

## تبدیل مدل غیر خطی شعاعی در حضور خروجی‌های نامطلوب، به مدل‌های خطی خروجی‌های غیر اختیاری

محمد رضا علیرضائی<sup>۱</sup>، محمد خیری چاری<sup>۲\*</sup>

۱- عضو هیات علمی دانشکده علوم، دانشگاه علم و صنعت

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت

رسید مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۲

پذیرش مقاله: ۱۸ شهریور ۱۳۹۲

### چکیده

امروزه ارزیابی کارایی سازمان‌ها و دانستن این که سازمانی تا چه اندازه مفید می‌باشد برای آن سازمان و حتی سهام‌دارانش بسیار اهمیت دارد. یکی از روش‌های اندازه‌گیری کارایی، استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. در ارزیابی به روش تحلیل پوششی داده‌ها هدف افزایش خروجی‌ها و کاهش ورودی‌ها و مقایسه بین واحدهای تحت بررسی است. در اغلب فرآیندها به همراه تولید خروجی‌ها، خروجی‌هایی تولید می‌شوند که افزایش آن‌ها نه تنها سودآور نیست؛ بلکه باعث زیان نیز می‌شود. به همین خاطر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها می‌بایست طوری ارایه می‌شدند که میزان تأثیر این نوع خروجی‌ها را در کارایی و رتبه‌بندی با خود داشته باشند. در این مقاله ابتدا مدل شعاعی غیرخطی فار ارایه شده، سپس با استفاده از تبدیلات ریاضی نشان داده شده که می‌توان آن مدل را به یک مدل با خروجی‌های غیرقابل کنترل خطی، تبدیل نمود.

**کلمات کلیدی:** خروجی‌های نامطلوب، خروجی‌های غیر اختیاری، اصل دسترسی‌پذیر، مدل فار.

### ۱ مقدمه

بشر از ابتدا به دنبال سود بیشتر در کارهایش بود لذا هیچ‌گاه به دنبال کم کردن ورودی عملیات خود نبوده است. ولی در گذر زمان سازمان‌های مختلف کارهای مشابه هم انجام می‌دادند لذا هر سازمان برای سودآوری بیشتر و ایجاد رفاه در جامعه، هم‌چنین باقی ماندن در فضای رقابت به دنبال کم کردن ورودی و افزایش خروجی‌ها بودند. با گذشت زمان، روش‌های اندازه‌گیری بهره‌وری به وجود آمد. در روش‌های اولیه با استفاده از نسبت خروجی‌ها بر روی ورودی‌ها میزان کارایی و بهره‌وری را اندازه‌گیری می‌کردند اما در این نوع روش‌ها نیازمند شاخص‌های عددی از قبل برای هر ورودی و خروجی در نظر گرفته شده، سپس با استفاده از شاخص‌های عددی و روش‌های رگرسیون آماری به محاسبه کارایی و بهره‌وری می‌پرداختند. در ادامه این پیشرفت‌ها روش‌های جدیدی برای محاسبه دو شاخص کارایی و بهره‌وری ابداع شد که یکی از این روش‌ها، روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس پست الکترونیکی: kheirichari@mathdep.iust.ac.ir

می‌باشد. DEA (Data Envelopment Analysis) از مدل‌های ریاضی برای محاسبه شاخص‌های عددی استفاده نموده؛ سپس با استفاده از شاخص‌های به دست آمده دو شاخص کارایی و بهره‌وری را محاسبه می‌نماید [۱]. در مدل‌های DEA هدف کاهش ورودی و افزایش خروجی و در نتیجه افزایش کارایی می‌باشد. معمولاً در هر فرآیند تولیدی، مسایل و محدودیت‌هایی وجود دارد که سازمان یا نهاد مورد نظر به خاطر سودآوری و یا صرفه‌جویی بیشتر در وقت، آن‌ها را در نظر نمی‌گیرند. برای مثال می‌توان به خروجی‌های بدی که به همراه خروجی‌های خوب سازمان به وجود می‌آیند، اشاره نمود. می‌دانیم که این نوع خروجی‌ها باید در محاسبه میزان کارایی و بهره‌وری هر سازمان با نهاد تأثیرگذار باشد لذا باید مدل‌هایی ارائه شود که علی‌رغم کاهش ورودی و افزایش خروجی، خروجی‌های نامطلوب را کاهش دهد [۱].

در بخش بعدی به پیشینه مقالات و کارهایی که در زمینه خروجی‌های نامطلوب می‌پردازیم. بخش سه شامل اصول و تعاریف لازم، برای درک بهتر شما از این مقاله، به همراه چند مثال ساده می‌باشد. در بخش چهار به ارائه مدل غیرخطی فار پرداخته، سپس چگونگی تبدیل آن را به مدل خطی با خروجی غیرانتزاعی شرح می‌دهیم. در بخش پنج نتایج مورد نظر خود را در چند بند بیان می‌کنیم و در انتها منابع استفاده‌شده را برای تهیه این مقاله مورد بازدید قرار می‌دهیم.

## ۲ ادبیات مرور

در زمینه خروجی‌های نامطلوب ابتدا کپمن در سال ۱۹۵۱ مدلی را برای برخورد با خروجی‌های نامطلوب ارائه داد که همان مدل جمعی می‌باشد. او با در نظر گرفتن علامت منفی برای خروجی‌های نامطلوب مدل خود را ارائه نمود [۲]. سپس پیتمن با استفاده از «قیمت‌های سایه» به توجیه هزینه‌ی اقتصادی خروجی‌های نامطلوب پرداخت. او در این مقاله از مدل‌های پارامتریک و هم‌چنین قضیه دوگانگی استفاده کرده است [۳]. بعد از آن داگلاس در سال ۱۹۸۲ و هم‌چنین فار و گالونی در سال ۱۹۸۹ مقالاتی در مورد روش‌های برخورد با خروجی‌های نامطلوب ارائه نمودند. در همان سال چند ماه بعد از مقاله فار و گالونی، فار و همکاران مقاله‌ای در جهت بهبود خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌ها با یک رویکرد ناپارامتریک، ارائه نمودند [۴]. پس از مقاله‌ی فار و همکاران دانشمندانی هم‌چون سیفورد و الی ۱۹۹۰، فار و چونگ ۱۹۹۵، سیفورد و الی ۲۰۰۱، پاستور ۲۰۰۱، لول، اسپیل ۲۰۰۰، در گسترش روش‌های برخورد با خروجی‌های نامطلوب و برگرفته از این مقاله ارائه داده‌اند [۵]. شاید بتوان گفت مقاله‌ی فار و همکاران شالوده و باعث ایجاد شاخه‌های متعدد در نحوه‌ی برخورد با خروجی‌های نامطلوب شده است.

## ۳ پیش‌نیازها

هر سازمان با توجه به منابع و سرمایه و نیروی کاری که دارد می‌تواند ترکیب‌های مختلف از خروجی‌ها را تولید کند که به مجموعه این ترکیب‌ها مجموعه امکان تولید گفته می‌شود که آن را با PPS (Production Possibility Set) نشان می‌دهیم. واضح است اگر مجموعه امکان تولید را داشته باشیم طبق فرآیندی ساده مرز آن را محاسبه؛

تابع تولید را تخمین می‌زنیم و اگر هم تابع تولید را داشته باشیم با استفاده از تابع و این که تمام جهت‌هایی که کمتر از تابع تولید هستند می‌توانند رخ دهند به راحتی می‌توان مجموعه امکان تولید را محاسبه نمود. با توجه به پنج اصل اصول موضوعه مجموعه امکان تولید به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$PPS = \left\{ (X, Y) : Y \leq \lambda Y^o, \right. \\ \left. \lambda X \leq X_o \quad \lambda \in R_+^n \right\} \quad (1)$$

در این مقاله نیز رشد تمام واحدهای تصمیم‌گیری را به صورت DMU (Decision-Making Units) نوشته‌ایم. هم‌چنین در تمام این مقاله فرض کنید  $j = 1, \dots, n$  تعداد DMU ها و  $i = 1, \dots, m$  تعداد ورودی‌های هر DMU و  $r = 1, \dots, s$  تعداد خروجی‌های هر DMU باشد. لذا برای ماتریس ورودی‌ها و ماتریس خروجی به ترتیب خواهیم داشت:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{s1} & \cdots & x_{sn} \end{bmatrix}_{s \times n} \quad (2)$$

### ۳-۱ خروجی نامطلوب

خروجی‌هایی بدی هستند که به همراه خروجی‌های اصلی (خوب) تولید می‌شوند و معمولاً بنا بر ماهیتی که دارند به دست آوردن قیمت آن‌ها در بازار کار آسانی نیست لذا برای محاسبه قیمت، از نظر کارشناسان خبره بهره می‌گیرند یا اغلب به وسیله‌ی قیمت‌های سایه استفاده می‌کنند. برای مثال فرض کنیم بخواهیم کاغذ تولید کنیم. خروجی‌هایی مانند اکسیژن بیوشیمیایی، جامدات معلق، اکسیدهای گوگرد و ذرات، همگی به همراه کاغذ تولید می‌شوند [۴] که محاسبه قیمت این خروجی‌ها در باز امکان‌پذیر نیست. البته منظور از قیمت، شامل هزینه‌های که ما مجبوریم به خاطر تولید این نوع خروجی‌ها پردازیم؛ می‌باشد.

در این مقاله خروجی‌های مطلوب را با  $Y^D$  و خروجی‌های نامطلوب را با  $Y^U$  نشان می‌دهیم. هم‌چنین در تمام این مقاله فرض بر این است که  $j = 1, \dots, n$  تعداد DMU ها و  $i = 1, \dots, m$  تعداد ورودی‌های هر DMU و  $r = 1, \dots, s$  تعداد خروجی‌های هر DMU می‌باشد.

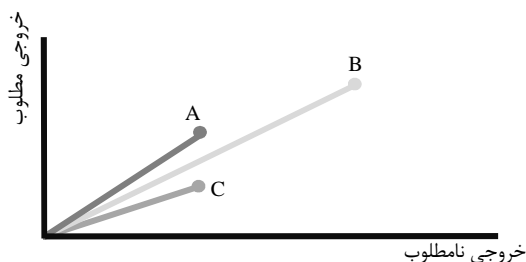
### ۳-۲ اصل دسترس‌پذیر ضعیف (Weak disposability)

در هر فرآیند به همراه خروجی‌های مطلوب خروجی‌های نامطلوب هم به وجود می‌آید. این اصل بیان می‌دارد که نمی‌توانیم مقدار خروجی‌های نامطلوب را به صفر برسانیم در حالی که خروجی مطلوب با مقدار مثبت داشته باشیم. برای مثال تولید کاغذ، بدون خروجی‌های نامطلوب مانند گوگرد و... امکان‌پذیر نیست [۴].

به عبارت دیگر این اصل نشان می‌دهد که کاهش نسبی از خروجی‌های مطلوب، به همان نسبت خروجی‌های نامطلوب را کاهش می‌دهد [۶]، یعنی:

$$(Y^D, Y^U) \in PPS \Rightarrow \forall 0 \leq \theta \leq 1 \quad (\theta Y^D, \theta Y^U) \in PPS \quad (3)$$

این اصل برای زمانی برقرار است که سازمان‌های تحت بررسی، به کم کردن تولید خروجی‌های نامطلوب اهمیت بدهند و یا این که بر اساس قوانین حاکم بر آن سازمان‌ها باید خروجی‌های نامطلوب را کاهش دهند. به راحتی از توضیح بالا می‌توان نتیجه گرفت  $(Y^D, Y^U) = (0, 0)$  یک عضو از PPS می‌باشد؛ در حالتی که یک خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب داریم می‌توان گفت که خط واصل از هر DMU به مبدأ همگی در PPS می‌باشند. فرض کنید که سه DMU داریم لذا شکل ۱ بیانگر اصل بالا می‌باشد.



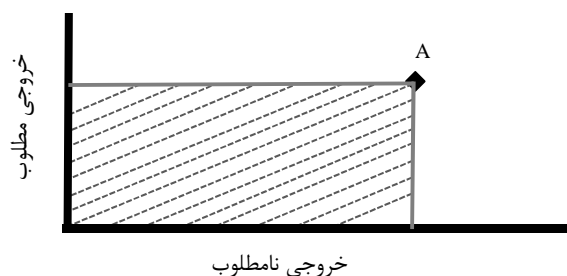
شکل ۱. میزان تاثیر اصل دسترسی پذیر ضعیف بر فضای امکان تولید سه واحد  $A, B, C$

### ۳-۳ اصل دسترسی پذیر قوی (Strong disposability)

این اصل بیان می‌کند که ممکن است افزایش خروجی‌های مطلوب داشته باشیم درحالی که خروجی‌های نامطلوب صفر باشد. این اصل فقط به افزایش خروجی‌های مطلوب اهمیت می‌دهد و به طور جدی به میزان تولید خروجی نامطلوب نگاه نمی‌کند [۴]، یعنی:

$$(Y^D, Y^U) \in PPS \Rightarrow (Y^D, 0) \in PPS \quad (4)$$

برخلاف دسترسی ضعیف این قید برای زمانی است که اجباری برای کم کردن خروجی‌های نامطلوب نداشته باشیم اما در قیود مدل این شرط را قرار می‌دهیم.



شکل ۲. میزان تاثیر اصل دسترسی پذیر قوی بر فضای امکان تولید واحد A

### ۳-۴ مجموعه امکان تولید PPS

با توجه به پذیرش اصول موضوعه، به همراه از اصول دسترسی پذیر ضعیف PPS را به صورت زیر خواهیم داشت [۴]:

$$PPS = \left\{ (Y^D, Y^U) : Y^{Do} \leq \lambda Y^D, Y^{Uo} = \lambda Y^U \right. \\ \left. \lambda X \leq X_o, \lambda \in R_+^n \right\} \quad (5)$$

و به همراه اصل دسترسی پذیر قوی:

$$PPS = \left\{ (Y^D, Y^U) : Y^{Do} \leq \lambda Y^D, Y^{Uo} \leq \lambda Y^U \right. \\ \left. \lambda X \leq X_o, \lambda \in R_+^n \right\} \quad (6)$$

### ۳-۵ خروجی های غیر اختیاری (Non-discretionary output)

خروجی های غیر اختیاری یا خروجی های غیر قابل کنترل، خروجی هایی هستند که کنترل آن ها به دست واحد تحت بررسی نمی باشد، برای مثال فرض کنید واحد تحت بررسی کتابخانه عمومی باشد. در این صورت اگر تعداد کسانی را که در یک روز به کتابخانه عمومی سطح شهر برای دریافت کتاب مراجعه می نمایند؛ به عنوان خروجی در نظر بگیریم؛ چون نمی توانیم این جمعیت را کنترل کنیم لذا یک خروجی غیر اختیاری است [۷].

Max  $\varphi$

s.t.

$$\varphi Y^{Ck} \leq \lambda Y^C, \\ Y^{UCk} \leq \lambda Y^{UC}, \\ \lambda X \leq X_k, \\ \lambda \in R_+^n. \quad (7)$$

### ۴ مدل فار و چگونگی تبدیل به یک مدل خطی

می دانیم مدل های DEA بدون حضور خروجی های نامطلوب شامل گستردگی بسیار زیادی است اما اساس این نوع مدل ها مبتنی بر مدل CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) می باشد. اگر مدل خروجی محور را در نظر بگیریم به صورت زیر است [۸]:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \varphi \\
 &s.t. \\
 &\quad \varphi Y^k \leq \lambda Y, \\
 &\quad \lambda X \leq \varphi^{-1} X_k, \\
 &\quad \lambda \in R_+^n.
 \end{aligned} \tag{8}$$

همان طور که مشاهده می شود خروجی های نامطلوب هیچ تاثیری در مدل (8) ندارند.

اما در حالت کلی با حضور خروجی های نامطلوب نحوه برخورد با این نوع خروجی ها را می توان به 5 بخش زیر تقسیم نمود [9]:

- ۱- چشم پوشی کردن از خروجی نامطلوب.
- ۲- استفاده از روش غیرخطی فار.
- ۳- استفاده خروجی نامطلوب به عنوان خروجی و محدود کردن آن ها.
- ۴- خروجی نامطلوب را به عنوان ورودی.
- ۵- کاربرد انتقال یکنواخت کاهش برای مثال  $1/Y^b$ .

در مدل هایی که خروجی های نامطلوب را در نظر می گرفتند. فار و همکاران با استفاده از مدل پایه ای DEA-CCR، یک رویکرد ناپارامتریک و با توجه به اصول دسترسی پذیر چند مدل برای کاهش خروجی های نامطلوب و افزایش خروجی های مطلوب ارائه دادند. در مقاله آن ها پنج مدل ارائه شد که یکی از آن ها بر اساس کاهش خروجی های نامطلوب و ورودی ها و همزمان افزایش خروجی های مطلوب می باشد. این مدل با اصل دسترسی پذیر قوی به صورت زیر نمایش داده می شود [4]:

$$\begin{aligned}
 &H_p^C(Y^{Dk}, Y^{Uk}, X^k) = Max \quad \varphi \\
 &s.t. \\
 &\quad \varphi Y^{Dk} \leq \lambda Y^D, \\
 &\quad \varphi^{-1} Y^{Uk} \leq \lambda Y^U, \\
 &\quad \lambda X \leq \varphi^{-1} X_k, \\
 &\quad \lambda \in R_+^n.
 \end{aligned} \tag{9}$$

با قرار دادن تساوی در قید دوم مدل 9، می توان آن را مدلی با پذیرش اصل دسترسی پذیر ضعیف تبدیل نمود. در فصل 4 بخش 2 از کتاب ری مبحثی مبنی بر اندازه گراف هذلولی گون کارایی ارائه شده است. در این بخش مدلی با استفاده از کاهش همزمان ورودی ها و افزایش همزمان خروجی ها میزان تغییرات لازم برای رسیدن به نقطه ای بهین را محاسبه می نماید که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \varphi \\
 &s.t. \\
 &\quad \varphi Y^{Dk} \leq \lambda Y^D, \\
 &\quad \lambda X \leq \varphi^{-1} X_k, \\
 &\quad \lambda \in R_+^n.
 \end{aligned} \tag{10}$$

برای خطی نمودن مدل (۱۰) از تغییر متغیر  $\delta = \varphi^z$  و  $\mu = \varphi^{\lambda}$  استفاده نموده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید مدل (۹) یک مدل غیرخطی است. همانند مدل (۱۰) با استفاده از تغییر متغیر  $\delta = \varphi^z$  و  $\mu = \varphi^{\lambda}$  مدل (۹) به مدل زیر تبدیل خواهد شد [۱۰]:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \delta \\ & \text{s.t.} \\ & \delta Y^{Dk} \leq \mu Y^D, \\ & Y^{Uk} \leq \mu Y^U, \\ & \mu X \leq X_k, \\ & \mu \in R_+^n. \end{aligned} \tag{11}$$

که با توجه به ساختار مدل (۱۱) به راحتی می‌توان دید مدل (۹) به یک مدل خطی در حضور خروجی‌های غیر اختیاری تبدیل شده است. نشان دادیم مدل شعاعی فار را می‌توان به صورت یک مدل خطی در آورده؛ سپس مقدار آن را محاسبه نمود.

برای درک بهتر داده‌های جدول ۱ را در نظر گرفته؛ با استفاده از دو مدل بالا مقدار بهینه برای هر واحد محاسبه، سپس مقادیر به دست آمده را در جدول ۲ نمایش. لازم به ذکر است داده‌های جدول یک مربوط به هیچ سازمان و محیطی نمی‌باشد.

جدول ۱. داده‌ها

	واحد ۱	واحد ۲	واحد ۳	واحد ۴	واحد ۵	واحد ۶	واحد ۷	واحد ۸	واحد ۹	واحد ۱۰	واحد ۱۱	واحد ۱۲
$X_1$	۲۰	۱۹	۲۵	۲۷	۲۲	۵۵	۳۳	۳۱	۳۰	۵۰	۵۳	۳۸
$X_2$	۱۵۱	۱۳۱	۱۶۰	۱۶۸	۱۵۸	۲۵۵	۲۳۵	۲۰۶	۲۴۴	۲۶۸	۳۰۶	۲۸۴
$Y_1^D$	۱۰۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۸۰	۹۴	۲۳۰	۲۲۰	۱۵۲	۱۹۰	۲۵۰	۲۶۰	۲۵۰
$Y_2^D$	۹۰	۵۰	۵۵	۷۲	۶۶	۹۰	۸۸	۸۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۴۷	۱۲۰
$Y_1^U$	۳	۶	۵	۴	۸	۹	۷	۵	۹	۱۰	۵	۹
$Y_2^U$	۲	۱	۴	۵	۲	۶	۷	۵	۴	۶	۸	۲

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای دو مدل

	واحد ۱	واحد ۲	واحد ۳	واحد ۴	واحد ۵	واحد ۶	واحد ۷	واحد ۸	واحد ۹	واحد ۱۰	واحد ۱۱	واحد ۱۲
۹	۱	۱	۱/۰۱۳۰۶	۱	۱	۱/۰۳۱۹۷	۱	۱/۱۰۳۱۴	۱	۱	۱	۱/۰۲۱۵
۱۰	۱	۱	۱/۰۱۳۰۶	۱	۱	۱/۰۳۱۹۷	۱	۱/۱۰۳۱۴	۱	۱	۱	۱/۰۲۱۵

همان‌طور که می‌بینید مقادیر به دست آمده یکسان می‌باشند. البته مدل (۹) به خاطر غیرخطی بودن برای جامعه تحت بررسی پرجمعیت دارای خطای محاسبه است ولی مدل (۱۱) این ضعف را ندارد.

## ۵ نتایج

در این مقاله نشان داده شد که می توان مدل غیرخطی فار را به مدل خطی تبدیل نمود. از نتایج این کار می توان به نکات زیر اشاره نمود:

مدت زمان محاسبه جواب در روش های خطی، بسیار کمتر از روش های غیرخطی است. هم چنین روش های غیرخطی به خاطر خطای بالای محاسبات قابل اعتماد نمی باشند ولی روش خطی این مشکل را ندارد. با استفاده از این تبدیل می توان دریافت که معکوس مقدار بهین مدل خطی (۷)، با مدل های غیرخطی هذلولی در حضور خروجی های نامطلوب، با در نظر گرفتن خروجی های نامطلوب به عنوان خروجی های غیر اختیاری رابطه ی مجذور بودن در مقدار بهین دارد. فرض کنید مقدار خطا در محاسبه  $\varphi^{-1}$  عدد  $\epsilon$  باشد لذا در مدل فار برای حل برای هر DMU حداقل به تعداد خروجی های نامطلوب این تقریب را استفاده می کند که باعث انتشار خطا می شود اما در مدل خطی با حضور خروجی های نامطلوب انتشار خطا رخ نمی دهد.

## منابع

- [1] Cooper, W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models Applications References and DEA Solver Software, 2nd ed, section 7, 219-223.
- [2] Koopmans, T. C., (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities In T. C. Koopmans. Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission, 33-97.
- [3] Pittman, R. W., (1983). Multilateral Productivity Comparisons with Undesirable Outputs. Economic Journal, 93: 883-891.
- [4] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., Pasurka, C., (1989). Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs Are Undesirable: A Nonparametric Approach. JSTOR Registered author(s), The Review of Economics and Statistics, 71, 90-98.
- [5] Liu, W. B., Meng, W., Li, X. X., Zhang, D. Q., (2009). DEA models with undesirable inputs and outputs, Springer, 173: 177-194.
- [6] Shephard, R. W., (1970). Theory of Cost and Production, Princeton: Princeton University Press
- [7] Mikko, J. Syrjanen, (2004). Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis. European journal of operational research 158: 20-33.
- [8] Chames, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European journal of operational research. 2, 429-444
- [9] Lawrence, M., Seiford, J. Z., (2001). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research, 142, 16-20.
- [10] Ray, S. C., (2006). Data Envelopment Analysis Theory and Techniques for Economics and Operations Research. 2nd ed., Ed. Cambridge, section 4, 82-88.