت سرمایه در معرض خطر مشروط، بهینه‌سازی استوار، عدم‌قطعیت داده‌ها.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: rezaie345@yahoo.com

۱ مقدمه

مساله سرمایه‌گذاری ازجمله مسایلی می‌باشد که انسان با آن درگیر بوده و هست. می‌توان ادعا نمود که از زمانی که انسان به فکر سرمایه‌گذاری بوده این مساله نیز با او همراه بوده است. مساله سرمایه‌گذاری به یکی از بنیادی‌ترین سوالات در زمینه سرمایه‌گذاری پاسخ می‌دهد و این سوال این است که سرمایه خود را در چه دارایی‌هایی سرمایه‌گذاری کنیم تا بیش‌ترین سود ممکن حاصل شود.

تا قبل از توسعه مدل نوین سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاران در پی افزایش سود حاصل از سرمایه‌گذاری بودند و توجهی به خطرات و ریسک‌های سرمایه‌گذاری نمی‌کردند. مارکویتز [۱] تئوری نوین سرمایه‌گذاری را مطرح و پیشنهاد نمود علاوه بر در نظر گرفتن بازده سرمایه‌گذاری، معیار ریسک نیز در سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. وی در این مدل، واریانس را به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفت و در مدل خود، تلاش نمود میانگین بازده سرمایه‌گذاری را بیشینه و از طرف دیگر واریانس بازده سرمایه‌گذاری را کمینه کند. توسعه صورت گرفته توسط مارکویتز، باعث به وجود آمدن یک زمینه جدید در علم مالی شد. بعد از ارایه مدل اولیه مارکویتز، تلاش‌های بسیاری برای ارایه سنجه‌های ریسک جدیدتر و کارآمدتر صورت گرفت. واریانس توسط بسیاری از محققان به‌عنوان یک سنجه ریسک خوب موردتردید قرار گرفت؛زیرا این معیار هرگونه انحرافی را چه بالاتر و چه پایین‌تر از بازده انتظاری به‌عنوان ریسک تلقی می‌کند، درواقع مدل به‌گونه‌ای دارایی‌ها را انتخاب می‌کند که کم‌ترین فاصله را با میانگین داشته باشند. ازاین‌رو مارکویتز [۲] سنجه ریسک یک‌طرفه را معرفی و پیشنهاد داد از نیم واریانس به‌عنوان سنجه ریسک استفاده شود. علاوه بر مشکلات ارایه‌شده در ارتباط با واریانس یکی دیگر از این مشکلات غیرخطی بودن و سخت بودن محاسبه ماتریس واریانس و کوواریانس در اندازه‌های بزرگ می‌باشد. ازاین‌رو، کونو یامازاکی [۳] یک سنجه ریسک جدید را توسعه دادند و پیشنهاد دادند برای سنجش انحرافات از میانگین بازده انتظاری به‌جای واریانس از قدر مطلق انحراف از میانگین استفاده شود. استفاده از قدر مطلق انحراف از میانگین باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سرمایه به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل و نیازی به محاسبه واریانس تک‌تک سهم‌ها و برآورد کوواریانس دوبه‌دوی سهم‌ها وجود ندارد. میچالوفسکی و اوگریزاک [۴] مدل سبد سهام را به مدل قدرمطلق انحراف از میانگین چند سطحی توسعه دادند. در این مدل برای مقادیر کم‌تر از میانگین جریمه در نظر گرفته می‌شود و این امکان وجود دارد تا چند سطح میانگین محاسبه و برای مقادیر کم‌تر از آن جریمه در نظر گرفته شود. یکی دیگر از سنجه‌های ریسک توسعه داده‌شده در زمینه مساله انتخاب سبد سهام ارزش در معرض خطر می‌باشد. لینسمیر و پیرسون [۵] ارزش در معرض خطر را به‌عنوان حداکثر زیان یک سهم در سطح اطمینان معین در زمان معین معرفی نمودند. درواقع ارزش در معرض خطر به معنای این است که با احتمال $\alpha\%$ چه میزان زیان رخ خواهد داد. راکفلر و اوریاسو [۶] یک سنجه ریسک جدید معرفی نمودند که به نام ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR) معروف است. ارزش در معرض خطر حداکثر زیان ممکن در سطح اطمینان معین را برآورد می‌کند؛ لیکن مشخص نمی‌کند که این زیان چه مقدار بد است. این در حالی است که در بسیاری از موارد، سرمایه‌گذاران به دنبال تعیین میزان بزرگی این حداکثر زیان تا تعیین احتمال رخداد آن هستند. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی

تبدیل شود. مانسینی و همکاران [۷] سنجه ارزش در معرض خطر مشروط موزون را ارایه دادند. در این سنجه، میانگین چند سطح اطمینان برای محاسبه ارزش در معرض استفاده‌شده است. سنجه ریسک افت سرمایه در معرض خطر مشروط (CDaR) بسیار شبیه به CVaR می‌باشد. این سنجه ریسک اولین بار توسط چخلوف و همکاران [۸] ارایه و توسط کروخمال و همکاران [۹] توسعه پیدا کرد. این سنجه، میزان سقوط ارزش یک سبد سهام از حداکثر میزانی که در طول دوره داشته است را مشخص می کند.

از طرفی دیگر، در برنامه‌ریزی ریاضی معمولاً مسایل با پیش‌فرض قطعی بودن داده‌ها از قبل حل می‌شوند حال‌آنکه در دنیای واقعی اکثر داده‌ها دچار عدم قطعیت‌اند. درنتیجه در مسایل دنیای واقعی ممکن است با تغییر یکی از داده‌ها تعداد زیادی از محدودیت‌ها نقض شده و جواب به‌دست‌آمده غیر بهینه یا حتی غیرممکن باشد. در مساله انتخاب سبد سهام این موضوع حادتر بوده و عدم قطعیت داده‌ها در تعیین سبد بهینه بسیار تعیین‌کننده می‌باشند. در سال‌های اخیر رویکردهای مختلفی برای مدل‌سازی تحت شرایط غیرقطعی توسعه‌یافته، که یکی از این مؤثرترین رویکردها، بهینه‌سازی استوار می‌باشد. عدم قطعیت می‌تواند بر روی بهینگی و موجه بودن مسایل تأثیر بگذارد و معمولاً از بهترین برآورد داده‌ها جهت به‌کارگیری در مدل‌های کلاسیک استفاده می‌شود که به این داده‌ها، داده‌های اسمی اطلاق می‌شود. اولین مدل بهینه‌سازی استوار توسط سویستر [۱۰] ارایه گردید، این مدل به ساختن جواب‌های شدنی برای یک مجموعه محدب می‌پرداخت. جواب‌های مدل سویستر بسیار محافظه‌کارانه بودند، به‌گونه‌ای که در مقابل تضمین استواری جواب از بهینگی صرف‌نظر می‌شد. در گام بعدی جهت توسعه بهینه‌سازی استوار، مدل بنتال و نمیروسکی [۱۱] و به‌طور مستقل از آن، القاوی و همکاران [۱۲] ارایه گردید. مدل آن‌ها دارای دو مشکل بود اول اینکه سختی محاسباتی مساله افزایش می‌یافت و دوم اینکه، هیچ تضمین احتمالی جهت شدنی بودن جواب ارایه نمی‌کرد. علاوه بر این، مدل بنتال و نمیروسکی غیرخطی بود. در ادامه، برتسیماس و سیم [۱۳] رویکردی را ارایه کردند که در آن تعاملی بین بهینگی و استواری وجود داشت. مدل آن‌ها یک مدل خطی می‌باشد که به تعدیل سطح محافظه‌کاری جواب استوار می‌پردازد.

یکی از ویژگی‌های مهم در مدل‌های سبد سهام وجود عدم قطعیت داده‌های لازم می‌باشد؛ لذا تلاش‌های بسیاری برای در نظر گرفتن پارامترهای غیرقطعی در مدل سبد مالی صورت گرفته است. بنتال و همکاران [۱۴] یک مساله انتخاب سبد سهام چندمرحله‌ای استوار را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی خطی مدل‌سازی کرده‌اند. مون و یائو [۱۵] مدل استوار قدر مطلق انحراف از میانگین را معرفی کردند. کوارانتا و زافارونی [۱۶] مدل استوار ارزش در معرض خطر مشروط را ارایه کردند. آن‌ها از رویکرد بنتال و نمیروفسکی برای توسعه مدل استوار CVaR استفاده کردند که باعث شد این مدل به یک مدل غیرخطی تبدیل شود. قهطرانی و نجفی [۱۷] مدل استوار مساله انتخاب سبد سهام را در حالت چندهدفه توسعه دادند و از برنامه‌ریزی آرمانی برای حل آن استفاده نمودند. ژو همکاران [۱۸] مدل ارزش در معرض خطر مشروط در بدترین حالت را به کمک رویکردهای مختلف عدم قطعیت که شامل عدم قطعیت مکعبی، عدم قطعیت بیضوی مدل‌سازی نمودند که درواقع دو رویکرد فوق منجر به مدل‌سازی به کمک روش‌های بن – تال و نمیروفسکی و برتسیماس و سیم می‌باشد. مدل‌های حاصل از رویکردهای فوق منجر به مدل برنامه‌ریزی خطی و مدل بهینه‌سازی مخروطی مرتبه دوم می‌باشد که به‌راحتی

قابل‌حل می‌باشند. چن و تان [۱۹] با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی تصادفی (محدودیت شانس) و بهینه‌سازی استوار مدل میانگین واریانس را توسعه دادند. آن‌ها بازده دارایی‌ها را به‌صورت غیرقطعی فرض کردند و مجموعه عدم قطعیت بازه‌ای برای توسعه بهینه‌سازی استوار در آن استفاده نمودند. لینگ و ژو [۲۰] مدل بهینه‌سازی استوار مساله انتخاب سبد سرمایه را ارایه نمودند. در مدل ارایه شده توسط آن‌ها تمرکز بر روی واردکردن اختیار معامله در سبد سهام می‌باشد در این صورت ریسک به کمک اختیار معامله و استراتژی‌های موجود کنترل می‌شود. نکته جالب‌توجه در مدل آن‌ها استفاده از مجموعه عدم قطعیت بیضوی با حاشیه مشترک می‌باشد. پینار و پاک [۲۱] مدل میانگین-قدرمطلق نیمه انحراف از میانگین را به کمک مجموعه‌های عدم قطعیت بیضوی توسعه دادند. آن‌ها مدل‌سازی خود را برای مسایل تک دوره‌ای و چند دوره‌ای توسعه دادند. خیامیم و همکاران [۲۲] به ارایه یک مدل فازی برای به‌روزرسانی پرتفوی با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی پرداختند. آن‌ها دوره زمانی را به دوره‌های کوتاه‌تر تقسیم نمودند و در ابتدای هر دوره به بازنگری سبد سهام پرداختند. در این مدل هزینه‌های معاملاتی نیز در نظر گرفته‌شده است. حافظی و همکاران [۲۳] به ارایه یک مدل ترکیبی هوشمند برای پیش‌بینی بازار سهام تهران پرداختند. قندهاری و همکاران [۲۴] یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با گشتاور بالا ارایه نمودند. در این مقاله چند هدف برای بهینه‌سازی در نظر گرفته‌شده است ازجمله حداکثر سازی بازده، حداقل سازی ریسک، حداکثر سازی چولگی، حداقل سازی کشیدگی می‌توان نام برد.

در این مقاله برای اولین بار از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم برای توسعه مدل انتخاب سبد سهام که سنجه ریسک آن افت سرمایه در معرض خطر مشروط می‌باشد استفاده می‌شود. محاسبه افت سرمایه در معرض خطر مشروط در مقایسه باارزش در معرض خطر مشروط محافظه‌کارانه‌تر بوده و هرگونه کاهش قیمت را غیر مطلوب در نظر گرفته و تلاش می‌کند از آن جلوگیری کند. مدل ارایه‌شده در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی خواهد بود که امکان حل آن با نرم‌افزارهای موجود تحقیق در عملیات به‌صورت کارا وجود دارد. ساختار مقاله در ادامه، بدین‌صورت خواهد بود: در بخش دوم مدل انتخاب سبد سهام با افت سرمایه در معرض خطر مشروط معرفی می‌شود. در بخش سوم مدل ارایه‌شده توسط رویکرد استوار برتسیماس و سیم توسعه داده می‌شود. سپس در ادامه، مدل ارایه‌شده با به‌کارگیری داده‌های واقعی بازار حل‌شده و مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرد. در انتها نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی ارایه می‌گردد.

۲ مدل انتخاب سبد سهام با افت سرمایه در معرض خطر مشروط

در این قسمت مدل سبد سهام با سنجه افت سرمایه در معرض خطر مشروط در شرایط قطعی و بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها معرفی می‌شود. این سنجه ریسک به‌عنوان یکی از سنجه‌های ریسک جدید شناخته‌شده و از محافظه‌کارترین روش‌های اندازه‌گیری ریسک به‌حساب می‌آید. برای درک بهتر مفهوم افت سرمایه، یک مثال عددی در ادامه آمده است. فرض کنید ارزش یک سبد سهام خاص، در آغاز سرمایه‌گذاری ۱۰۰ میلیون دلار و در انتهای ماه اول سرمایه‌گذاری به ۱۲۰ میلیون دلار برسد در این صورت افت سرمایه این سبد سهام صفر

است. ولیکن اگر ارزش سبد سهام در انتهای ماه دوم به ۸۰ میلیون دلار برسد در این صورت افت سرمایه این سبد ۴۰=۸۰-۱۲۰ میلیون دلار خواهد بود یا به عبارتی افت سرمایه این سبد سهام برابر ٪۳۳/۳ است.

برای مدل‌سازی سنجه ریسک افت سرمایه در معرض خطر، ابتدا متغیرهای مربوطه معرفی می‌شوند:

تعداد سناریوهای آتی	S
تعداد سهام	n
سطح اطمینان موردنظر	α
بازده سهم i ام در دوره t ام	r_{it}
بردار متغیر تصمیم‌گیری (نسبت سرمایه‌گذاری در سهم i ام)	X_i
بازده انتظاری سهم i ام	μ_i
حداقل بازده موردنظر سرمایه‌گذار	E_o

با توجه به نمادهای فوق، افت میزان سرمایه‌بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\underset{1\le k\le j}{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{k}r_{ti})x_i\right\}-\left\{\sum_{i=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{j}r_{ti})x_i\right\} \tag{1}$$

افت سرمایه در معرض خطر مشروط به‌صورت امید ریاضی ارزش بدترین $1-\alpha$ درصد افت‌های سرمایه تعریف می‌شود. به این معنی که میانگین بدترین میزان افت سرمایه‌ها در دوره‌های مختلف محاسبه می‌شود. این محاسبه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$CDaR_\alpha(x,\eta)=\eta+(1-\alpha)^{-1}\sum_{j=1}^{s}\left[f(x,j)-\eta\right]^+ \tag{2}$$

به‌طوری‌که η آستانه متجاوز شده از $(1-\alpha)s$ از افت سرمایه بوده و نماد اندیس مثبت در انتهای رابطه (۲) بیانگر $z^+=\max\{z,0\}$ می‌باشد.

زمانی که بازده‌های آتی بر اساس سناریوهای مختلف وجود داشته باشد در این صورت مدل میانگین افت سرمایه در معرض خطر مشروط به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی و به‌صورت زیر توسعه پیدا می‌کند.

$$Min\ \ \eta+\frac{1}{(1-\alpha)s}\sum_{k=1}^{s}(y_k) \tag{3}$$

$s.t.$

$$y_k\ge\left\{\sum_{j=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{V}r_{tj})x_j\right\}-\left\{\sum_{j=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{k}r_{tj})x_j\right\}-\eta \tag{4}$$

$$y_k\ge 0 \qquad k=1,2,\ldots,s \tag{5}$$

$$x'\mu\ge E_o \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \tag{7}$$

$$x \geq 0 \tag{8}$$

رابطه شماره (۳) بیانگر تابع هدف مدل بوده و به‌اندازه‌گیری ارزش افت سرمایه در معرض خطر می‌پردازد. محدودیت (۴) در ارتباط با اندازه‌گیری میانگین بدترین افت سرمایه‌ها در طول دوره زمانی می‌باشد. محدودیت (۵) نشان می‌دهد که میانگین بدترین افت سرمایه‌ها باید به‌صورت اعداد مثبت باشند. محدودیت (۶) بیان می‌کند میانگین بازده سبد سهام باید بزرگ‌تر از سطح بازده انتظاری سرمایه‌گذار باشد. محدودیت (۷) تضمین می‌کند مجموع متغیرهای تصمیم (نسبت‌های سرمایه‌گذاری) باید برابر یک باشد و محدودیت (۸) بیان می‌کند که فروش استقراضی مجاز نیست و نسبت سرمایه‌گذاری در سهام باید غیر منفی باشد.

در ادامه و در بخش بعد توسعه این مدل در شرایط عدم قطعیت داده‌ها و با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار ارایه می‌شود.

۳ بهینه‌سازی استوار مدل میانگین-افت سرمایه در معرض خطر مشروط

در این بخش، با استفاده از رویکرد استوار برتسیماس و سیم، یک مدل استوار برای مساله سبد سهام در شرایط عدم قطعیت توسعه داده می‌شود. از خصوصیات این رویکرد این است که اگر مدل اسمی به‌صورت برنامه‌ریزی خطی باشد در این صورت مدل همتای استوار نیز به‌صورت برنامه‌ریزی خطی باقی خواهد ماند. ضمنا، مجموعه عدم قطعیت در رویکرد برتسیماس و سیم به‌صورت بازه‌ای می‌باشد و فرض می‌شود که تنها تعداد محدودی از داده‌های غیرقطعی می‌توانند مقادیر مربوط به کران بالایی و یا پایینی خود را بگیرند.

با توجه به این توضیحات، شرایطی را در نظر بگیرید که مجموعه عدم قطعیت به‌صورت زیر باشد:

$$z = \left\{ \zeta \in R^{L} : \|\zeta\|_{\infty} = \max_{l} |\zeta_{1}| \leq 1, \|\zeta\|_{l} = \sum_{l} |\zeta_{l}| \leq \gamma \right\} \tag{9}$$

که γ، $l \leq \gamma \leq L$ یک بودجه عدم قطعیت داده‌شده می‌باشد، در این شرایط همتای استوار به‌صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{l=1}^{L} |z_{l}| + \gamma \max_{l} |w_{l}| + [a^{\cdot}]^{T} x \leq b^{\cdot} \tag{10}$$

$$z_{l} + w_{l} = b^{l} - [a^{l}]^{T} x, \qquad l = 1, \ldots, L \tag{11}$$

در مدل ارایه‌شده و با توجه به شرایط واقعی بازار، بازده سهام ($\mu_{j}, j \in J_{\cdot}$) به‌صورت داده‌هایی در شرایط عدم قطعیت لحاظ شده و در این صورت $\tilde{\mu}_{j}$ در بازهٔ $[\mu_{j} - \hat{\mu}_{j}, \mu_{j} + \hat{\mu}_{j}]$ تعریف می‌شوند. در اینجا و برای توسعه مدل استوار، پارامتر Γ معرفی‌شده و در بازهٔ $[0, |J_{o}|]$ مقدار می‌گیرد. نقش پارامتر Γ تعدیل استواری مدل ارایه‌شده در مقابل سطح محافظه‌کاری جواب می‌باشد. به‌طور ساده‌تر، خیلی بعید است که تمام $\mu_{j}, j \in J_{o}$ تغییر کنند. هدف این است که مدل را در مقابل تمام حالاتی که بیش‌تر از $\lfloor \Gamma \rfloor$ تغییر می‌کنند محافظت شود و یک ضریب μ_{v} به‌صورت $(\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)\hat{\mu}_{v}$ تغییر کند. به‌عبارت‌دیگر، زیرمجموعه‌ای از ضرایب تغییر می‌کنند و بر

جواب تأثیر می‌گذارند. در این رویکرد، اگر تغییرات در حد $\lfloor \Gamma \rfloor$ باشد جواب حتماً شدنی خواهد بود و اگر بیش‌تر از $\lfloor \Gamma \rfloor$ تغییر کند، با احتمال قوی جواب همچنان شدنی خواهد بود. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها در مساله انتخاب سبد سهام به‌وسیله بهینه‌سازی استوار مدل زیر توسعه می‌یابد.

$$Min\ \eta + \frac{1}{(1-\alpha)s}\sum_{k=1}^{s}(y_k) \tag{۱۲}$$

$s.t.$

$$y_k \geq \left\{\sum_{j=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{V} r_{tj})x_j\right\} - \left\{\sum_{j=1}^{n}(1+\sum_{t=1}^{k} r_{tj})x_j\right\} - \eta \tag{۱۳}$$

$$y_k \geq 0 \qquad k = 1,2,\ldots,s \tag{۱۴}$$

$$-x'\mu + \underset{\left\{S_o\{v\} \middle| S_o \subseteq J_o, |S_o| = \lfloor \Gamma_o \rfloor v \in J_o \setminus S_o\right\}}{Max} \left\{\sum_{j \in S_o} \hat{\mu}_j |x_j| + (\Gamma_o - \lfloor \Gamma_o \rfloor)\hat{\mu}_v |x_j|\right\} \leq -E_o \tag{۱۵}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{۱۶}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{۱۷}$$

اگر Γ به‌صورت عدد صحیح انتخاب شود، آنگاه:

$$B_o(x,\Gamma_o) = \underset{\{s_o | s_o \subseteq J_o, |s_o| = \Gamma_o\}}{Max}\left\{\sum \hat{\mu}_j |x_j|\right\} \tag{۱۸}$$

برای تبدیل روابط (۱۲) تا (۱۷) به محدودیت‌های خطی به گزاره زیر نیاز داریم، اگر بردار x^* جواب بهینه باشد آنگاه:

$$B_o(x^*,\Gamma_o) = \underset{\left\{s_o\{v\} | s_o \subseteq J_o, |s_o| = \lfloor \Gamma_o \rfloor, v \in J_o \setminus s_o\right\}}{Max}\left\{\sum_{j \in s_o} \hat{\mu}_j |x_j^*| + (\Gamma_o - \lfloor \Gamma_o \rfloor)\hat{\mu}_v |x_j^*|\right\} \tag{۱۹}$$

گزاره فوق برابر است با تابع هدف مدل بیشینه‌سازی زیر:

$$B_o(x^*,\Gamma_o) = Max \sum_{j \in J_o} \hat{\mu}_j |x_j^*| z_j \tag{۲۰}$$

$$\sum_{j \in J_o} Z_j \leq \Gamma_o \tag{۲۱}$$

$$0 \leq Z_j \leq 1 \qquad \forall j \in J_o \tag{۲۲}$$

اگر دوگان مدل فوق را داشته باشیم، مدل زیر حاصل می‌شود:

$$Min \sum_{j \in J_o} P_j + \Gamma_o z_o \tag{۲۳}$$

$$Z_o + P_j \geq \hat{\mu}_j \left|x_j^*\right| \quad \forall j \in J_o \qquad (۲۴)$$

$$P_j \geq ۰ \quad \forall j \in J_o \qquad (۲۵)$$

$$Z_o \geq ۰ \qquad (۲۶)$$

به کمک قضیه دوگان می‌توان اثبات نمود ازآنجایی‌که مدل (۲۰) تا (۲۲) اگر $\Gamma_o \in \left[۰, \left|J_o\right|\right]$ دارای جواب بهینه و محدود است پس مدل (۲۳) تا (۲۶) نیز دارای جواب بهینه و محدود است و می‌توان مدل دوگان را در مساله اسمی جایگذاری نمود. در این صورت مدل استوار به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$Min \;\; \eta + \frac{۱}{(۱-\alpha)s}\sum_{k=۱}^{s}(y_k) \qquad (۲۷)$$

$s.t.$

$$y_k \geq \left\{\sum_{j=۱}^{n}(۱+\sum_{t=۱}^{V} r_{tj})x_j\right\} - \left\{\sum_{j=۱}^{n}(۱+\sum_{t=۱}^{k} r_{tj})x_j\right\} - \eta \qquad (۲۸)$$

$$y_k \geq ۰ \qquad k = ۱,۲,\ldots,s \qquad (۲۹)$$

$$-\sum_{j=۱}^{n}\mu_j x_j + z_o\Gamma_o + \sum_{j=۱}^{n} P_j \leq -E_o \quad for\, t = ۱,\ldots,T, \quad i = ۱,\ldots,m \qquad (۳۰)$$

$$z_o + P_j \geq \hat{\mu}_j w_j \qquad (۳۱)$$

$$-w_j \leq x_j \leq w_j, \quad w_j \geq ۰ \quad j = ۱,\ldots,N \qquad (۳۲)$$

$$\sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱ \qquad (۳۳)$$

$$x_i \geq ۰, \qquad i = ۱,۲,\ldots,n \qquad (۳۴)$$

$$P_j \geq ۰ \quad \forall j \in J_o, \quad Z_o \geq ۰ \qquad (۳۵)$$

مدل ارایه‌شده فوق، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بوده و این قابلیت را دارد که عدم قطعیت داده‌ها که به‌صورت مجموعه عدم قطعیت بازه‌ای می‌باشند را در نظر بگیرد. این مدل همان‌طور که اشاره شد یک مدل برنامه‌ریزی خطی است و می‌توان این مدل را نرم‌افزارهای رایج تحقیق در عملیات به‌راحتی حل نمود.

٤ نتایج محاسباتی و بحث

در این بخش و برای بررسی کارایی مدل توسعه‌یافته، مدل بر روی مساله‌ای از بازار بورس اوراق بهادار تهران مطرح می‌شود. همچنین به بررسی و بحث در زمینه نتایج این تحقیق پرداخته می‌شود. بدین منظور، تعداد ۲۰ سهم از صنعت سیمان در بازه زمانی اسفند ۱۳۹۱ تا اسفند ۱۳۹۲ موردمطالعه قرارگرفته است. داده‌ها به‌صورت ماهانه در نظر گرفته‌شده و لذا برای هر سهم ۱۲ دوره زمانی تعریف می‌شود. خلاصه اطلاعات مربوط به بازده سهام موردنظر در ۱۲ دوره‌زمانی در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱. خلاصه داده‌های مربوط به مثال بازار بورس اوراق بهادار تهران

دوره سهام	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۰	۰/۰۴	-۰/۰۴	۰/۲	-۰/۰۵	-۰/۰۴	۰	۰/۰۰۸	۰/۰۳	-۰/۰۱	-۰/۰۲	-۰/۰۴
۲	۰/۱۵۱	۰/۴۴۴	۰/۲۲۶	۰/۰۹	۰/۰۴۶	-۰/۱	۰/۱۰۱	-۰/۰۱	۰/۱۹	-۰/۱	-۰/۱	-۰/۰۱
۳	۰.۰۰۰۳	۰/۳۳۳	۰/۴۱۱	۰/۳۴	۰/۳۵	۰/۰۷۱	۰/۰۹۸	-۰/۰۲	-۰/۰۷	۰/۲۱۷	-۰/۱۳	۰/۰۲۶
۴	۰/۰۱۸	۰/۱۴۶	۰/۴۶۲	۰/۰۸	۰/۰۴۴	-۰/۰۸	۰/۱۱۴	۰/۰۶۴	۰/۱۸۲	-۰/۰۳	-۰/۰۵	۰
۵	۰/۰۵۷	۰/۳۰۱	۰	۰/۲۵	۰/۰۲۵	-۰/۱	۰/۰۲۹	۰/۰۱۸	۰/۰۸۳	-۰/۰۷	-۰/۰۶	-۰/۰۲
۶	۰/۰۲	۰/۷۲۶	۰/۲۴۸	۰/۰۵	-۰/۰۳	-۰/۱۶	۰/۰۵۵	۰/۱۹	۰/۳۴۱	-۰/۰۷	-۰/۱۷	-۰/۱۳
۷	۰/۱۲۶	۰/۴۱۹	۰/۵۶	۰/۰۳	۰/۲۶۶	-۰/۱۷	۰/۰۱۹	-۰/۰۱	۰/۳۹۵	-۰/۰۴	-۰/۰۴	۰
۸	۰/۰۱۸	۰/۲۹۴	۰/۱۴۸	۰/۹۷	۰/۰۸۱	۰	-۰/۱	۰/۰۲۱	۰/۲۳	۰/۰۲۸	-۰/۰۶	۰
۹	۰/۰۴۷	۰/۰۵۸	۰/۰۵۸	۰/۲۱	-۰/۰۷	-۰/۱۴	۰/۱۱۳	-۰/۰۶	۰/۲۸۸	-۰/۱۸	-۰/۳۹	-۰/۱
۱۰	۰/۴۰۲	۰/۰۵۳	۰/۳۸	۰/۱۴	-۰/۰۲	-۰/۱۴	-۰/۰۲	۰/۰۴۹	۰/۵۴۴	-۰/۱۳	۰/۰۳۹	-۰/۰۱
۱۱	۰/۱۵۶	۰/۳۶۹	۰/۱۲۱	۰/۲۱	-۰/۰۵	-۰/۰۳	۰/۰۵۲	۰/۱۰۳	۰/۴۱۲	-۰/۱۸	-۰/۱۵	-۰/۰۸
۱۲	۰/۰۹	۰/۰۴	۰/۰۴۱	۰/۴۶	-۰/۰۸	-۰/۱۱	۰/۰۸۱	-۰/۰۴	۰/۲۴۱	-۰/۰۴	-۰/۱۴	۰/۰۰۹
۱۳	۰/۱۵۱	۰/۳۱۱	۰/۳۰۹	۰/۲۶	-۰/۰۱	-۰/۱۳	۰/۱۳۱	۰/۳۶۴	۰/۱۷۸	-۰/۱	-۰/۱۱	-۰/۱۳
۱۴	۰/۱۲۱	۰/۴۲۹	۰/۰۱	۰/۱۱	۰/۰۰۰۷	-۰/۱۳	۰/۲۰۴	۰/۰۳۳	۰/۲۲۷	-۰/۱۳	-۰/۰۹	-۰/۰۱
۱۵	۰/۱۵۷	۰/۲۴۵	۰/۲۷۱	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۰/۱۳	۰/۰۹۲	-۰/۰۳	۰/۰۶۱	-۰/۱۱	-۰/۱۱	۰
۱۶	۰/۲۷۶	۰/۱۷۵	۰/۴۶۳	۰/۱۹	-۰/۱	-۰/۱۸	۰/۱۳۲	۰/۲۰۳	۰/۱۷۶	-۰/۲	-۰/۰۷	-۰/۰۷
۱۷	۰/۰۱۱	۰/۰۱۲	۰/۰۰۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۰۰۰۴
۱۸	۰/۰۰۲	-۰/۲۵۷	۰	۰/۴۲	۰/۳۶۷	-۰/۱۶	۰/۱۲	۰/۱۰۶	-۰/۱۱	۰/۰۴۲	-۰/۰۲	۰
۱۹	۰	۰	-۰/۰۵	۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰/۲۵۹	-۰/۱۸	-۰/۱۷	-۰/۱۲
۲۰	۰/۰۰۳	۰/۰۲۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۵	۰/۰۰۳	۰/۰۰۷	۰	۰/۰۰۴	۰	۰	۰/۰۱۷	۰/۰۱۴

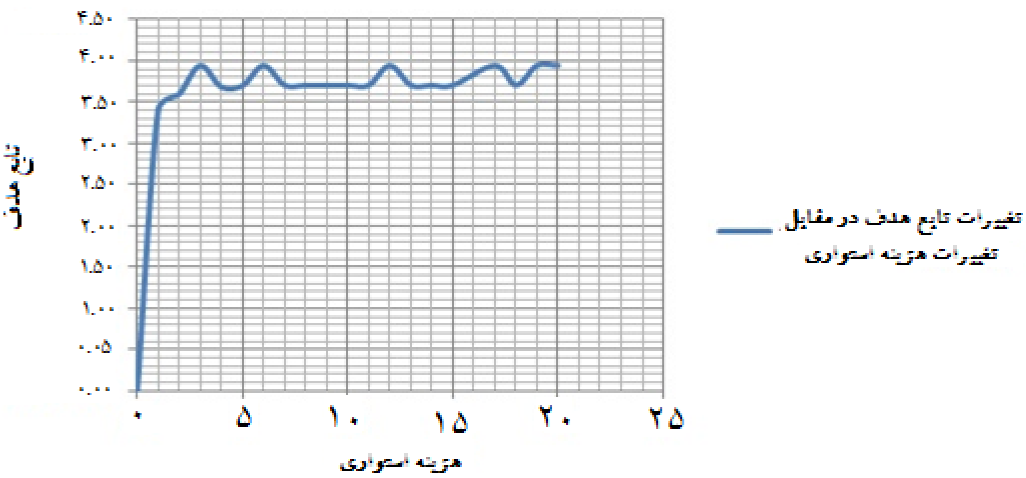
داده‌های فوق داده‌های تاریخی بوده و از این داده‌ها با همین الگو برای تشکیل سبد بهینه سهام استفاده می‌شود. لیکن در برآورد بازده مورد انتظار هریک از سهام، باید عدم قطعیت مربوطه را لحاظ نمود، ازاین‌رو برای در نظرگیری این عدم قطعیت از رویکرد استوار برای مدل‌سازی استفاده‌شده و یک نوسان ۲۰ درصدی (متوسط نوسان ماهانه) لحاظ می‌شود. سپس مدل استوار مربوطه با استفاده از روابط (۲۷) الی (۳۵) توسعه می‌یابد که با توجه به خطی بودن مدل حاصله، به کمک یکی از نرم‌افزارهای رایج حل مسایل تحقیق در عملیات، مدل حل و نتایج جدول ۲ حاصل می‌شود.

جدول ۲. نتایج حل مساله

بازده سبد سهام بهینه	مقدار تابع هدف (افت سرمایه در معرض خطر مشروط)	Γ
۰/۱۲	۰/۰۰۰۲۸۸	۰
۰/۱۴۰۴	۳/۴۰۳۱۷۶	۱
۰/۱۴۰۴	۳/۵۹۳۶۶۴	۲
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۳
۰/۱۴۰۴	۳/۶۸۱۱۱۲	۴
۰/۱۴۰۴	۳/۶۹۹۱۱۷	۵
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۶
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۷	۷
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۸
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۲۹	۹
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۱۰
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۲۹	۱۱
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۱۲
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۱۳
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۱۴
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۱۵
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۱۷
۰/۱۴۰۴	۳/۷۰۳۱۳۶	۱۸
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۱۹
۰/۱۲	۳/۹۴۳۰۰۳	۲۰

همان‌طور که در جدول فوق مشخص است افزایش هزینه استواری به مفهوم افزایش سطح محافظه‌کاری می‌باشد و درنتیجه موجب می‌شود تابع هدف افزایش یابد. تابع هدف از نوع کمینه‌سازی بوده و به معنی ریسک است ؛اما با افزایش سطح محافظه‌کاری و درنتیجه نوسان پارامترها مقدار آن بدتر می‌شود. شکل ۱ به‌خوبی این تغییر تابع هدف را در مقابل تغییرات هزینه استواری نمایش می‌دهد.

با استفاده از مدل ارایه‌شده در این مقاله می‌توان بهترین جواب ممکن (جواب بهینه) را در بدترین شرایط ممکن (حداکثر نوسان داده‌ها) یافت. در واقع می‌توان اطمینان داشت که ریسک سبد سهام در یک سطح محافظه‌کاری مشخص از مقادیر ارایه‌شده بدتر نخواهد شد و بهترین حالت ممکن در بدترین شرایط نوسان داده‌ها ارایه می‌گردد. به‌عبارتی‌دیگر، سرمایه‌گذاران ریسک گریز تمایل دارند سبد بهینه‌ای تحت بدترین شرایط ممکن را داشته باشند که مدل ارایه‌شده در این مقاله می‌تواند پاسخی به این نیاز باشد.



شکل ۱. تغییرات تابع هدف در مقابل هزینه استواری

از طرفی دیگر، تفاوت بین مدل استوار با مدل قطعی در جدول نتایج تحقیق به‌صورت تفاوت در ردیف اول با سایر ردیف‌ها بیان می‌شود. ردیف اول جدول ۲ نتیجه حل مدل در شرایط قطعی بوده و سایر ردیف‌ها نتایج حل مدل در شرایط عدم قطعیت می‌باشد. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد در شرایط لحاظ عدم قطعیت داده‌ها و با افزایش سطح محافظه‌کاری و همچنین افزایش هزینه استواری، بازده انتظاری سبد سهام در جواب بهینه افزایش می‌یابد؛ اما از طرف دیگر مقدار تابع هدف که درواقع بیانگر ریسک می‌باشد نیز با افزایش سطح هزینه استواری افزایش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان در افزایش نوسان داده‌ها جستجو کرد، هر چه نوسان بازده سهام بیش‌تر باشد میزان ریسک نیز افزایش پیدا می‌کند؛ اما از طرفی بازده انتظاری نیز بیش‌تر می‌شود. این نتایج قابل پیش‌بینی بوده است به این معنی که در تحقیقات برتسیماس و سیم نشان داده‌شده که با افزایش هزینه استواری و افزایش سطح محافظه‌کاری مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود و بعد از مقدار معینی همگرا می‌شود. در تفسیر این همگرایی می‌توان به ماهیت ریاضی مدل استوار اشاره نمود. در بهینه‌سازی استوار یک تعادل بین بهینگی و شدنی بودن مساله در شرایط نوسان داده‌ها وجود دارد. با افزایش نوسان داده‌ها امکان رسیدن به ناحیه نشدنی وجود داشته؛ اما ماهیت بهینه‌سازی استوار مانع از این امر شده و درنتیجه از یک سطح معینی به بعد مقدار تابع هدف و جواب به یک مقدار ثابت همگرا می‌شوند.

۵ نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله، مساله انتخاب سبد سهام با در نظرگیری عدم قطعیت داده‌های ورودی موردبررسی قرار گرفت. سنجه ریسک استفاده‌شده در این مقاله، افت سرمایه در معرض خطر مشروط می‌باشد که جزو جدیدترین و به‌روزترین سنجه‌های ریسک در مسایل سرمایه‌گذاری می‌باشد. جهت در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم استفاده شد. مدل ارایه‌شده در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی و دارای برتری‌های محاسباتی می‌باشد. مدل ارایه‌شده، نشان می‌دهد درصورتی که سطح محافظه‌کاری افزایش یابد مقدار تابع هدف افزایش می‌یابد. همچنین این مدل بهترین سبد سهام ممکن را در بدترین حالت نوسان داده‌ها

ارایه می‌دهد. از مهم‌ترین ویژگی‌های این مدل می‌توان به برنامه‌ریزی خطی بودن اشاره نمود که باعث می‌شود این مدل به‌راحتی به کمک نرم‌افزارهای رایج تحقیق در عملیات قابل‌حل باشند.

سپاسگزاری

این مقاله بخشی از یک طرح پژوهشی می‌باشد که با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین بر اساس مجوز شماره ۱۴۱-۹۲ شورای پژوهشی واحد، انجام‌شده است.

منابع

[۲۲] خیامیم، آ.، میرزازاده، ا.، نادری، ب.، (۱۳۹۳). یک مدل فازی برای به‌روزرسانی پورتفوی با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی: پیاده‌سازی در بورس اوراق بهادار تهران. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۲)، ۷۵-۹۳.

[۲۳] حافظی، ر.، شهرابی، ج.، هداوندی، ا.، (۱۳۹۲). توسعه مدلی ترکیبی برای پیش‌بینی بازار سهام تهران. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰(۲)، ۳۵-۴۹.

[۲۴] قندهاری، م.، فغانی، ف.، طباطبایی، س.، (۱۳۹۱). مدل‌سازی آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با گشتاورهای بالا. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۴)، ۵۵-۶۹.

[1] Markowitz, H., (1952). Portfolio selection. The journal of Finance, 7(1), 77-91.
[2] Markowitz, H., (1959). Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York.
[3] Konno, H., Yamazaki, H., (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37(5), 519-531.
[4] Michalowski, W., Ogryczak, W., (2000). Extending the MAD portfolio optimization model to incorporate downside risk aversion. Naval Research Logistics, 48(3), 185-200.
[5] Linsmeier, T. J., Pearson, N. D., (2000).Value at risk. Financial Analysts Journal, 56(2), 47-67.
[6] Rockafellar, R. T., Uryasev, S., (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.
[7] Mansini, R., Ogryczak, W., Speranza, M. G., (2003). LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison. IMA Journal of Management Mathematics, 14(3), 187-220.
[8] Chekhlov, A. V., Uryasev, S., Zabarankin, M., (2000). Portfolio optimization with drawdown constraints.: Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida.
[9] Krokhmal, P., Uryasev, S., Zrazhevsky, G., (2003). Numerical comparison of CVaR and CDaR approaches: Application to hedge funds. The Stochastic Programming Approach to Asset-Liability and Wealth Management. AIMR/Blackwell.
[10] Soyster, A. L., (1973). Technical note—convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations research, 21(5), 1154-1157.
[11] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. Operations research letters, 25(1), 1-13.
[12] El Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM Journal on Optimization, 9(1), 33-52.
[13] Bertsimas, D., Sim, M., (2004). The price of robustness. Operations research, 52(1),35-53.
[14] Ben-Tal, A., Margalit, T., Nemirovski, A., (2000), Robust modeling of multi-stage portfolio problems, in High performance optimization. Springer, 303-328.
[15] Moon, Y., Yao, T., (2011). A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization. Computers & Operations Research, 38(9), 1251-1258.
[16] Quaranta, A. G., Zaffaroni, A., (2008). Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection. Journal of Banking & Finance, 32(10), 2046-2056.
[17] Ghahtarani, A., Najafi, A. A., (2013). Robust goal programming for multi-objective portfolio selection problem. Economic Modelling, 33, 588-592.
[18] Zhu, S., Fukushima, M., (2009). Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. Operations research, 57(5), 1155-1168.

[19] Chen, W., Tan, S., (2009). Robust portfolio selection based on asymmetric measures of variability of stock returns. Journal of computational and applied mathematics, 232(2), 295-304.

[20] Ling, A. F, Xu, C. X., (2012). Robust portfolio selection involving options under a “marginal+ joint” ellipsoidal uncertainty set. Journal of Computational and Applied Mathematics, 236(14), 3373-3393.

[21] Pınar, M. Ç., Burak Paç, A., (2014). Mean semi-deviation from a target and robust portfolio choice under distribution and mean return ambiguity. Journal of Computational and Applied Mathematics, 259, 394-405.