مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره سوم (پیاپی ۳۸)، پاییز ۹۲، ص ص ۸۱-۷۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

محاسبه اعتمادپذیری شبکه‌های جریان تصادفی چندکالایی

مهدی سلطانی‌فر*[۱]، علی ابراهیم نژاد[۲]، سعید شاه‌قبادی[۳]

۱- استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد سمنان، گروه ریاضی، سمنان، ایران

۲- استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائمشهر، گروه ریاضی، قائمشهر، ایران

۳- دانشجوی دکتری دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۳۰ فروردین ۱۳۹۱
پذیرش مقاله: ۱ شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در شبکه‌های جریان تک کالایی، ظرفیت سیستم برابر ماکزیمم مقدار جریان ارسالی از منبع به مقصد تعریف می‌شود. بدیهی است که ظرفیت سیستم برای یک شبکه جریان قطعی، مقداری ثابت است ولی برای یک شبکه جریان تصادفی (شبکه‌ای که در آن ظرفیت هر کمان، مقداری تصادفی است) متغیر می‌باشد. از این رو لازم است اعتمادپذیری سیستم محاسبه گردد. این محاسبه به دو روش انجام می‌شود: احتمال اینکه ظرفیت سیستم از D بزرگ‌تر و یا از D کم‌تر شود که **D** یک بردار سطح ظرفیت معین می‌باشد. دو راه مذکور به ترتیب برحسب مسیرهای مینیمال و برش‌های مینیمال محاسبه می‌شوند. در این مقاله پس از معرفی تخصیص جریان، با استفاده از خواص برش‌های مینیمال الگوریتم کارایی برای محاسبه اعتمادپذیری سیستم در حالت کلی، با P نوع کالا، پیشنهاد می‌گردد. این الگوریتم نسبت به روش‌ها و الگوریتم‌های مشابه که از برش‌های مینیمال استفاده نمی‌کنند؛ به مراتب کاراتر است.

کلمات کلیدی: شبکه‌های جریان تصادفی، مسیر مینیمال، برش مینیمال، اعتمادپذیری.

۱ مقدمه

در مساله ماکزیمم جریان، قضیه ماکزیمم جریان- مینیمم برش بیان می‌کند که در یک شبکه جریان قطعی، بیشترین مقدار جریان از مبدا s، به مقصد t، برابر مینیمم ظرفیت تمام برش‌های جدا کننده t و s است. از این‌رو، می‌توان برش‌های مینیمال را به منظور محاسبه اعتمادپذیری یک شبکه جریان تصادفی به‌کار برد. بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی مانند سیستم‌های کامپیوتری، مخابراتی، ترافیک شهری و غیره می‌توانند به‌وسیله شبکه‌های جریان مطالعه می‌شوند. فرض کنید $G \equiv (N, A)$ بیانگر یک شبکه با گره مبدا s و گره مقصد t باشد که در آن N مجموعه گره‌ها و $A \equiv \{a_i \mid ۱ \le i \le n\}$ مجموعه کمان‌هاست. ظرفیت کمان a_i با x_i نشان داده

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: soltanifar@khayam.ut.ac.ir

می‌شود و $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ مشخص کننده بردار ظرفیت G است. به طور کلاسیک، ظرفیت هر کمان قطعی فرض می‌شود. ولی، در بسیاری از شبکه‌های واقعی، ظرفیت کمان‌ها، یعنی **X**، تصادفی است. به این دلیل که مسیر جریان ممکن است از کار افتد؛ تعمیر شود و ... . لذا فرض می‌کنیم به ازای هر $1 \le i \le n$؛ x_i مقداری از مجموعه $\{0, 1, 2, ..., M_i\}$ را طبق یک توزیع احتمالی معین به خود می‌گیرد؛ M_i ماکزیمم ظرفیت کمان a_i است. بر طبق قرارداد به چنین شبکه‌ای، یک شبکه جریان تصادفی می‌گوییم. با این فرض، ظرفیت سیستم یک مقدار ثابت نمی‌باشد. فرض کنیم P نوع کالای مختلف در شبکه، در جریان است و $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \ldots, d_p)$ بردار سطح ظرفیت معین برای کالاها باشد. دو معیار برای محاسبه اعتمادپذیری سیستم وجود دارد: $\Pr(V(x) \le D)$ و $\Pr(V(x) \ge D)$ که $V(X) = (V_1, V_2, ..., V_P)$ بردار مقدار جریان P نوع کالا در شبکه‌ای با بردار ظرفیت X است. در این مقاله معیارهای مذکور با استفاده از مفهوم نقاط مرز بالایی و برش‌های مینیمال مورد بررسی قرار می‌گیرند. مساله بررسی اعتمادپذیری یک شبکه جریان تصادفی در حالت‌های تک کالایی و دو کالایی در [۱-۳] مورد بررسی قرار گرفته و در هر مورد مثال‌هایی ذکر شده است. در این مقاله اعتمادپذیری سیستم‌ها در حالت کلی، P– کالایی، با استفاده از برش‌های مینیمال بررسی خواهد شد. جهت نیل به این هدف، تخست تعاریف زیر آورده می‌شود [۴].

تعریف ۱ گشت: یک دنباله از اعضای A که در آن اعداد مجاور هم در دنباله، متناظر با کمان های مجاور هستند؛ یک گشت در $G \equiv (N, A)$ نامیده می‌شود. حال اگر کمان‌های گشت فوق در یک جهت باشند؛ گشت را گشت جهت‌دار یا مسیر گوییم.

تعریف ۲ مسیر مینیمال: یک مسیر مینیمال، یک گشت جهت‌دار فاقد دور است و آن را به اختصار با MP نشان می‌دهیم.

تعریف ۳ برش u-v : یک مجموعه از کمان‌های شبکه $G \equiv (N, A)$ را یک برش میان گره‌های v, u نامیم؛ هرگاه حذف آن از شبکه، موجب تقسیم شبکه به دقیقاً دو زیرشبکه شده که یکی شامل u و دیگری شامل v است.

تعریف ٤ برش مینیمال: یک برش مینیمال، برشی است که هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های غیربدیهی آن، برش نباشد و آن را به اختصار با MC نشان می‌دهیم.

مقدار جریان کالای نوع i روی کمان a_i را با f_i^j نمایش می‌دهیم. فرض کنید α_1، α_2، ...، α_P (اعدادی صحیح) نشان‌دهنده مقدار مصرف شده ظرفیت روی هر کمان به‌وسیله یک واحد از کالاهای نوع ۱، ۲، ...، P باشد. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می‌کنیم α_1، α_2، ...، α_P. هم‌چنین فرض می‌کنیم G در شرایط زیر صادق باشد:

۱- هرگره کاملاً قابل اطمینان (قطعی) باشد.

۲- ظرفیت‌های کمان‌های مختلف، مستقل آماری باشد.

۳- جریان هر کالا درG، در قانون بقا جریان صدق کند.

و نیز قراردادهای زیر را می‌پذیریم:

$(d_1^{'},d_2^{'},...,d_P^{'}) \geq (d_1,d_2,...,d_P)$ ، اگر برای هر i ؛ $d_i^{'} \geq d_i$

$(d_1^{'},d_2^{'},...,d_P^{'}) > (d_1,d_2,...,d_P)$ ، اگر $(d_1^{'},d_2^{'},...,d_P^{'}) \geq (d_1,d_2,...,d_P)$ و برای حداقل یک i، $d_i^{'} > d_i$

قراردادهای فوق برای بردارهای ظرفیت نیز معتبر می‌باشند.

تعریف۵ بردار ماکزیمال: بردار A_i را در مجموعه بردارهای $\{A_1,A_2,...,A_i,...,A_n\}$ ماکزیمال گوییم هرگاه نتوان $1 \leq j \leq n$ را طوری یافت که $A_j > A_i$.

۲ تخصیص جریان P کالایی

فرض می‌کنیم $K_i = \{a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_k}\}$ یک برش مینیمال و $F_i^p = (f_{i_1}^p,f_{i_2}^p,\dots f_{i_k}^p)$ بردار جریان نوع p در برش K_i باشد. در این‌صورت $F_i = (F_i^1,F_i^2,\dots,F_i^p)$ را یک **تخصیص جریان** در برش K_i می‌نامیم. تخصیص ظرفیت F_i را تحت بردار ظرفیت $X = (x_1,x_2,...,x_n)$ **شدنی** گوییم هرگاه به‌ازای هر $j = 1$،...، k؛

$$\alpha_1 f_{i_j}^1 + \alpha_2 f_{i_j}^2 + \ldots + \alpha_p f_{i_j}^p \leq x_{i_j} \qquad (1)$$

هم‌چنین می‌گوییم برش مینیمال K_i، سطح ظرفیت $(d_1,d_2,...,d_p)$ را تحت X**حمایت** می‌کند اگر تخصیص جریان شدنی تحت X مانندF_i موجود باشد که:

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^p = d_p, \qquad p = 1,2,\ldots,P \qquad (2)$$

و آن را حمایت بیشینه (حداکثری) می‌کند اگر علاوه بر شرایط (۲) هیچ تخصیص جریان شدنی تحت X مانند F'_i نباشد که:

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^1 = d_1 + 1$$

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^p = d_p \qquad , p = 2,3,\ldots,P$$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد ظرفیت سیستم برابر $V(X) = (V_1(X),V_2(X),\ldots,V_P(X))$ تعریف می‌شود که در آن $V_p(X)$ ماکزیمم مقدار جریان کالای p ام تحت بردار ظرفیت X است. گوییم $V(X) = (d_1,d_2,...,d_P)$ هرگاه تمام MC ها، $(d_1,d_2,...,d_P)$ را تحت X حمایت کرده؛ حداقل یک MC، $(d_1,d_2,...,d_P)$ را حمایت بیشینه کند. مشابه تعریف اعتمادپذیری در حالت‌های تک و دوکالایی، $\Pr(V(x) \leq D)$ و $\Pr(V(x) \geq D)$ را به عنوان معیارهایی کارا برای محاسبه اعتمادپذیری یک شبکه جریان تصادفی در حالت P کالایی به‌کار می‌بریم.

۳ نقاط مرز بالایی $(d_1, d_2, ..., d_P)$

بردار ظرفیت X، یک مرز بالایی برای $(d_1, d_2, ..., d_P)$ است؛ هرگاه:

الف) $V(X) = (d_1, d_2, ..., d_P)$.

ب) هر ظرفیت Y که $Y > X$، $(d_1 + 1, d_2, ..., d_P)$ را حمایت کند.

از این رو، مجموعه نقاط مرز بالایی $(d_1, d_2, ..., d_P)$، مجموعه بردارهای ماکزیمال در مجموعه $\{X \mid V(X) = (d_1, d_2, ..., d_P)\}$ است. پس:

$$\Pr(V(X) \le (d_1, d_2, \ldots, d_P)) = \Pr\{X \mid V(X) \le (d_1, d_2, \ldots, d_P)\}$$
$$= \Pr\{X \mid (d_1, d_2, ..., d_P) \text{ یک مرز بالایی } X_i \text{ و } \} \; X \le X_i$$

لذا، مساله به چگونگی محاسبه تمام نقاط مرز بالایی $(d_1, d_2, ..., d_P)$ تبدیل می‌شود. یک شرط لازم برای یک نقطه مرز بالایی $(d_1, d_2, ..., d_P)$ در لم ۱ آمده است.

لم ۱: اگر بردار ظرفیت X یک نقطه مرز بالایی برای $(d_1, d_2, ..., d_P)$ باشد؛ آن‌گاه یک MC- ی $K_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ و یک تخصیص جریان F_i وجود دارد؛ به طوری که:

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^{p} = d_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, P \tag{۳}$$

$$a_j \notin K_i \quad x_j = M_j \tag{۴}$$

اثبات: به عکس:

الف) فرض می‌کنیم برای یک کمان a_{i_j}:

$$(x_{i_j} - \alpha_1 f_{i_j}^{1} - \alpha_2 f_{i_j}^{2} - \ldots - \alpha_p f_{i_j}^{p}) \ge \alpha_1$$

آن‌گاه تخصیص جریان:

$$(f_{i_1}^{1}, ..., f_{i_j}^{1} + 1, \ldots, f_{i_k}^{1}, f_{i_1}^{2}, \ldots, f_{i_k}^{2}, ..., f_{i_1}^{P}, ..., f_{i_k}^{P}) =$$
$$F'_i = (f_{i_1}^{\prime 1}, ..., f_{i_k}^{\prime 1}, f_{i_1}^{\prime 2}, ..., f_{i_k}^{\prime 2}, ..., f_{i_1}^{\prime P}, ..., f_{i_k}^{\prime P})$$

تحت X شدنی است؛ زیرا:

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^{\prime 1} = d_1 + 1, \sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^{\prime p} = d_p \qquad , p = 1, 2, \ldots, P$$
$$\alpha_1 f_{i_j}^{\prime 1} + \alpha_2 f_{i_j}^{\prime 2} + ... + \alpha_P f_{i_j}^{\prime P} = \alpha_1 f_{i_j}^{1} + \alpha_2 f_{i_j}^{2} + \ldots + \alpha_p f_{i_j}^{P} + \alpha_1 \le x_{i_j}$$

این متناقض با این واقعیت می‌باشد که X یک مرز بالایی برای $(d_1, d_2, ..., d_P)$ است.

ب) فرض می‌کنیم برای یک کمان a_{i_j}؛ $\alpha_1 > 1$ و $x_{i_j} - \sum_{p=1}^{P} \alpha_p f_{i_j}^{p} \le \alpha_1 - 2$ باشد؛ آن‌گاه $X_1 = (x_1, \ldots, x_{i_j} + 1, \ldots, x_n)$ بزرگ‌تر از X بوده؛ $(d_1, d_2, \ldots, d_P)$ را حمایت بیشینه می‌کند و این یک تناقض است.

ج) اگر برای یک $a_j \notin K_i$، $x_j \le M_j - 1$ باشد؛ آن‌گاه $X_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ که $X_2 > X$، $(d_1, d_2, \ldots, d_P)$ را حمایت بیشینه (حداکثری) می‌کند و این یک تناقض است.□

با مراجعه به هر K_i، X متناظر را از طریق روابط (۴) برای هر تخصیص جریان که در (۳) صدق می‌کند، تولید می‌کنیم. چنین X ای $(d_1, d_2, \ldots, d_P)$ را حمایت بیشینه کرده؛ یک کاندید برای نقطه مرز بالایی $(d_1, d_2, \ldots, d_P)$ است.

فرض کنید Ω_D ($D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$)، مجموعه چنین کاندیداهایی باشد. توجه کنید که Ω_D $\{X \mid V(X) = D\} \subseteq$ لم ۱ ایجاب می‌کند Ω_D شامل تمام نقاط مرز بالایی برای D باشد. بالاخره لم ۲ نشان خواهد داد که مجموعه زیر، مجموعه نقاط مرز بالایی برای D است:

$\Omega_{D:\max} \equiv \{X \mid$ در Ω_D ماکزیمال است $X\}$

لم ۲: $\Omega_{D:\max} \equiv \{X \mid$ در Ω_D ماکزیمال است $X\}$ مجموعه نقاط مرز بالایی برای $D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$ است.

اثبات: فرض کنید X یک نقطه مرز بالایی برای $D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$ باشد ولی $X \notin \Omega_{D:\max}$. لم ۱ نشان می‌دهد که $X \in \Omega_D$، پس یک $Y \in \Omega_D$ وجود دارد که $Y > X$ و Y بردار $D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$ را حمایت بیشینه می‌کند و این موضوع با این واقعیت که X یک نقطه مرز بالایی D است؛ در تناقض می‌باشد. از این‌رو $X \in \Omega_{D:\max}$.

- **بر عکس:** فرض کنید که $X \in \Omega_{D:\max}$ اما یک نقطه مرز بالایی برای D نباشد. پس $V(X) = D$ و یک نقطه مرز بالایی Y برای D وجود دارد که $Y > X$. لم ۱ ایجاب می‌کند که $Y \in \Omega_D$ که متناقض با این واقعیت است که $X \in \Omega_{D:\max}$. از این رو X یک نقطه مرز بالایی برای $D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$ می‌باشد.

٤ الگوریتم

٤-١ الگوریتم تولید نقاط مرز بالایی برای $D = (d_1, d_2, \ldots, d_P)$

مرحله ۱: با مراجعه به هر MC ی $K_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$:

۱-۱- تمام تخصیص جریان‌های F_i صادق در محدودیت‌های زیر را تولید کنید:

$$\sum_{p=1}^{P} \alpha_p f_{i_j}^{p} \le M_{i_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots k \tag{۵}$$

$$\sum_{j=1}^{k} f_{i_j}^{p} = d_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, P \tag{۶}$$

۱- ۲- (محاسبه Ω_D): تمام تخصیص‌های جریان را به صورت $X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ از طریق روابط زیر تبدیل کنید:

$$j = ۱,۲,\ldots k \quad x_{i_j} = \alpha_۱ f_{i_j}^۱ + \alpha_۲ f_{i_j}^۲ + \ldots + \alpha_p f_{i_j}^p \qquad (۷)$$

$$x_j = M_j \qquad a_j \notin K_i$$

مرحله ۲: (محاسبه $\Omega_{D:\max}$) : فرض کنید $\Omega_D = \{X_1, X_2, \ldots, X_w\}$، هر X_i را بررسی کنید که آیا یک عضو ماکزیمال در Ω_D هست یا خیر. اگر هست، آن را در $\Omega_{D:\max}$ قرار دهید؛ در غیر این صورت عضو بعدی را بررسی کنید.

۲- ۱) $I \leftarrow \phi$ (I پشته‌ای است که اندیس هر عضو غیر ماکزیمال، بعد از بررسی در آن قرار می‌گیرد. در ابتدا $I \leftarrow \phi$)

۲- ۲) برای $i \leftarrow ۱$ تا w که $i \notin I$:

۲- ۳) برای $j \leftarrow i + ۱$ تا w که $j \notin I$:

۲-۴) اگر $X_j \ge X_i$، آن‌گاه X_i یک عضو غیر ماکزیمال در Ω_D نیست و $I \leftarrow I \bigcup \{i\}$ و به ۲. ۷ بروید و گرنه اگر $X_i > X_j$ آن‌گاه $I \leftarrow I \bigcup \{j\}$.

۲- ۵) $j \leftarrow j + ۱$.

۲- ۶) X_i یک نقطه مرز بالایی برای $(d_۱, d_۲, \ldots, d_p)$ است.

۲- ۷) $i \leftarrow i + ۱$.

۲- ۸) پایان.

۲-٤ محاسبه اعتمادپذیری

فرض کنید q تا نقطه مرز بالایی به صورت $X_۱, X_۲, \ldots, X_q$ برای $D = (d_۱, d_۲, \ldots, d_P)$ موجود و نیز $B_i = \{X \mid X \le X_i\}$ برای $i = ۱,۲,\ldots,q$ باشد. بنابراین

$$\Pr(V(x) \le (d_۱, d_۲, \ldots, d_P))$$
$$= \Pr\{X \mid (d_۱, d_۲, \ldots, d_P) \text{ یک مرز بالایی } X_i \text{ و } X \le X_i\}$$
$$= \Pr\{\bigcup_{i=۱}^{q} \{X \mid X \le X_i\}\} = \Pr\{B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_q\}$$

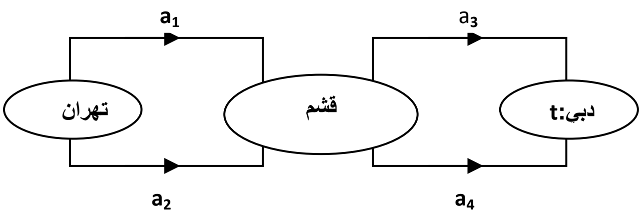
چندین روش، مانند روش شمول و عدم شمول، زیرمجموعه‌های مجزا و تبدیل فضای حالت را می‌توان برای محاسبه $\Pr\{B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_q\}$ به‌کاربرد. با کاربرد روش شمول و عدم شمول، داریم:

$$\Pr\{B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_q\} = \sum_i \Pr\{B_i\} - (-1)^2 \sum_{i<j} \Pr\{B_i \cap B_j\} -$$
$$(-1)^3 \sum_{i<j<k} \Pr\{B_i \cap B_j \cap B_k\} - \cdots - (-1)^q \Pr\{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_q\}$$

۵ مثال عددی

در زیر مثالی برای $P = 3$ آورده می‌شود.

شکل ۱ یک شبکه بین المللی بازرگانی را نشان می‌دهد. بر طبق قوانین، هیچ مسیر جهت‌داری از s (تهران) به t (دبی) مجاز نیست. از این رو هر مسیر از s باید قبل از وارد شدن به t از قشم بگذرد. فروشنده مایل است سه محصول زعفران، زرشک و پسته را از تهران به دبی انتقال دهد. تمام کالاها در کانتینرهای مشابه بار شده است. مسیرها، از طریق کمان‌های a_1 و a_3 به‌وسیله کشتی و از طریق a_2 و a_4 به‌وسیله هواپیما است. ظرفیت هر کمان، تصادفی ناشی از نگهداری و تعمیر کانتینرها و یا ترافیک خطوط می‌باشد. یک بسته از کالا، یعنی ۱۲۰ واحد کالای مشابه. فروشنده می‌خواهد ۲ بسته از هر کدام از محصولات را از s به t انتقال دهد $(d_1 = d_2 = d_3 = 2)$. اندازه هر کانتینر، هر کارتن حاوی زعفران، زرشک و پسته به ترتیب ۲۲۰*۲۳۰*۵۹۱ (ارتفاع*عرض*طول)، ۳۸*۵۲*۹۲، ۴۳*۷۰*۱۲۵، ۵۰*۸۰*۱۵۰ سانتی‌متر مربع است. از این رو یک بسته کالای ۱ در یک کانتینر، یک بسته کالای ۲ در دو کانتینر و یک بسته کالای ۳ در سه کانتینر، جا می‌گیرد $(\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3)$. داده‌های کمانی در جدول ۱ آمده است. در این مثال $n = 4$ و $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (7, 5, 5, 7)$ بوده؛ دو MCی $K_2 = \{a_3, a_4\}$, $K_1 = \{a_1, a_2\}$ وجود دارد. (محاسبه MCهای یک شبکه را می‌توان توسط الگوریتم‌های بحث شده در منابع [۵-۸] انجام داد) تمام نقاط مرز بالایی برای $(d_1, d_2, d_3) = (2, 2, 2)$ می‌تواند به فرم زیر، با کاربرد الگوریتم گفته شده در بخش ۴-۱ محاسبه شود.



شکل۱. یک شبکه بین المللی بازرگانی

مرحله ۱ برای K_1: بر طبق MC ی $K_1 = \{a_1, a_2\}$

۱-۱- تمام تخصیص‌های جریان $(f_1^1, f_2^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3, f_2^3)$ صادق در قیود زیر را به دست آوریم:

$$f_1^1 + 2f_1^2 + 3f_1^3 \le 7$$

$$f_2^1 + 2f_2^2 + 3f_2^3 \le 5$$

$$f_1^1 + f_2^1 = 2$$

$$f_1^2 + f_2^2 = 2$$
$$f_1^3 + f_2^3 = 2$$

سه تخصیص جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(f_1^1, f_2^1, f_1^2, f_2^2, f_1^3, f_2^3) = (0,2,2,0,1,1),(1,1,0,2,2,0),(2,0,1,1,1,1)$$

جدول ۱. داده‌های کمانی شکل ۱

کمان	ظرفیت (تعدادکانتینرها)	احتمال تجمعی
a_1	۷	۱/۰۰
	*۶	۰/۸۰
	۵	۰/۷۰
	۴	۰/۶۰
	۳	۰/۵۰
	۲	۰/۴۰
	۱	۰/۳۰
	۰	۰/۲۰
a_2	۵	۱/۰۰
	۴	۰/۸۰
	۳	۰/۵۰
	۲	۰/۴۰
	۱	۰/۳۰
	۰	۰/۲۰
a_3	۷	۱/۰۰
	۶	۰/۸۰
	۵	۰/۷۰
	۴	۰/۶۰
	۳	۰/۵۰
	۲	۰/۴۰
	۱	۰/۳۰
	۰	۰/۲۰
a_4	۵	۱/۰۰
	۴	۰/۸۰
	۳	۰/۵۰
	۲	۰/۴۰
	۱	۰/۳۰
	۰	۰/۲۰

$*: \Pr\{x_1 \le 6\} = 0/80$

۱-۲- هر تخصیص جریان $(f_۱^۱, f_۲^۱, f_۱^۲, f_۲^۲, f_۱^۳, f_۲^۳)$ را به $X = (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ از طریق روابط زیر تبدیل می‌کنیم:

$$x_۱ = f_۱^۱ + ۲f_۱^۲ + ۳f_۱^۳$$
$$x_۲ = f_۲^۱ + ۲f_۲^۲ + ۳f_۲^۳$$
$$x_۳ = M_۳$$
$$x_۴ = M_۴$$

تنها یک X به صورت $X_۱ = (۷,۵,۵,۷)$ تولید می‌شود.

مرحله ۱ برای $K_۲$: بر طبق MC ی $K_۲ = \{a_۳, a_۴\}$

۱. ۱- تمام تخصیص‌های جریان $(f_۳^۱, f_۴^۱, f_۳^۲, f_۴^۲, f_۳^۳, f_۴^۳)$ صادق در قیود زیر را به‌دست آوریم:

$$f_۳^۱ + ۲f_۳^۲ + ۳f_۳^۳ \leq ۵$$
$$f_۴^۱ + ۲f_۴^۲ + ۳f_۴^۳ \leq ۷$$
$$f_۳^۱ + f_۴^۱ = ۲$$
$$f_۳^۲ + f_۴^۲ = ۲$$
$$f_۳^۳ + f_۴^۳ = ۲$$

سه تخصیص جریان به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(f_۳^۱, f_۴^۱, f_۳^۲, f_۴^۲, f_۳^۳, f_۴^۳) = (۲,۰,۰,۲,۱,۱), (۱,۱,۲,۰,۰,۲), (۰,۲,۱,۱,۱,۱)$$

۱. ۲- هر تخصیص جریان $(f_۳^۱, f_۴^۱, f_۳^۲, f_۴^۲, f_۳^۳, f_۴^۳)$ را به $X = (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ از طریق روابط زیر تبدیل می‌کنیم:

$$x_۳ = f_۳^۱ + ۲f_۳^۲ + ۳f_۳^۳$$
$$x_۴ = f_۴^۱ + ۲f_۴^۲ + ۳f_۴^۳$$
$$x_۱ = M_۱ \quad x_۲ = M_۲$$

این بار نیز تنها یک X به صورت $X_۲ = (۷,۵,۵,۷)$ تولید می‌شود؛ همان طور که ملاحظه می‌کنید $X_۱ = X_۲$.

مرحله ۲: از آن‌جا که $X_۱ = X_۲$ است لذا $\Omega_{d_۱,d_۲,d_۳} = \{(۷,۵,۵,۷)\}$. پس چون Ω_{d_1,d_2,d_3} تنها یک عضو دارد؛ بنابراین نیاز به بررسی اعضای $\Omega_{d_۱,d_۲,d_۳}$ برای تعیین اعضای ماکزیمال در آن، وجود ندارد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Omega_{d_۱,d_۲,d_۳ \max} = \{(۷,۵,۵,۷)\}$$

یعنی تنها نقطه مرز بالایی برای $(d_۱, d_۲, d_۳) = (۲,۲,۲)$، نقطه $(۷,۵,۵,۷)$ می‌باشد. حال روش شمول و عدم شمول را برای محاسبه $\Pr\{V(X) \leq (۲,۲,۲)\}$ به کار می‌بریم. قرار می‌دهیم:

$B = \{X \mid X \leq (۷,۵,۵,۷)\}$

داریم:

$= \Pr\{x_۱ \leq ۷\} \times \Pr\{x_۲ \leq ۵\} \times \Pr\{x_۳ \leq ۵\} \times \Pr\{x_۴ \leq ۷\} = ۱$

$\Pr\{V(X) \leq (۲,۲,۲)\} = \Pr\{B\} = \Pr\{X \leq (۷,۵,۵,۷)\}$

قابل ذکر است از آن‌جا که $X = (۷,۵,۵,۷) = (M_۱, M_۲, M_۳, M_۴)$، نتیجه به‌دست آمده کاملاً واضح است. مثال فوق تنها برای واضح سازی طرز کار الگوریتم بیان شد و باید توجه کرد که محاسبات برای اجرای مراحل الگوریتم در حالت‌های سه کالایی، چهار کالایی و ....، بسیار پیچیده و طاقت فرساست. رسیدن به پایایی ۱، مختص این مثال خاص است و عمومیت ندارد.

٦ نتیجه گیری

برای هربرش K_i، تعداد $\mathrm{F_i}$ها که در قید (۶) صدق می‌کنند؛ برابر:

$$\binom{n_r + d_۱ - ۱}{d_۱}\binom{n_r + d_۲ - ۱}{d_۲}\cdots\binom{n_r + d_p - ۱}{d_p}$$

است. بنابراین، تعداد $\mathrm{F_i}$ های صادق در قیود (۵) و (۶) و تعداد Xهای تولید شده از K_i، هر دو به‌وسیله کران زیر محدود می‌شوند:

$$\binom{n_r + d_۱ - ۱}{d_۱}\binom{n_r + d_۲ - ۱}{d_۲}\cdots\binom{n_r + d_p - ۱}{d_p}$$

از این رو، تعداد $X \in \Omega_D$ ($(D = (d_۱, d_۲, ..., d_P)$) به‌وسیله کران زیر محدود است:

$$\varphi = \sum_{k=۱}^{m} \left[\binom{n_r + d_۱ - ۱}{d_۱}\binom{n_r + d_۲ - ۱}{d_۲} \cdots \binom{n_r + d_p - ۱}{d_p}\right]$$

در بدترین حالت، $O(n.\varphi)$ زمان برای اجرای مراحل ۱-۱و ۱-۲ نیاز است. برای هر $X \in \Omega_D$، $O(n.\varphi)$ زمان در بدترین شرایط برای مقایسه با سایر X ها نیاز می‌باشد. از این‌رو مرحله ۲، نیاز به $O(n.\phi^۲)$ زمان برای محاسبه $\Omega_{D:\max}$ ($(D = (d_۱, d_۲, ..., d_P)$)، در بدترین شرایط دارد. در مجموع الگوریتم پیشنهادی نیاز به $O(n.\varphi^۲)$ زمان برای اجرا خواهد داشت لذا این الگوریتم برای شبکه‌های پیچیده در حالات سه کالایی و بیشتر ناکاراست که این نا کارایی از نحوه محاسبه تخصیص‌های جریان در مرحله اول ناشی می‌شود. اگر بتوان مرحله ۱-۱ را در الگوریتم بخش ۴-۱ را به گونه‌ای دیگر محاسبه کرد که پیچیدگی الگوریتم بهتر شود؛ کارایی الگوریتم بالا

می‌رود. هم‌چنین رویکرد چند سناریویی پیشنهادی توسط ابراهیم‌نژاد و ناصری [۹] برای حل مسایل مشابه و مقایسه نتایج می‌تواند موضوع جدیدی برای تحقیقات آتی باشد.

منابع

[۹] ابراهیم‌نژاد، ع.، ناصری، س. ه. (۱۳۸۹). کاهش هزینه‌ی تاخیرات ترافیک هوایی با بکارگیری شبکه جریان پویا با ظرفیت تصادفی، مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن (ریاضیات کاربردی) ۲ (۲۵)، ۲۲-۹.

[1] AL-Ghanim, A. M., (1999). A heuristic technique for generating minimal paths and cut sets of a general network. Computers and Industrial Engineering, 36, 45-55.

[2] Lin, Y. K., (2003). Using minimal cuts to study the system capacity for a stochastic-flow network in two commodity case. Computers & Operations Research, 30, 1597-1607.

[3] Lin, Y. K., (2001). Study on the multi commodity reliability of a capacitated-flow network.Computers and mathematics whit Applications, 42(2), 255-64.

[4] Ahuja, K., Thomas, L., Magnanti, M., Orlin, B. J., (1993). Network Flows Theory, Algorithm and Applications.Prentice Hall. New York.

[5] Lin, Y. K., (2001). On reliability evaluation of a stochastic - flow network in terms of minimal cuts. Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers. 18(3), 49-54.

[6] Shen, Y., (1995). A new simple algorithm for enumerating all minimal paths and cuts of a graph. Microelectronics and Reliability, 35, 973-976.

[7] Yeh, W. C., (2001). A simple approach to search for all d- MCs of a limited-flow network reliability. Engineering and System Safety, 71, 15-19.

[8] SalehiFathabadi, H., Soltanifar, M., Ebrahimnejad, A., Nasseri, S. H., (2009). Determining All Minimal Paths of a Network.Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 3(4), 3371-3379.