

## بهینه‌سازی رژیم غذایی افراد مبتلا به هپاتیت با رویکرد فازی

حسین اقبالی<sup>۱</sup>، محمدعلی اقبالی<sup>۲\*</sup>، علی وحیدیان کامیاد<sup>۳</sup>، رضا امین لوی<sup>۴</sup>

۴۰۱- کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، عضو هیات علمی موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی و غیردولتی ایوانکی، سمنان، ایران

۲- کارشناس ارشد مهندسی صنایع، عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی بیرجند، ایران

۳- استاد دانشکده ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، ایران

رسید مقاله: ۸ دی ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: ۲ خرداد ۱۳۹۱

### چکیده

به دلیل تنوع اقلیم‌های آب و هوایی در سطح جهان و شرایط مختلف نگهداری مواد غذایی، میزان ریزمغذی‌ها و درشت مغذی‌های موجود در مواد غذایی مختلف با عدم قطعیت روبروست. کمیت مربوط به میزان یک ماده مغذی موجود در یک ماده غذایی را هیچ‌گاه نمی‌توان به طور دقیق تعیین نموده و عدد مشخصی را به آن نسبت داد. این عدم قطعیت در مورد اعداد و ارقام موجود در مراجع پزشکی سبب می‌شود تا تصمیم‌گیری‌ها در مورد ارایه یک رژیم غذایی بر اساس داده‌های قاطع، دور از واقعیت باشد. هدف این مقاله، تهیه و تنظیم یک رژیم غذایی بهینه در محیط فازی است. به دلیل اهمیت تغذیه بیماران مبتلا به هپاتیت، مطالعه موردی روی این بیماران صورت پذیرفته است. با توجه به رژیم پرکالری و پرپروتئین برای این بیماران، مساله تحقیق را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با دو تابع هدف که شامل ماکزیمم‌سازی میزان کالری و میزان پروتئین روزانه است، مدل‌بندی و سپس با روشی مناسب حل شده است. در پایان با پیاده‌سازی رژیم غذایی در محیط فازی به نتایج خوبی حاصل گردید، به طوری که اعداد به دست آمده با در نظر گرفتن تمامی حالات ممکن واقعی‌تر هستند.

**کلمات کلیدی:** رژیم غذایی، هپاتیت، برنامه‌ریزی خطی چند هدفه، اعداد فازی مثلثی.

### ۱ مقدمه

در دنیای امروز، افراد بنا به موقعیت‌های متفاوتی که در آن قرار می‌گیرند، نیازهای تغذیه‌ای متفاوتی دارند. پس از تأمین نیاز افراد به مواد مغذی مناسب و یک رژیم غذایی مطلوب، اولویت‌هایی نیز در انتخاب رژیم غذایی بهینه برای آن‌ها مطرح می‌گردد. بنا به نظر اکثر پزشکان، تغذیه و رژیم درمانی به عنوان یک عامل مهم در کنترل و درمان اکثر بیماری‌های خاص می‌باشد که هپاتیت یکی از آن‌هاست. "هپاتیت" التهاب گسترده کبدی

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Eghbali@Birjandut.ac.ir

است که معمولاً منشاء ویروسی دارد. با توجه به این که معمولاً در بیماران مبتلا به هیپاتیت کاهش اشتها، حالت تهوع و استفراغ وجود دارد، دریافت کافی انرژی دچار مشکل شده و این بیماران دچار کاهش وزن می‌شوند. لذا دریافت روزانه انرژی و پروتئین به میزان بالا برای آن‌ها ضروری است. علاوه بر دو مورد مذکور، می‌توان هر یک از محدودیت‌های مربوط به ریزمغذی‌ها و درشت مغذی‌ها را بنا به نیاز افراد به حداقل یا حداکثر رساند و یا به سطح مورد نظری نزدیک کرد. به طور خلاصه می‌توان گفت، آن چه اهمیت دارد آن است که در شرایط فعلی، یک رژیم غذایی بهینه که در آن اهداف مورد نظر متخصصین علم تغذیه برآورده شود ضروری به نظر می‌رسد. اما موضوعی که در این جا مطرح است، مشکل مربوط به نادقیق بودن مقدار مواد مغذی در غذاها است، به طوری که عموماً مواد مغذی موجود در یک غذا مشخص هستند، اما مساله مقدار دقیق آن‌ها همواره مطرح است. چنانچه درباره وجود ماده مغذی معینی مشکوک باشیم، فرض می‌شود که مقدار آن بسیار ناچیز است، که مجدداً مساله نادقیق بودن مقدار تقریباً صفر ظاهر می‌گردد. وقتی غذا به شکلی دقیق و پایدار فرآوری و بسته‌بندی می‌شود (مثلاً انواع روغن‌ها، شکر، بیسکویت‌ها و غیره)، مقادیر مواد مغذی آن اغلب به صورت دقیق و با قطعیت ارایه می‌شوند. برای سایر غذاها، مقدار ماده‌ی مغذی در ۱۰۰ گرم از یک غذا (مثلاً سیب، نان سفید، سیب‌زمینی) ممکن است در طول یک بازه متغیر باشد، که میزان این تغییرات تحت شرایط مختلف می‌تواند نسبتاً بزرگ باشد. مقدار کربوهیدرات موجود در ۱۰۰ گرم سیب، به نوع سیب و میزان رسیدگی آن بستگی دارد، حتی پس از کنترل رسیدگی و نوع سیب، تغییرات دیگری مربوط به خاک و شرایط رشد آن وجود دارد. به عنوان نمونه، درصد قند موجود در ۱۰۰ گرم سیب منطقه گرمسیر، (به علت کمبود میزان آب موجود در سیب) از درصد قند موجود در نمونه مشابه که در منطقه معتدل و کوهستانی کشت شده است کمتر است. بدین ترتیب لزوم دخالت مفهوم فازی در بیان مقادیر مربوطه بیشتر مطرح می‌شود. مطالعاتی در این زمینه صورت گرفته است که می‌توان به مطالعه مامات و همکاران اشاره کرد [۱]. آن‌ها در این تحقیق به بررسی رژیم غذایی انسان با قیمت فازی پرداخته‌اند ولی ما بقی فاکتورها را به صورت قاطع در نظر گرفته و فقط به مینیم کردن هزینه بسنده کرده‌اند. اعتقاد ما بر این است که میزان مواد مغذی موجود در مواد غذایی مختلف نیز باید به صورت اعداد فازی در نظر گرفته شوند. به عنوان مثال آیا می‌توان با اطمینان کامل میزان کلسترول موجود در ۱۰۰ گرم تخم مرغ را تعیین نمود؟ مسلماً جواب منفی است زیرا عواملی نظیر نژاد مرغ‌ها، کمیت و کیفیت تغذیه آن‌ها و هم‌چنین کیفیت محیط رشد آن‌ها تاثیر بسزایی بر نوسان عدد مربوطه دارد. در اینجا به نمونه دیگری اشاره می‌شود. طبق مطالعات و تحقیقات وزارت کشاورزی ایالات متحده در هر ۱۰۰ گرم کاهو، ۲ گرم قند وجود دارد. بنا به دلایل متعددی نمی‌توان این عدد را مبنای تصمیم‌گیری قرار داد. اگر کاهو در منطقه‌ای با آب فراوان کشت شده باشد به دلیل فزونی آب در واحد حجم این سبزی، چگالی قند موجود در ۱۰۰ گرم از آن کمتر از چگالی قند موجود در ۱۰۰ گرم از نمونه کاهوی مشابه است که در منطقه‌ای با آب کمتر کشت شده باشد. لذا بایستی عدد مربوط به میزان قند موجود در ۱۰۰ گرم کاهو را به صورت عدد فازی در نظر گرفت. از طرفی نمی‌توان مرز مشخصی جهت حداقل و حداکثر میزان استفاده روزانه افراد از ریز مغذی‌ها و درشت مغذی‌ها را تعیین نمود. زیرا عواملی از

قبیل منطقه جغرافیایی، جنسیت افراد، سن و... سبب ایجاد نوسان در میزان استفاده از مواد مغذی می گردد. به عنوان مثال زمانی که گفته می شود حداقل مقدار دریافت روزانه از ویتامین E، ۱۰۰ میلی گرم است، بایستی این کمیت را به صورت عدد فازی در نظر گرفت. دلایلی که سبب گردید تا در این مقاله از دیدگاه فازی به مساله تغذیه پرداخته شود، اهمیت بالای اعمال رژیم غذایی مناسب برای بیماران خاص از جمله بیماران مبتلا به هیپاتیت است، زیرا میزان نیاز روزانه این افراد به چربی ها، کربوهیدرات ها، پروتئین ها و... تابع شرایط جسمانی بیمار، متغیر است. از این رو، دستیابی به یک رژیم بهینه غذایی با به کارگیری دیدگاه کلاسیک دور از واقعیت است. به عنوان مثال، اگر برای یک بیمار خوردن یک عدد سیب متوسط از لحاظ اندازه در روز مجاز باشد، هم متوسط بودن اندازه سیب، یک مفهوم فازی است و هم مطالبی که قبلاً بیان شد دلیل کافی است تا محقق با نگاه فازی به مساله تغذیه این بیماران پردازد.

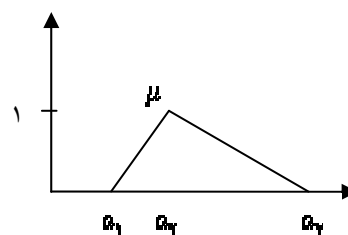
منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفعلی عسکرزاده مطرح گردید. سپس برای نخستین بار مفهوم برنامه ریزی خطی فازی توسط تاناکا و همکاران [۲] مطرح شد. هم چنین مفهوم تصمیم گیری فازی برای نخستین بار توسط بلمن و زاده [۳] مطرح و سپس زیمرمن [۴] روش Max-Min را برای حل مساله برنامه ریزی خطی فازی ارائه نمود. سایر محققین نیز در مطالعات خود از این روش استفاده کردند. به عنوان مثال جانا و همکاران [۵] به بررسی مدل حمل و نقل در محیط فازی پرداختند. در مدل آن ها ضرایب هدف، توابع عرضه و تقاضا و ظرفیت انتقال به عنوان اعداد فازی بیان شده است. این مقاله درصدد است تا به بحث و بررسی پیرامون تغذیه بهینه بیماران مبتلا به هیپاتیت پرداخته و آن را به صورت یک مساله برنامه ریزی خطی فازی با دو تابع هدف در نظر گیرد. در مدل ساخته شده تمامی ضرایب به صورت اعداد فازی از نوع مثلثی منظور شده است. با استفاده از فرآیند تصمیم گیری بلمن و زاده، مدل فازی به یک مساله برنامه ریزی خطی کلاسیک با ضرایب قاطع تبدیل و سپس با استفاده از روش سیمپلکس حل شده است.

## ۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

### ۲-۱ اعداد فازی مثلثی

فرض کنید  $\tilde{F}(R)$  مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی روی خط حقیقی  $R$  باشد. عدد فازی مثلثی  $\tilde{A} (\in \tilde{F}(R))$  با سه تایی مرتب  $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_p)$  تعریف می شود. تابع عضویت به صورت زیر نشان داده شده است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_r - a_1} & a_1 \leq x \leq a_r \\ \frac{a_p - x}{a_p - a_r} & a_r \leq x \leq a_p \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1)$$



شکل ۱. عدد فازی  $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_p)$

**تذکره ۱-۲.** اگر  $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_r)$  عدد فازی مثلثی باشد، آن گاه  $-\tilde{A} = (-a_r, -a_r, -a_1)$  هم یک عدد فازی مثلثی است.

**تذکره ۲-۲.** عدد فازی مثلثی صفر را به صورت  $\tilde{0} = (0, 0, 0)$ ، نشان می‌دهند.

### ۲-۲ عدد فازی مثلثی چپ

عدد فازی مثلثی چپ به صورت  $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_r)$  است. در این تعریف  $a_r > a_1$  و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq a_r \\ \frac{x - a_1}{a_r - a_1} & a_1 \leq x \leq a_r \\ 0 & x \leq a_1 \end{cases} \quad (2)$$

### ۳-۲ عدد فازی مثلثی راست

عدد فازی مثلثی راست به صورت  $\tilde{A} = (a_1, a_r, a_r)$  است. در این جا  $a_r > a_1$  و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a_r \\ \frac{a_r - x}{a_r - a_1} & a_1 \leq x \leq a_r \\ 0 & x \geq a_1 \end{cases} \quad (3)$$

### ۳ برنامه ریزی خطی چند هدفه با ضرایب فازی

در حالت کلی مساله برنامه ریزی خطی چندهدفه با ضرایب فازی را به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \tilde{Z} = [\tilde{Z}^1, \tilde{Z}^2, \tilde{Z}^3, \dots, \tilde{Z}^k] \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\ & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_r, \\ & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j = \tilde{b}_i \quad i = m_r + 1, m_r + 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

به طوری که:

$$\tilde{Z}^k = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^k x_j \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$$

**تذکره ۱-۳.** فرض کنید  $k \in T \subseteq \{1, 2, 3, \dots, k\}$  یک مجموعه اندیس باشد. هم چنین فرض کنید برای هر  $k \in T$  تابع هدف  $\tilde{Z}^k$ ، ماکزیم سازی باشد. در این صورت از تبدیل زیر استفاده می شود:

$$\text{Maximize } \tilde{Z}^k = -\text{Minimize } (-\tilde{Z}^k) \quad (5)$$

**فرض ۱.** ضرایب در توابع هدف، محدودیت ها و هم چنین مقادیر سمت راست محدودیت ها با اعداد فازی مثلثی مثبت به صورت زیر تعریف می شود [۵]:

اعداد فازی مثلثی راست به صورت  $\tilde{c}_j^k = (c_j^k, c_j^k, c_j^k + p_j^k)$  با تلورانس  $p_j^k > 0$  برای تابع هدف  $\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^k x_j$  که در آن  $k = 1, 2, \dots, K$ .

اعداد فازی مثلثی چپ به صورت  $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} - d_{ij}^0, a_{ij}, a_{ij})$  با تلورانس  $d_{ij}^0 < a_{ij}$  و همین طور

$\tilde{b}_i = (b_i - b_i^0, b_i, b_i)$  با تلورانس  $b_i^0 < b_i$  برای  $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i$  که در آن  $i = 1, 2, \dots, m_1$ .

اعداد فازی مثلثی راست به صورت  $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, a_{ij}, a_{ij} + d_{ij}^0)$  با تلورانس  $d_{ij}^0 > 0$  و هم چنین

$\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$  با تلورانس  $b_i^0 > 0$  برای  $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i$  که در آن  $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$ .

اعداد فازی مثلثی به صورت  $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} - d_{ij}^1, a_{ij}, a_{ij} + d_{ij}^r)$  با تلورانس های  $b_{ij}^r > 0$ ،  $b_{ij}^1 > a_{ij}$  و هم چنین

$\tilde{b}_i = (b_i - b_i^1, b_i, b_i + b_i^r)$  با تلورانس  $b_i^1 < b_i$ ،  $b_i^r > 0$  برای  $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j = \tilde{b}_i$  که در آن  $i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m$ .

**تذکره ۲-۳.** فرض کنید  $k \in T \subseteq \{1, 2, 3, \dots, k\}$  یک مجموعه اندیس باشد. هم چنین فرض کنید برای هر  $k \in T$  تابع هدف  $\tilde{Z}^k$ ، ماکزیم سازی باشد. در این صورت  $\tilde{c}_j^k$  با عدد فازی مثلثی به صورت  $\tilde{c}_j^k = (c_j^k - p_j^k, c_j^k, c_j^k)$  با تلورانس  $p_j^k < c_j^k$  مشخص می گردد.

اکنون برای محاسبه ی کران های بالا ( $U_k$ ) و کران های پایین ( $L_k$ ) مربوط به توابع هدف که تعداد آن ها  $K$  تا است، ابتدا زیر مساله های زیر که همگی به صورت برنامه ریزی خطی کلاسیک می باشند تشکیل می شوند [۵]:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z^{k1} &= \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\tau} = \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\tau} = \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - b_i^{\circ} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^{\circ} \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - b_i^l \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^r \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m. \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\tau} = \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - b_i^{\circ} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^{\circ} \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - b_i^l \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^r \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\Delta} = \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j \leq b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j \geq b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j \leq b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\varphi} = \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j \leq b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j \geq b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j \leq b_i \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & Z^{k\nu} = \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j \geq b_i - b_i^{\circ} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j \leq b_i + b_i^{\circ} \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j \geq b_i - b_i^l \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j \leq b_i + b_i^r \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z^k &= \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j \\
 \text{s.t. } & \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j \geq b_i - b_i^{\circ} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j \leq b_i + b_i^{\circ} \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j \geq b_i - b_i^l \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j \leq b_i + b_i^r \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{13}$$

#### ۴ حل مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه فازی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد  $U_k$  و  $L_k$  به ترتیب کران پایین و کران بالا برای تابع هدف  $k$ ام هستند ( $k = 1, 2, 3, \dots, K$ ).

به لحاظ تئوری  $L_k$  عبارت است از پایین‌ترین سطح قابل دسترسی توسط تابع هدف  $k$ ام، نسبت به تمام حالات ممکن و هم‌چنین  $U_k$  عبارت از بالاترین سطح قابل دسترسی توسط تابع هدف  $k$ ام، نسبت به تمام حالات ممکن است. در این حالت با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی، مدل فازی را تشکیل داده و سپس با استفاده از روش زیمرمن، مدل فازی را تبدیل به مدل کلاسیک نموده و سپس حل می‌گردد. مراحل کار به شرح زیر است [۵]:

گام اول: حل زیرمساله‌های برنامه‌ریزی خطی (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) برای تابع هدف  $K$  ام.

$$(k = 1, 2, 3, \dots, K)$$

گام دوم: تعیین مقدار متناظر برای هر تابع هدف نسبت به هر یک از جواب‌ها برای نتایج حاصل از گام اول.

گام سوم: تعیین کران بالا ( $U_k$ ) و کران پایین ( $L_k$ ) برای تابع هدف  $k$ ام به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
 L_k &= \min \left\{ Z^k (X^{rs*}) \right\} & k &= 1, 2, 3, \dots, K \\
 & 1 \leq r \leq K \\
 & 1 \leq s \leq \lambda \\
 U_k &= \max \left\{ Z^k (X^{rs*}) \right\} & k &= 1, 2, 3, \dots, K \\
 & 1 \leq r \leq K \\
 & 1 \leq s \leq \lambda
 \end{aligned} \tag{14}$$



گام چهارم: فرموله کردن مدل فازی به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } \{x_j : j = 1, 2, 3, \dots, n\} \\
 & \text{s.t.} \\
 & Z_k \lesssim L_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, K, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \gtrsim b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \lesssim b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_r, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \cong b_i \quad i = m_r + 1, m_r + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{15}$$

مجموعه فازی  $\tilde{G}_k$  برای نامساوی  $Z_k \lesssim L_k$  منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{G}_k}(U_k) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^n c_j^k x_j > U_k \\ \frac{U_k - \sum_{j=1}^n c_j^k x_j}{\sum_{j=1}^n p_j^k x_j + M} & \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \leq U_k \leq \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j + M_k \\ 1 & U_k \geq \sum_{j=1}^n (c_j^k + p_j^k) x_j + M_k \end{cases} \tag{16}$$

که در آن  $M_k = U_k - L_k$  برای  $(k = 1, 2, 3, \dots, K)$ .

مجموعه‌های فازی  $\tilde{C}_i$  برای نامساوی‌های  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \gtrsim b_i$  منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های

فازی به صورت زیر است:  $(i = 1, 2, 3, \dots, m_1)$

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i \\ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i}{\sum_{j=1}^n d_{ij}^{\circ} x_j + b_i^{\circ}} & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j - b_i^{\circ} \leq b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ 1 & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^{\circ}) x_j - b_i^{\circ} \geq b_i \end{cases} \quad (17)$$

مجموعه‌های فازی  $\tilde{C}_i$  را برای نامساوی‌های  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \lesseqgtr b_i$  منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است ( $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_r$ ).

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j > b_i \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n d_{ij}^{\circ} x_j + b_i^{\circ}} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \leq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j + b_i^{\circ} \\ 1 & b_i \geq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^{\circ}) x_j + b_i^{\circ} \end{cases} \quad (18)$$

مجموعه‌های فازی  $\tilde{C}_i$  را برای تساوی‌های  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \cong b_i$  منظور می‌شود. توابع عضویت برای این مجموعه‌های فازی به صورت زیر است: ( $i = m_r + 1, m_r + 2, \dots, m$ ).

$$\mu_{\tilde{C}_i}(b_i) = \begin{cases} \frac{b_i - \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j + b_i^r}{\sum_{j=1}^n d_{ij}^l x_j + b_i^r} & \sum_{j=1}^n (a_{ij} - d_{ij}^l) x_j - b_i^r \leq b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ \frac{\sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j + b_i^l - b_i}{\sum_{j=1}^n d_{ij}^r x_j + b_i^l} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \leq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}^r) x_j + b_i^l \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

**تذکره ۴-۱.** چنانچه برخی از توابع هدف به صورت ماکزیم سازی باشند، (بدون کاستی از کلیت موضوع، فرض کنید  $K_1$  تای اول) در این حالت برای  $k = 1, 2, 3, \dots, K_1$  عبارت  $-Z_k \leq -U_k$  جایگزین  $K_1$  تا محدودیت اول در (۱۵) شده و در این حالت مدل فازی به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } \{x_j : j = 1, 2, 3, \dots, n\} \\
 & \text{s.t.} \\
 & Z_k \gtrsim U_k \quad k = K_1 + 1, K_1 + 2, \dots, K, \\
 & Z_k \lesssim L_k \quad k = K_1 + 1, K_1 + 2, \dots, K, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \gtrsim b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \lesssim b_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_r, \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \cong b_i \quad i = m_r + 1, m_r + 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned} \tag{20}$$

توابع عضویت برای  $K_1$  محدودیت اول در (۲۰)، که به عنوان مجموعه های فازی  $\tilde{G}_k$  در نظر گرفته شده اند، با جایگزین کردن عبارت  $-\sum_{j=1}^n c_j^k x_j$  به جای  $\sum_{j=1}^n c_j^k x_j$  و همچنین  $-U_k$  به جای  $L_k$  در (۱۹) به صورت زیر تعیین می شوند:  $(k = 1, 2, 3, \dots, K_1)$ .

$$\mu_{\tilde{G}_k}(L_k) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^n c_j^k x_j < L_k \\ \frac{M + L_k - \sum_{j=1}^n (c_j^k - p_j^k) x_j}{\sum_{j=1}^n p_j^k x_j + M} & \sum_{j=1}^n (c_j^k - p_j^k) x_j - M_k \leq L_k \leq \sum_{j=1}^n c_j^k x_j \\ 1 & \sum_{j=1}^n (c_j^k - p_j^k) x_j - M_k \geq L_k \end{cases} \tag{21}$$

که در آن  $M_k = U_k - L_k$  برای  $(k = 1, 2, 3, \dots, K_1)$ .

گام پنجم: فرموله کردن مدل برنامه ریزی خطی کلاسیک با استفاده از روش (max-min) به صورت زیر:

Max  $\lambda$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (c_j^k - \lambda p_j^k) x_j - \lambda (U_k - L_k) &\geq L_k & k = 1, 2, 3, \dots, K_1, \\ \sum_{j=1}^n (c_j^k + \lambda p_j^k) x_j + \lambda (U_k - L_k) &\leq U_k & k = K_1 + 1, K_1 + 2, \dots, K_2, \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda d_{ij}^l) x_j - \lambda b_i^l &\geq b_i & i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}^r) x_j + \lambda b_i^r &\leq b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} - (1-\lambda) d_{ij}^l) x_j + \lambda b_i^r &\leq b_i + b_i^r & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m_3, \\ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + (1-\lambda) d_{ij}^r) x_j - \lambda b_i^l &\geq b_i - b_i^l & i = m_3 + 1, m_3 + 2, \dots, m_4, \\ 0 \leq \lambda \leq 1, x_j &\geq 0 & j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

**تذکر ۴-۲.** همان‌طور که در مساله (۲۲) مشخص است، عبارت‌های  $\lambda x_j$  سبب می‌شود که برنامه‌ریزی خطی فوق، نامحدب باشد. لذا امکان دارد در صورت استفاده از روش‌های معمولی، جواب بهینه به دست آمده جواب سراسری نباشد. بنابراین در این‌جا از روش (fuzzy decisive set method) استفاده می‌شود [۶].

### ۵ مدل تغذیه بهینه برای بیماران مبتلا به هپاتیت در محیط فازی

هپاتیت التهاب گسترده کبدی است که معمولاً منشأ ویروسی دارد. به دلیل فعل و انفعالاتی که طی این بیماری در بدن رخ می‌دهد، بیماران مبتلا به هپاتیت دچار بی‌اشتهایی مفرط می‌شوند و در نتیجه مدت بسیار کوتاهی بخش اعظمی از وزن آنان از بین می‌رود، از این رو اولین نکته رفع بی‌اشتهایی این بیماران است [۷]. انرژی مورد نیاز در این بیماران ۲۵-۴۰ کیلو کالری به ازای کیلوگرم وزن ایده‌آل بدن ویا (مصرف انرژی پایه)  $1/1 - 1/4 \times$  می‌باشد [۸]. لذا می‌بایست میزان دریافتی انرژی روزانه افزایش یابد. اما با توجه به این‌که معمولاً در این بیماران کاهش اشتها، حالت تهوع و استفراغ وجود دارد، دریافت کافی انرژی دچار مشکل می‌شود، به ویژه که مصرف قندهای ساده و چربی‌های اشباع (که از منابع انرژی رژیم غذایی هستند) در این بیماران محدود می‌باشد. از طرفی کبد نقش مهمی در سوخت و ساز بدن دارد و در صورت تخریب آن انرژی کافی به بدن نمی‌رسد. این بیماران برای غلبه بر بی‌اشتهایی باید از غذاهای تحریک کننده اشتها استفاده کنند. در مورد میزان استفاده از مواد مغذی به کارگیری نکات زیر حائز اهمیت است. کربوهیدرات‌ها باید از نوع پیچیده باشد و ۵۵-۵۰ درصد انرژی دریافتی از آن‌ها تأمین شود [۸]. میزان نیاز پروتئین روزانه  $1/5 - 1/2$  گرم به ازای کیلوگرم وزن بدن در روز است که باید بیش از ۶۰ درصد آن از پروتئین با ارزش بالا باشد [۸]. در مورد میزان استفاده از چربی‌ها بر حسب تحمل

بیماری (۳۵-۳۰ درصد کل کالری) توصیه می‌شود. چربی‌های ترانس محدود شده و چربی اشباع نباید بیش از ۷ درصد انرژی را شامل شود. در مورد میزان دریافت ریزمغذی‌ها هم رعایت برخی نکات ضروری است. از میان ویتامین‌ها، ویتامین‌های گروه B، ویتامین C و K توصیه می‌شوند. تفاوت چندانی در مورد میزان استفاده از سایر ویتامین‌ها، املاح و مواد معدنی میان بیماران مبتلا به هپاتیت و افراد عادی جامعه به چشم نمی‌خورد. لذا آنچه که باید در تغذیه بیماران هپاتیتی مورد توجه قرار گیرد تهیه و تنظیم یک رژیم غذایی بر اساس ماکزیمم دریافت روزانه از انرژی و پروتئین است. لذا با در نظر گرفتن این مطلب به پیاده‌سازی مساله رژیم غذایی این بیماران به صورت یک مساله برنامه-ریزی خطی فازی با دو تابع هدف پرداخته شده است. اهداف مورد نظر در این برنامه غذایی عبارتند از ماکزیمم‌سازی انرژی دریافتی و هم‌چنین ماکزیمم‌سازی پروتئین دریافتی ضمن این که سایر احتیاجات غذایی بیمار اعم از ویتامین‌ها، املاح و مواد معدنی و سایر درشت مغذی‌ها نیز مرتفع گردد. مدل تغذیه را در حالت کلی به صورت زیر مطرح می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \tilde{Z}^1 = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^1 x_j \\
 &Max \quad \tilde{Z}^2 = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^2 x_j \\
 &st. \\
 &\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \geq \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\
 &\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{d}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\
 &x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

به طوری که:

$x_j$ : ۱۰۰ گرم از ماده غذایی  $j$ ام که در رژیم غذایی گنجانده شده است.

$\tilde{c}_j^1$ : مقدار تقریبی انرژی دریافتی از ۱۰۰ گرم ماده غذایی  $j$ ام.

$\tilde{c}_j^2$ : مقدار تقریبی پروتئین موجود در ۱۰۰ گرم ماده غذایی  $j$ ام.

$\tilde{a}_{ij}$ : مقدار تقریبی ماده مغذی  $i$ ام در ۱۰۰ گرم از ماده غذایی  $j$ ام.

$\tilde{b}_i$ : میزان مورد نیاز دریافتی روزانه از ماده مغذی  $i$ ام.

$\tilde{d}_i$ : حداکثر میزان مجاز دریافتی از ماده مغذی  $i$ ام.

M: تعداد مواد مغذی به کار گرفته شده.

N: تعداد مواد غذایی به کار گرفته شده.

## ۶ مثال عددی

هدف از ارایه مثال زیر پیشنهاد یک رژیم غذایی بهینه برای افراد مبتلا به هپاتیت می‌باشد. البته رژیم ارایه شده در مثال زیر بهترین رژیم غذایی محسوب نمی‌شود و شاید تنوع غذایی در آن به چشم نیاید ولی این اطمینان وجود دارد که با به کار بستن این رژیم در وعده‌های غذایی زیاد با حجم کم (مثلاً ۶ وعده غذایی در روز) بیشترین میزان انرژی و پروتئین روزانه با توجه به محدودیت‌های مربوطه دریافت می‌شود. البته نقطه قوت این رژیم آن است که براساس داده‌های واقعی (پیاده‌سازی مدل در محیط فازی) شکل گرفته است. در زیر تعداد ۱۸ غذای مفید برای بیماران مبتلا به هپاتیت ذکر شده که برگرفته از تمامی گروه‌های غذایی است. این غذاها شامل نان، پنیر کم چرب، عدس پخته شده، مغز گردو، شکر، سیب، آلو، سینه مرغ، برنج سفید، روغن زیتون، پیاز، ماست کم چرب، اسفناج، گل‌ابی، سیب‌زمینی، ماهی، گوجه فرنگی و شیر کم چرب می‌باشد. به دلیل تفاوت در الگوی غذایی مصرفی افراد، مطالعه موردی روی یک بیمار ۶۵ ساله با شاخص جرم بدن ( $BMI=23/65 \text{ kg/m}^2$ ) انجام گرفته است. بر اساس تحقیقات صورت گرفته، هر گرم چربی حدود ۹ کیلوکالری و هر گرم کربو هیدرات و هر گرم پروتئین حدود ۴ کیلوکالری، انرژی تولید کرده و فیبرها تولید کالری نمی‌کنند [۹]. بر همین اساس و هم‌چنین سایر اطلاعات دیگر احتیاجات غذایی مربوط به حداقل و حداکثر میزان دریافت روزانه از انواع مواد مغذی در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. حداقل و حداکثر نیاز روزانه به مواد مغذی (بیمار، مرد ۶۵ ساله،  $BMI = 23/65 \text{ kg/m}^2$ )

مواد مغذی	حداقل نیاز روزانه	حداکثر نیاز روزانه	مواد مغذی	حداقل نیاز روزانه	حداکثر نیاز روزانه
انرژی (کیلوکالری)	۱۷۵۰	۲۸۰۰	فولات (میکروگرم)	۴۰۰	۱۰۰۰
قند (گرم)	N.D <sup>۱</sup>	۱۲۴	ویتامین B <sub>۱۲</sub> (میکروگرم)	۲/۴	N.D
کربو هیدرات (گرم)	۲۴۰	۳۸۵	کلسیم (میلی گرم)	۱۰۰۰	۲۵۰۰
مجموع فیبر (گرم)	۲۰	۳۵	مس (میلی گرم)	۰/۹	۱۰
چربی (گرم)	۵۸/۳۳	۹۳/۳۳	آهن (میلی گرم)	۱۸	۴۵
پروتئین (گرم)	۸۴	۱۰۵	منزیم (میلی گرم)	۳۲۰	۳۵۰
ویتامین A (IU)	۲۳۳۳	۱۰۰۰۰	منگنز (میلی گرم)	۱/۸	۱۱
ویتامین C (میلی گرم)	۷۵	۲۰۰۰	فسفر (میلی گرم)	۷۰۰	۴۰۰۰
ویتامین E (میلی گرم)	۱۳	۱۰۰۰	سلنیم (میلی گرم)	۵۵	۴۰۰
تیامین (میلی گرم)	۱/۱	N.D	روی (میلی گرم)	۸	۴۰
ریبوفلاوین (میلی گرم)	۱/۱	N.D	پتاسیم (میلی گرم)	۳۵۰۰	N.D
نیاسین (میلی گرم)	۱۴	۳۵	سدیم (میلی گرم)	۵۵۰	۲۳۰۰
ویتامین B <sub>۴</sub> (میلی گرم)	۱/۳	۱۰۰			

<sup>۱</sup> منظور از N.D آن است که مقدار مورد نظر مشخص نیست و یا بررسی نشده است.

متغیرهای تصمیم همان مواد غذایی هستند، حداکثر و حداقل میزان مجاز روزانه برای استفاده از ویتامین‌ها، مواد معدنی و هم‌چنین میزان انرژی دریافتی مجاز روزانه، به عنوان محدودیت‌های مساله در نظر گرفته می‌شوند. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، تعداد ۲۴ محدودیت از نوع " $\geq$ " و تعداد ۲۱ محدودیت از نوع " $\leq$ " وجود دارد. علت این تمایز به خاطر آن است که، اطلاعات مربوط به حداکثر و حداقل دریافتی روزانه از برخی مواد مغذی، نامشخص است.

اکنون مدل تغذیه‌ی فوق به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با دو تابع هدف، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } \tilde{Z}^1 &= \sum_{j=1}^{18} \tilde{c}_j^1 x_j \\ \text{Max } \tilde{Z}^2 &= \sum_{j=1}^{18} \tilde{c}_j^2 x_j \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j=1}^{18} \tilde{a}_{ij} x_j &\geq \tilde{b}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 24, \\ \sum_{j=1}^{18} \tilde{a}_{ij} x_j &\leq \tilde{d}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 21, \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 18. \end{aligned} \tag{24}$$

حال با استفاده از مطالب گذشته مربوط به حل مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی، به حل مثال پرداخته شده است. کلیه محاسبات با استفاده از نرم افزار محاسباتی MATLAB انجام گرفته و هم‌چنین اعداد مربوط به کلیه ضرایب اعم از ضرایب در تابع هدف‌ها، ماتریس ضرایب و اعداد سمت راست محدودیت‌ها در فایل ضمیمه آورده شده است. جواب بهینه مساله (۲۴) در جدول ۲ آمده است (سطح مطلوبیت  $\lambda = 0.486656$ ).

جدول ۲. جواب بهینه مربوط به مساله (۲۴)

$X_1 = 2/8$	$X_{10} = 0/3214$
$X_2 = 1/174.5$	$X_{11} = 0$
$X_3 = 3/0.1592$	$X_{12} = 3/2589$
$X_4 = 0/5$	$X_{13} = 0/84818$
$X_5 = 0/80.67$	$X_{14} = 0$
$X_6 = 0$	$X_{15} = 1/890.68$
$X_7 = 0$	$X_{16} = 0$
$X_8 = 0/2770.1$	$X_{17} = 0/53942$
$X_9 = 0$	$X_{18} = 2$

از آن جا که واحد مواد غذایی بر حسب ۱۰۰ گرم منظور شده است، لذا با تبدیل واحد بر حسب گرم، جواب نهایی مربوط به مقدار هر ماده غذایی موجود در رژیم غذایی در جدول ۳ آورده شده است. باید توجه کرد که رژیم غذایی عنوان شده فقط بر حسب رژیم پرکالری - پر پروتئین که برای بیماران مبتلا به هیپاتیت ضروری است طراحی شده و برای تنوع بخشیدن به آن می‌توان در وعده‌های غذایی متعدد روزانه از آن بهره گرفت. به عنوان مثال، مقدار نان مصرفی روزانه برابر ۲۸۰ گرم است که بنا به سلیقه بیمار می‌تواند در وعده‌های غذایی متعدد مصرف شود به گونه‌ای که میزان کل مصرفی روزانه همان ۲۸۰ گرم باشد.

جدول ۳. مقدار مواد غذایی بر حسب گرم در رژیم پرکالری - پر پروتئین

۸۴/۸۱۸	اسفناج	۰	آلو	۲۸۰	نان سنگک
۰	گل‌ابی	۲۷/۷۰۱	سینه مرغ	۱۱۷/۴۰۵	پنیر کم چرب
۱۸۹/۰۶۸	سیب زمینی پخته	۰	برنج سفید	۳۰۱/۵۹۲	عدس پخته شده
۰	ماهی	۳۲/۱۴	روغن زیتون	۵۰	مغز گردو
۵۳/۹۴۲	گوجه فرنگی	۰	پیاز	۸۰/۶۷	شکر
۲۰۰	شیر کم چرب	۳۲۵/۸۹	ماست کم چرب	۰	سیب

## ۷ نتیجه‌گیری

موضوع تغذیه بهینه فازی به دلیل احتساب عدم قطعیت در داده‌های موجود مرتبط با مواد مغذی در انواع مواد غذایی، بسیار حائز اهمیت است. نیازهای تغذیه‌ای متنوع در افراد، بر اساس جنسیت و نوع فعالیت، میزان فعالیت، موقعیت سلامت و ... بسیار مورد توجه است. حتی افرادی با یک جنس و یک سن، بر اساس منطقه جغرافیایی که زندگی می‌کنند، دارای نیازهای تغذیه‌ای متفاوتی هستند. اهمیت موضوع در ارتباط با افراد با بیماری‌های خاص، به عنوان مثال بیماران مبتلا به هیپاتیت، بیشتر است و کاربرد نظریه فازی در تغذیه این افراد، بیشتر به چشم می‌آید. از مقایسه نتایج حاصل از مدل‌های موجود قبلی و مدل پیشنهادی با استفاده از برنامه‌ریزی چند هدفه فازی در این تحقیق، کارآمدی مدل پیشنهادی به خوبی مشهود است. همان‌طور که مشاهده شد، اعداد به کار رفته در مدل تغذیه بهینه بیماران دیابتی در محیط فازی، به صورت اعداد فازی به کار گرفته شدند که بر این اساس، موضوع عدم قطعیت در داده‌های قبلی را تحت پوشش قرار داده و با دید واقعی به مساله تغذیه نگریسته شد. برخی اوقات، تصورات اشتباهی در مورد مقایسه "منطق فازی" و "واقعیت" وجود دارد. به عنوان مثال، آیا حل مسایل مختلف در محیط فازی به واقعیت نزدیک‌تر است یا در محیط کلاسیک؟ آیا جواب‌هایی که در محیط فازی حاصل می‌شوند، به جواب‌های به دست آمده در حالت کلاسیک، نزدیک هستند؟ در این تحقیق و مطالعات مشابه درمی‌یابیم که، پدیده‌های دنیای واقعی به دلیل عدم قطعیت بایستی در محیط فازی بررسی شوند. هم‌چنین با تغییر دیدگاه‌های قبلی، می‌بایست ملاک عمل و تصمیم‌گیری را در محیط فازی جستجو نمود و سوال دوم را به گونه‌ای دیگر مطرح کنیم. آیا جواب‌هایی که در محیط کلاسیک و قاطع حاصل می‌شوند به جواب‌های



واقعی نزدیک هستند؟ به هر حال روش پیشنهادی در این تحقیق یک روش نوین برای تعیین برنامه رژیم غذایی بیماران هپاتیتی با اهداف از پیش تعیین شده می باشد که یکی از کاربردهای ریاضیات فازی را در علم پزشکی به تصویر می کشد.

## منابع

- [1] Mamat, M., Rokhayati, Y., Mohamad Noor, N., Mohd, I., (2011). Optimizing Human Diet Problem with Fuzzy Price Using Fuzzy Linear Programming Approach, Pakistan Journal of Nutrition 10 (6), 594-598.
- [2] Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K., (1974). On fuzzy mathematical programming, The Journal of Cybernetics, 3, 37-46.
- [3] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., (1970). Decision-making in a fuzzy environment, Management Science 17, B141-B164.
- [4] Zimmermann, H. J., (1987). Fuzzy set, decision making and expert systems, Kluwer Academi Publisher.
- [5] Jana, B., Kumar Roy, T., (2005). Multi-objective Fuzzy Linear Programming and Application in Transportation Model, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 21(2), 243-268.
- [6] Sakawa, M., Yano, H., (1985). Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters. Cybernetics Systems 16, 377-394.
- [7] Mendenhall, C. L., Anderson, S., Weesner, R. E., et al., (1984). Protein-calorie malnutrition associated with alcoholic hepatitis. Am J Med, 76, 211-222.
- [8] Nompleggi, D. J., Bonkovsky, H. L., (1994). Nutritional Supplementation in Chronic Liver Disease: An Analytical Review. Hepatology, 19, 519-533.
- [9] Raffensperger, J. F., (2008). The least-cost low-carbohydrate diet is expensive. Nutr. Res, 28, 6-12.
- [10] USDA National Nutrient Database [http://www.nal.usda.gov/fnic/foodcomp/search/]

## ضمیمه

$$\tilde{C}^1 = \begin{pmatrix} (244, 247, 247) & (70, 72, 72) & (112, 116, 116) & (652, 654, 654) & (384, 387, 387) & (52, 52, 52) & (46, 46, 46) & (165, 165, 165) & (96, 97, 97) \\ (883, 884, 884) & (40, 40, 40) & (61, 63, 63) & (23, 23, 23) & (57, 58, 58) & (91, 93, 93) & (193, 195, 195) & (17, 18, 18) & (49, 50, 50) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}^2 = \begin{pmatrix} (12, 13, 13) & (12, 12/3, 12/3) & (8, 9, 9) & (14, 15, 9/15, 2/2) & (0, 0, 0) & (0/3, 0/3, 0/3) & (0/7, 0/7, 0/7) & (30, 31, 31) & (2, 2, 2) & (0, 0, 0) & (1/1, 1/1, 1/1) \\ (5/1, 5/1, 5/5) & (2/8, 2/9, 2/9) & (0/3, 0/4, 0/4) & (2/5, 2/5, 2/5) & (13/4, 13/4, 13/4) & (0/9, 0/9, 0/9) & (3/3, 3/3, 3/3) \end{pmatrix}$$

در این جا داریم:

$$\tilde{c}_1^1 = (244, 247, 247) \quad \tilde{c}_1^2 = (70, 72, 72)$$

$$\tilde{c}_r^1 = (12, 13, 13), \quad \tilde{c}_r^2 = (12, 12/3, 12/3)$$

همچنین برای دیگر اعداد هم به همین ترتیب است. حداقل و حداکثر مقدار مجاز دریافتی از مواد مغذی به صورت اعداد فازی در زیر آورده شده است.

$$\vec{b} = \left[ \begin{array}{l} (235, 240, 240) (18, 20, 20) (55, 58, 58) (58, 58) (81, 84, 84) (2330, 2333, 2333) (73, 75, 75) (11, 13, 13) (1/1 \text{ و } 1/1) (1/1 \text{ و } 1/1) (1/1 \text{ و } 1/1) \\ (1/5 \text{ و } 1/5) (1/8) (12, 14, 14) (13, 13, 13) (397, 400, 400) (2, 2, 2) (990, 1000, 1000) (0, 8, 9) (16, 18, 18) (316, 320, 320) \\ (695, 700, 700) (51, 55, 55) (78, 81) (349, 350, 350) (545, 550, 550) (1740, 1750, 1750) \end{array} \right]$$

$$\vec{d} = \left[ \begin{array}{l} (124, 124, 126) (385, 385, 387) (35, 35, 37) (93/93, 33/95, 33) (105, 105, 107) (1000, 1000, 1000) (200, 200, 200) \\ (1000, 1000, 1000) (35, 35, 36) (100, 100, 103) (100, 100, 100) (250, 250, 255) (10, 10, 12) (45, 45, 47) (370, 370, 375) \\ (11, 11, 12) (400, 400, 405) (40, 40, 41) (40, 40, 45) (230, 230, 232) (280, 280, 283) \end{array} \right]$$

در این جا داریم:

$$\vec{b}_1 = (235, 240, 240), \vec{b}_r = (18, 20, 20), \vec{d}_1 = (124, 124, 126), \vec{d}_r = (385, 385, 387)$$

هم چنین برای دیگر اعداد هم به همین ترتیب است.

**تذکره:** اعداد اولیه مربوط به میزان مواد مغذی موجود در ۱۰۰ گرم از مواد غذایی مختلف از مرجع اطلاعات وزارت کشاورزی ایالات متحده آمریکا اقتباس شده [۱۰] که به دلیل عدم قطعیت، اعداد فازی مربوطه به صورت زیر داده شده است.

ستون‌های ماتریس قیود مربوط به نامساوی "≥"

ستون‌های ۱ تا ۹

(5/6, 5/6, 5/6)	(2/6, 2/7, 2/7)	(1/7, 1/7, 1/8)	(2/6, 2/6, 2/6)	(99/8, 99/9, 99/9)	(10/3, 10/3, 10/4)	(9/9, 9/9, 9/9)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)
(7/6, 8/6, 8/6)	(0, 0, 0)	(9/7, 9/7, 9/7)	(7/6, 7/6, 7/6)	(0, 0, 0)	(2/3, 2/3, 2/4)	(1/1, 3/1, 4/4)	(0, 0, 0)	(1, 1, 1)
(3/1, 3/1, 3/1)	(1, 1, 1)	(0/4, 0/4, 0/4)	(2/6, 2/6, 2/6)	(0, 0, 0)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/3, 0/3, 0/3)	(3/5, 3/6, 3/6)	(0/2, 0/2, 0/2)
(12, 13, 13)	(12/3, 12/3, 12/4)	(8, 9, 9)	(14/5, 14/5, 14/5)	(0, 0, 0)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/7, 0/7, 0/7)	(31, 30, 31)	(2, 2, 2)
(3, 3, 3)	(4, 4, 4)	(7, 8, 8)	(18, 20, 20)	(0, 0, 0)	(53, 54, 54)	(344, 345, 345)	(19, 21, 21)	(0, 0, 0)
(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(1/4, 1/5, 1/5)	(2/1, 3/1, 3/1)	(0, 0, 0)	(5/4, 6/4, 6/4)	(9/5, 9/5, 9/5)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
(0/5, 0/5, 0/5)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/6, 0/7, 0/7)	(0, 0, 0)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/3, 0/3, 0/3)	(0/3, 0/3, 0/3)	(0, 0, 0)
(0/5, 0/5, 0/5)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/6, 0/7, 0/7)	(0, 0, 0)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/3, 0/3, 0/3)	(0/3, 0/3, 0/3)	(0, 0, 0)
(0/3, 0/4, 0/4)	(0, 0, 0)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/3, 0/3, 0/3)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0, 0, 0)
(0/7, 0/7, 0/15)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0, 0, 0)
(4/6, 4/6, 4/7)	(0/1, 0/1, 0/1)	(1/1, 1/1, 1/1)	(1/1, 1/1, 1/1)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/3, 0/4, 0/4)	(13/4, 13/7, 13/7)	(0/3, 0/3, 0/3)
(0/7, 0/7, 0/7)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/7, 0/7, 0/7)	(0/4, 0/5, 0/5)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/5, 0/6, 0/6)	(0, 0, 0)
(50, 50, 49)	(11, 12, 12)	(179, 181, 181)	(97, 98, 98)	(0, 0, 0)	(33, 33)	(55, 55)	(4, 4, 4)	(1, 1, 1)
(0, 0, 0)	(0/5, 0/6, 0/6)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/2, 0/3, 0/3)	(0, 0, 0)
(107, 107, 105)	(61, 61, 61)	(18, 19, 19)	(98, 98, 98)	(1, 1, 1)	(6, 6, 6)	(6, 6, 6)	(14, 15, 15)	(2, 2, 2)
(0/3, 0/3, 0/4)	(0, 0, 0)	(0/3, 0/3, 0/3)	(1/6, 1/6, 1/6)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
(2/4, 2/4, 3/2)	(0/1, 0/1, 0/1)	(3/3, 3/3, 3/4)	(2/9, 2/9, 2/9)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0/7, 0/7, 0/7)	(1, 1, 1)	(0/1, 0/1, 0/1)
(82, 82, 80)	(55, 55)	(36, 36, 36)	(156, 158, 158)	(0, 0, 0)	(55, 55)	(7, 7, 7)	(29, 29, 29)	(4, 5, 5)
(2/1, 2/1, 2/1)	(0, 0, 0)	(1/3, 1/5, 1/5)	(3/4, 3/4, 3/4)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(0, 0, 0)	(0/3, 0/3, 0/3)
(202, 202, 200)	(133, 134, 134)	(180, 180, 180)	(346, 346, 346)	(0, 0, 0)	(11, 11, 11)	(16, 16, 16)	(226, 228, 228)	(8, 8, 8)
(38, 38, 38, 40/6)	(9, 9, 9)	(2/6, 2/6, 2/8)	(4/8, 4/8, 4/9)	(0/5, 0/6, 0/6)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(27/6, 27/6, 27/6)	(5/2, 5/2, 5/6)
(1/6, 1/6, 1/8)	(0/3, 0/4, 0/4)	(3/1, 3/1, 3/1)	(1/3, 1/3, 1/3)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0/1, 0/1, 0/1)	(1, 1, 1)	(0/4, 0/4, 0/4)
(246, 248, 248)	(85, 86, 86)	(368, 369, 369)	(441, 441, 441)	(2, 2, 2)	(10, 10, 10)	(157, 156, 157)	(256, 256, 256)	(10, 10, 10)
(469, 472, 472)	(40, 40, 40)	(2, 2, 2)	(2, 2, 2)	(0, 0, 0)	(1, 1, 1)	(0, 0, 0)	(73, 74, 74)	(5, 5, 5)
(244, 247, 247)	(70, 71, 71)	(112, 116, 116)	(621, 624, 624)	(384, 387, 387)	(52, 52, 52)	(46, 46, 46)	(165, 165, 165)	(96, 96, 97)

ستون‌های ۱۰ تا ۱۸

(۰,۰)	(۴/۱, ۴/۲, ۴/۳)	(۶/۷, ۶/۸)	(۰/۳, ۰/۴, ۰/۴)	(۹/۷, ۹/۸, ۹/۸)	(۱/۱, ۱/۲, ۱/۳)	(۰,۰)	(۲/۵, ۲/۶, ۲/۶)	(۵, ۱۵, ۱۵, ۱)
(۰,۰)	(۱/۶, ۱/۷, ۱/۷)	(۰,۰)	(۲/۱, ۲/۲, ۲/۲)	(۳/۱, ۳/۱, ۳/۱)	(۲/۲, ۲/۲, ۲/۲)	(۰,۰)	(۱/۲, ۱/۲, ۱/۲)	(۰,۰)
(۱۰۰, ۱۰۰, ۱۰۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۱/۵, ۱/۵, ۱/۵)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۱۵/۳, ۱۵/۳, ۱۵/۳)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۱, ۹, ۲, ۲)
(۰,۰)	(۱/۱, ۱/۱, ۱/۱)	(۵/۱, ۵/۲, ۵/۲)	(۲/۸, ۲/۹, ۲/۹)	(۰/۳, ۰/۴, ۰/۴)	(۲, ۵, ۲, ۵, ۲, ۵)	(۱۳/۴, ۱۳/۴, ۱۳/۴)	(۰/۹, ۰/۹, ۰/۹)	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)
(۰,۰)	(۲, ۲, ۲)	(۵۱, ۵۱, ۵۰)	(۹۳۷۶, ۹۳۷۶, ۹۳۷۲)	(۲۲, ۲۲, ۲۳)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۳۰, ۳۱, ۰, ۳۱, ۰)	(۸۳۳, ۸۳۳, ۸۳۱)	(۱۸۸, ۱۸۹, ۱۸۹)
(۰,۰)	(۷/۳, ۷/۳, ۷/۴)	(۰/۸, ۰/۸, ۰/۸)	(۲۷/۹, ۲۸/۱, ۲۸/۱)	(۴/۱, ۴/۲, ۴/۲)	(۹/۴, ۹/۶, ۹/۶)	(۰,۰)	(۱۲/۴, ۱۲/۷, ۱۲/۷)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)
(۱۴۲, ۱۴۳, ۱۴۳)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۱/۹, ۲, ۲)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۰,۰)
(۱۴۲, ۱۴۳, ۱۴۳)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۱/۹, ۲, ۲)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۱, ۰/۲, ۰/۲)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)
(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۶, ۰/۷, ۰/۷)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۱/۴, ۱/۴, ۱/۴)	(۳, ۵, ۴, ۴)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)
(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۱۸, ۱۹, ۱۹)	(۹, ۱۱, ۱۱)	(۱۹۳, ۱۹۴, ۱۹۴)	(۶, ۷, ۷)	(۲۶, ۲۸, ۲۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۵)	(۱۵, ۱۵, ۱۵)	(۵, ۵, ۵)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۵, ۰/۶, ۰/۶)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۱/۴, ۱/۵, ۱/۵)	(۰,۰)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)
(۱, ۱, ۱)	(۲۳, ۲۳, ۲۳)	(۱۸۲, ۱۸۳, ۱۸۳)	(۹۹, ۹۹, ۹۹)	(۹, ۹, ۹)	(۱۵, ۱۵, ۱۵)	(۳۵, ۳۵, ۳۵)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۱۱۶, ۱۱۷, ۱۱۷)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)
(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۲/۷, ۲/۷, ۲/۷)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۱/۱, ۱/۱, ۱/۱)	(۱/۲, ۱/۳, ۱/۳)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۱۷, ۱۷, ۱۷)	(۷, ۷, ۷)	(۷, ۷, ۷)	(۲۸, ۲۸, ۲۸)	(۵۳, ۵۵, ۵۵)	(۱۱, ۱۱, ۱۱)	(۱۱, ۱۱, ۱۰)
(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۸, ۰/۹, ۰/۹)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۲۹, ۲۹, ۲۹)	(۱۳۳, ۱۳۴, ۱۳۴)	(۴۸, ۴۹, ۴۹)	(۱۱, ۱۱, ۱۱)	(۷, ۷, ۷)	(۱۶۶, ۱۶۸, ۱۶۸)	(۲۴, ۲۴, ۲۴)	(۹۴, ۹۳, ۹۴)
(۰,۰)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۳/۳, ۳/۳, ۳/۳)	(۰/۹, ۱, ۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)	(۳۵, ۳۶, ۵, ۳۶, ۵)	(۰,۰)	(۲/۳, ۲/۵, ۲/۵)
(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۸, ۰/۹, ۰/۹)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)
(۱, ۱, ۱)	(۱۴۶, ۱۴۶, ۱۴۶)	(۲۳۳, ۲۳۴, ۲۳۴)	(۵۵۸, ۵۵۸, ۵۵۸)	(۱۱۷, ۱۱۹, ۱۱۹)	(۵۳۵, ۵۳۵, ۵۳۵)	(۳۵۶, ۳۵۸, ۳۵۸)	(۲۳۷, ۲۳۷, ۲۳۷)	(۱۵۰, ۱۵۰, ۱۵۰)
(۲, ۲, ۲)	(۴, ۴, ۴)	(۶۸, ۷۰, ۷۰)	(۷, ۷, ۷)	(۱, ۱, ۱)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۵۴, ۵۶, ۵۶)	(۵, ۵, ۵)	(۳۹, ۴۱, ۴۱)
(۸۳۳, ۸۴۴, ۸۴۴)	(۴۰, ۴۰, ۴۰)	(۶۱, ۶۳, ۶۳)	(۲۳, ۲۳, ۲۳)	(۵۷, ۵۸, ۵۸)	(۹۱, ۹۳, ۹۳)	(۱۹۳, ۱۹۵, ۱۹۵)	(۱۷, ۱۸, ۱۸)	(۴۹, ۵۰, ۵۰)

ستون‌های ماتریس قیود مربوط به نامساوی " $\leq$ "

ستون‌های ۱ تا ۹

(۵/۶, ۵/۶, ۵/۷)	(۲/۸, ۲/۸, ۲/۸)	(۱/۸, ۱/۸, ۱/۹)	(۲/۶, ۲/۶, ۲/۶)	(۹/۹, ۹/۹, ۹/۱۰)	(۱۰/۴, ۱۰/۴, ۱۰/۵)	(۹/۹, ۹/۹, ۹/۹)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)
(۶/۸, ۶/۸, ۶/۹)	(۰,۰)	(۷/۹, ۷/۹, ۷/۹)	(۶/۷, ۶/۷, ۶/۷)	(۰,۰)	(۲/۴, ۲/۴, ۲/۵)	(۱/۴, ۱/۴, ۱/۵)	(۰,۰)	(۱, ۱, ۱)
(۳/۵, ۳/۵, ۳/۵)	(۱, ۱, ۱)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)	(۶/۵, ۶/۵, ۶/۵)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۳/۶, ۳/۶, ۳/۷)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)
(۱۳, ۱۳, ۱۴)	(۱۲/۴, ۱۲/۴, ۱۲/۵)	(۹, ۹, ۱۰)	(۱۵/۲, ۱۵/۲, ۱۵/۵)	(۰,۰)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۷, ۰/۷, ۰/۷)	(۳۱, ۳۱, ۳۲)	(۲, ۲, ۲)
(۳, ۳, ۳)	(۴, ۴, ۴)	(۸, ۸, ۹)	(۲۰, ۲۲, ۲۲)	(۰,۰)	(۵, ۵, ۵)	(۳۴, ۳۴, ۳۴)	(۲۱, ۲۱, ۲۳)	(۰,۰)
(۰,۰)	(۰,۰)	(۱, ۵, ۱, ۵, ۱, ۶)	(۱/۳, ۱/۳, ۱/۴)	(۰,۰)	(۴/۶, ۴/۶, ۴/۷)	(۹/۵, ۹/۵, ۹/۵)	(۰,۰)	(۰,۰)
(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۷, ۰/۷, ۰/۸)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰,۰)
(۰/۵, ۰/۵, ۰/۵)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰,۰)
(۰/۴, ۰/۴, ۰/۵)	(۰,۰)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)
(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)
(۴/۷, ۴/۸, ۴/۸)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۱/۱, ۱/۱, ۱/۱)	(۱/۱, ۱/۱, ۱/۱)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۵)	(۱۳/۷, ۱۳/۷, ۱۳/۴)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)
(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۰/۵, ۰/۵, ۰/۶)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۷)	(۰,۰)
(۵۰, ۵۱, ۵۱)	(۱۲, ۱۲, ۱۳)	(۱۸۱, ۱۸۱, ۱۸۳)	(۹۸, ۹۸, ۹۹)	(۰,۰)	(۳, ۳, ۳)	(۵, ۵, ۵)	(۴, ۴, ۴)	(۱, ۱, ۱)
(۰,۰)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۷)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۴)	(۰,۰)
(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۶, ۶, ۶)	(۱۹, ۱۹, ۲۰)	(۹۸, ۹۸, ۹۸)	(۱, ۱, ۱)	(۶, ۶, ۶)	(۶, ۶, ۶)	(۱۵, ۱۵, ۱۶)	(۲, ۲, ۲)
(۰/۴, ۰/۵, ۰/۵)	(۰,۰)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۱/۶, ۱/۶, ۱/۶)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)
(۲/۴, ۲/۴, ۲/۴)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۳/۳, ۳/۳, ۳/۳)	(۲/۹, ۲/۹, ۲/۹)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۲, ۰/۲, ۰/۲)	(۱, ۱, ۱)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)
(۸, ۸, ۸)	(۵, ۵, ۵)	(۳۶, ۳۶, ۳۶)	(۱۵۸, ۱۵۸, ۱۶۰)	(۰,۰)	(۵, ۵, ۵)	(۷, ۷, ۷)	(۲۹, ۲۹, ۲۹)	(۶, ۵, ۵)
(۲/۱, ۲/۱, ۲)	(۰,۰)	(۱/۵, ۱/۵, ۱/۷)	(۳/۴, ۳/۴, ۳/۴)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰,۰)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)
(۲۰, ۲۰, ۲۰)	(۱۳, ۱۳, ۱۳)	(۱۸۰, ۱۸۰, ۱۸۰)	(۳۴۶, ۳۴۶, ۳۴۶)	(۰,۰)	(۱۱, ۱۱, ۱۱)	(۱۶, ۱۶, ۱۶)	(۲۲۸, ۲۳۰, ۲۳۸)	(۸, ۸, ۸)
(۴۰/۳, ۴۰/۳, ۴۲)	(۹, ۹, ۹)	(۲/۸, ۲/۸, ۳)	(۴/۹, ۴/۹, ۵)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۲۷/۶, ۲۷/۶, ۲۷/۶)	(۵/۶, ۵/۶, ۵/۷)
(۱/۸, ۱/۸, ۲)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)	(۱/۳, ۱/۳, ۱/۳)	(۳/۱, ۳/۱, ۲/۱)	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۱, ۱, ۱)	(۰/۴, ۰/۴, ۰/۴)
(۲۴۸, ۲۴۸, ۲۵۰)	(۸۶, ۸۶, ۸۷)	(۳۶۹, ۳۶۹, ۳۷۰)	(۴۴۱, ۴۴۱, ۴۴۱)	(۲, ۲, ۲)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)	(۱۵, ۱۵, ۱۵)	(۲۵۶, ۲۵۶, ۲۵۶)	(۱۰, ۱۰, ۱۰)
(۴۷۲, ۴۷۲, ۴۷۵)	(۴۰, ۴۰, ۴۰)	(۲, ۲, ۲)	(۲, ۲, ۲)	(۰,۰)	(۱, ۱, ۱)	(۰,۰)	(۷, ۷, ۷)	(۵, ۵, ۵)
(۲۴۷, ۲۴۷, ۲۵۰)	(۷, ۷, ۷)	(۱۶۶, ۱۶۶, ۱۷۰)	(۶۵۴, ۶۵۴, ۶۵۴)	(۳۸۷, ۳۸۷, ۳۹۰)	(۵, ۵, ۵)	(۴۶, ۴۶, ۴۶)	(۱۶۵, ۱۶۵, ۱۶۵)	(۹, ۹, ۹)

(۰٫۰٫۰)	(۴/۲،۴/۲،۴/۳)	(۷/۷،۷/۷)	(۰/۴،۰/۴،۰/۵)	(۹/۸،۹/۸،۹/۹)	(۱/۲،۱/۲،۱/۳)	(۰٫۰٫۰)	(۲/۶،۲/۶،۲/۷)	(۵/۱،۵/۱،۵/۱)
(۰٫۰٫۰)	(۱/۷،۱/۷،۱/۸)	(۰٫۰٫۰)	(۲/۲،۲/۲،۲/۳)	(۳/۱،۳/۱،۳/۲)	(۲/۲،۲/۲،۲/۳)	(۰٫۰٫۰)	(۱/۲،۱/۲،۱/۲)	(۰٫۰٫۰)
(۱۰۰۰،۱۰۰۰،۱۰۰۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۱/۵،۱/۵،۱/۵)	(۰/۴،۰/۴،۰/۴)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۱۵/۳،۱۵/۳،۱۵/۴)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۲/۲،۲/۱)
(۰٫۰٫۰)	(۱/۱،۱/۱،۱/۱)	(۵٫۲،۵٫۲،۵٫۳)	(۲٫۹،۲٫۹،۳)	(۰/۴،۰/۴،۰/۵)	(۲/۵،۲/۵،۲/۵)	(۱۳/۴،۱۳/۴،۱۳/۴)	(۰/۹،۰/۹،۰/۹)	(۳/۳،۳/۳،۳/۳)
(۰٫۰٫۰)	(۲،۲،۲)	(۵۱،۵۱،۵۲)	(۹۳۶،۹۳۶،۹۳۸۰)	(۲۳،۲۳،۲۴)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۳۱۰،۳۱۰،۳۱۱)	(۸۳۳،۸۳۳،۸۳۵)	(۱۸۹،۱۸۹،۱۹۰)
(۰٫۰٫۰)	(۷/۴،۷/۴،۷/۵)	(۰/۸،۰/۸،۰/۸)	(۲۸/۱،۲۸/۱،۲۸/۲)	(۴/۲،۴/۲،۴/۳)	(۹/۶،۹/۶،۹/۸)	(۰٫۰٫۰)	(۱۲/۱،۱۲/۱،۱۳)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)
(۱۴/۳،۱۴/۳،۱۴/۴)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۲/۲،۲/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)	(۰٫۰٫۰)
(۱۴/۳،۱۴/۳،۱۴/۴)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۲/۲،۲/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)	(۰٫۰٫۰)
(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)
(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲۵)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲۵)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)
(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۷،۰٫۷،۰٫۸)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۱/۴،۱/۴،۱/۴)	(۴،۴،۴،۵)	(۰/۶،۰/۶،۰/۶)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)
(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۳،۰/۳،۰/۴)	(۰/۳،۰/۳،۰/۳)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)
(۰٫۰٫۰)	(۱۹،۱۹،۲۱)	(۱۱،۱۱،۱۳)	(۱۹۴،۱۹۴،۱۹۵)	(۷،۷،۸)	(۲۸،۲۸،۳۰)	(۱۵،۱۵،۱۶)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۵،۵،۵)
(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۶،۰/۶،۰/۷)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۱/۵،۱/۵،۱/۶)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)
(۱،۱،۱)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۱۸۳،۱۸۳،۱۸۴)	(۹۹،۹۹،۹۹)	(۹،۹،۹)	(۱۵،۱۵،۱۵)	(۳۵،۳۵،۳۵)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۱۱۷،۱۱۷،۱۱۸)
(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)
(۰/۶،۰/۶،۰/۶)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۲/۷،۲/۷،۲/۷)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۱/۱،۱/۱،۱/۱)	(۱/۳،۱/۳،۱/۳)	(۰/۳،۰/۳،۰/۳)	(۰٫۰٫۰)
(۰٫۰٫۰)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۱۷،۱۷،۱۷)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۷،۷،۷)	(۲۸،۲۸،۲۸)	(۵۳،۵۳،۵۵)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۱۱،۱۱،۱۲)
(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۹،۰/۹،۱)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۰٫۰٫۰)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰٫۰٫۰)
(۰٫۰٫۰)	(۲۹،۲۹،۲۹)	(۱۴۴،۱۴۴،۱۴۵)	(۴۹،۴۹،۵۰)	(۱۱،۱۱،۱۱)	(۷۰،۷۰،۷۰)	(۱۶۸،۱۶۸،۱۷۰)	(۲۴،۲۴،۲۴)	(۹۴،۹۴،۹۵)
(۰٫۰٫۰)	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)	(۳/۳،۳/۳،۳/۳)	(۱،۱،۱)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۴،۰/۴،۰/۴)	(۳۶/۵،۳۶/۵،۳۸)	(۰٫۰٫۰)	(۲/۵،۲/۵،۲/۷)
(۰٫۰٫۰)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۰٫۹،۰٫۹،۱)	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)	(۰/۱،۰/۱،۰/۱)	(۰/۴،۰/۴،۰/۴)	(۰/۳،۰/۳،۰/۳)	(۰/۲،۰/۲،۰/۲)	(۰/۴،۰/۴،۰/۴)
(۱،۱،۱)	(۱۴۶،۱۴۶،۱۴۶)	(۲۳۴،۲۳۴،۲۳۵)	(۵۵۸،۵۵۸،۵۵۸)	(۱۱۹،۱۱۹،۱۲۱)	(۵۳۵،۵۳۵،۵۳۵)	(۳۵۸،۳۵۸،۳۶۰)	(۲۳۷،۲۳۷،۲۳۷)	(۱۵۰،۱۵۰،۱۵۰)
(۲،۲،۲)	(۴،۴،۴)	(۷۰،۷۰،۷۲)	(۷۹،۷۹،۷۹)	(۱،۱،۱)	(۱۰،۱۰،۱۰)	(۵۶،۵۶،۵۸)	(۵،۵،۵)	(۴۱،۴۱،۴۳)
(۸۸۴،۸۸۴،۸۸۵)	(۴۰،۴۰،۴۰)	(۶۳،۶۳،۶۵)	(۲۳،۲۳،۲۳)	(۵۸،۵۸،۵۹)	(۹۳،۹۳،۹۵)	(۱۹۵،۱۹۵،۱۹۷)	(۱۸،۱۸،۱۹)	(۵۰،۵۰،۵۱)