مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره دوم (پیاپی ۷۷)،تابستان ۰۲، ص ص ۱۴۷-۱۳۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش مبتنی بر وزن‌های مشترک برای تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها

علیرضا امیرتیموری[۱*]، ریحانه پارباد[۲]
۱- استاد، گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
۲- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱۲ بهمن ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۶ تیر ۱۴۰۱

چکیده
در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) بهترین واحدهای تصمیم‌گیرنده اندازه کارایی کامل دارند و با مقدار یک نیز نشان داده می‌شوند و به تجربه می‌دانیم که بیشتر از یک واحد در وضعیت کارا قرار می‌گیرند. یکی از موضوعات جالبی که اغلب مورد توجه محققین قرار می‌گیرد تمایز میان عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای (DMU) است که کارایی کامل دارند. نویسندگان مختلف مشکل پیدا کردن بهترین واحد کارا را از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه قرار دادند. با این حال تا جایی که نگارندگان مطلع هستند هیچ تعریف صریحی برای بهترین واحد کارا وجود ندارد. به همین دلیل رویکردهای مختلف، واحدهای متفاوتی را به عنوان بهترین واحد کارا معرفی می نمایند. در مقاله‌ی حاضر با استفاده از مجموعه مرجع همه واحدهای کارای قوی و مجموعه مشترک وزن‌ها یک مدل مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیری ارایه می‌شود. برای این منظور، با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی ساده یک اندازه مقایسه‌ای برای هر واحد تصمیم‌گیری تعریف می‌شود و با استفاده از این اندازه روشی برای رتبه‌بندی واحدهای روی مرز تعیین می‌شود. یک مثال عددی نیز کاربرد رویکرد پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، ورودی/خروجی، رتبه‌بندی، بهترین کارا.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ناپارامتری مبتنی بر مساله برنامه‌ریزی خطی برای شناسایی بهترین واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) با چندین ورودی و خروجی است. این تکنیک اولین بار توسط چارنز و همکاران [۱] معرفی شد و سپس توسط بنکر و همکاران [۲] توسعه یافت. این روش ناپارامتری برای هر واحد

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ateimoori@iaurasht.ac.ir

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

تصمیم‌گیرنده یک مساله برنامه‌ریزی خطی حل می‌کند و وزن‌های تخصیص داده‌شده به هر جمع خطی نتایج حاصل از آن می‌باشد.

در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های استاندارد بهترین عملکردها کارای کامل هستند و بر اساس تجربه می‌دانیم که بیشتر از یک واحد چنین وضعیتی را دارند. یکی از موضوعات جالبی که اغلب مورد توجه محققین قرار می‌گیرد تمایز میان عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای است که کارایی کامل دارند. نویسندگان مختلف مشکل پیدا کردن بهترین واحد کارا را از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه قرار دادند. این دیدگاه‌ها را می‌توان به چهار گروه روش کارایی متقاطع، روش وزن مشترک، روش ابرکارا، و روش بهترین کارا دسته‌بندی نمود. با توجه به این‌که رویکرد پیشنهادی مقاله حاضر بر اساس روش بهترین واحد کارا می‌باشد، برخی از مطالعات صورت گرفته در این زمینه را به اختصار شرح می‌دهیم.

کارساک و آهیسکا [۳] یک مدل تصمیم‌گیری چندمعیاره وزن مشترک (MCDM) برای تعیین بهترین عملکرد با یک ورودی دقیق و چندین خروجی معرفی کردند. مدل آن‌ها دارای یک پارامتر متمایز است که باید در بازه [۰,۱] با آزمون و خطا به درستی انتخاب شود. کارساک و آهیسکا [۴] الگوریتمی پیشنهاد نمودند که ما را قادر می‌سازد تا با اطمینان یک مقدار برای این پارامتر متمایز تعیین نماییم. ارتای و همکاران [۵] یک روش مینیمم-ماکزیمم بر روی داده‌های واقعی ۱۹ گزینه چیدمان تسهیلات به کار بردند. تابع هدف در مدل پیشنهادی آن‌ها شامل پارامتری است که باید با آزمون و خطا به گونه‌ای انتخاب شود تا یک واحد کارای نسبی به‌دست آید.

امین و طلوع [۶] یک مدل تحلیل پوششی داده‌های عدد صحیح معرفی نمودند به طوری که بهترین واحد کارا تعیین شود. آن‌ها ادعا نمودند که مدلشان می‌تواند بهترین واحد کارای CCR را بدون نیاز به n مرتبه حل تعیین نماید. بنابراین مدل آن‌ها به کاربر اجازه می‌دهد تا سریع‌تر به‌نتیجه دست یابد. علاوه بر این مدل پیشنهادی آن‌ها نیازی به استفاده از پارامتری که ارتای و همکاران [۵] استفاده نمودند نیز ندارد. بعد از آن امین [۷] نشان داد که در مدل پیشنهادی امین و طلوع [۶] ممکن است بیش از یک واحد کارا شود. بنابراین او یک مدل اصلاح‌شده برای تعیین یک واحد کارا پیشنهاد نمود. مدل او برای تعیین بهترین واحد کارای CCR زمانی که ماهیت بازده به مقیاس ثابت است، استفاده می‌شود.

طلوع و نعلچیگر [۸] یک مدل برای تعیین بهترین واحد کارای BCC پیشنهاد نمودند. در واقع مدل آن‌ها برای زمانی که بازده به مقیاس متغیر است قابل استفاده می‌باشد. طلوع [۹] برخی مشکلات مدل پیشنهادی طلوع و نعلچیگر [۸] را مطرح نموده و یک مدل MILP برای تعیین بهترین واحد کارای BCC معرفی نمود.

فروغی [۱۰] ادعا نمود که مدل غیرخطی اعداد صحیح مختلط پیشنهادشده توسط امین [۷] در برخی موارد نشدنی است. بنابراین برای رفع نشدنی بودن مدل، یک مدل برنامه‌ریزی خطی اعداد صحیح برای تعیین بهترین واحد کارا از منظر ابر کارایی معرفی نمود. مدل پیشنهادی او شامل محدودیت های غیرضروری زیادی می‌باشد و نیاز به ناحیه اطمینانی برای ورودی‌ها و خروجی‌ها دارد که از صفر شدن وزن‌ها جلوگیری کند. وانگ و ژیانگ [۱۱] سه مدل جایگزین MILP برای تعریف بهترین واحد کارا تحت بازده به مقیاس‌های مختلف ارایه نمودند

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

که تنها شامل محدودیت‌های ضروری و متغیرهای تصمیم‌گیرنده است. هم‌چنین آن ها مدعی شدند که رویکرد پیشنهادیشان بسیار ساده‌تر از مدل فروغی [۱۰] می‌باشد. نکته جالب توجه این است که در رویکرد پیشنهادی وانگ و ژیانگ [۱۱]، سه رویکرد مختلف سه واحد متفاوت را به عنوان بهترین عملکرد معرفی می‌نمایند. اخلاقی و همکاران [۱۲] یک مدل برنامه‌ریزی خطی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای انتخاب یک واحد تصمیم‌گیری کارای منحصربه فرد معرفی کردند.

تمامی مطالعات گذشته نشان می‌دهد که هیچ تعریف دقیق و صریحی برای بهترین واحد کارا وجود ندارد و این مطلب در تمامی مطالعات نادیده گرفته شده است. به همین دلیل رویکردهای مختلف واحدهای متفاوتی را به عنوان بهترین واحد کارا معرفی می‌نمایند. همه مدل‌های پیشنهادی یکی از واحدهای کارا را به عنوان بهترین واحد کارا انتخاب می‌کنند و هیچ تضمینی وجود ندارد که این واحد بهترین کارای واقعی باشد. در برخی از نمونه‌ها یک واحد ابر کارا به عنوان بهترین واحد کارا انتخاب شده است در حالی که در برخی دیگر این‌طور نبوده است. لذا ضرورت ارایه‌ی یک روش منطقی برای پیدا کردن بهترین واحد تصمیم‌گیری محسوس است. برای این منظور پیش از هر چیز باید یک تعریف منطقی از بهترین واحد کارا معرفی شود و سپس بر اساس تعریف ارایه‌شده روشی برای تعیین بهترین واحدتصمیم‌گیرنده معرفی شود. در مقاله حاضر، از رویکرد وزن‌های مشترک استفاده می‌شود و یک اندازه مقایسه برای هر واحد تعریف می‌شود. این اندازه مقایسه برای اولویت‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده می‌شوند. اندازه مقایسه رابطه مستقیم با عملکرد واحدها دارد و بنابراین منعکس‌کننده عملکرد هر واحد می‌باشد.

ساختار بخش‌های آتی مقاله به این صورت است: در بخش بعد مروری بر مفاهیم اولیه خواهیم داشت. روش پیشنهادی تعیین بهترین عملکرد در بخش سوم معرفی می‌شود. مقایسه‌ای میان رویکرد پیشنهادی و مدل‌های موجود در بخش چهارم صورت می‌گیرد. سرانجام در بخش پنجم نتایج ارایه می‌شود.

۲ مروری بر مفاهیم اولیه

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) وجود دارد به طوری که هر واحد تصمیم‌گیرنده $\mathrm{DMU}_j\ (j=1,\dots,n)$ شامل بردار ورودی $\mathbf{x}_j=(x_{1j},\dots,x_{mj})^{\mathrm{T}}$ و بردار خروجی $\mathbf{y}_j=(y_{1j},\dots,y_{sj})^{\mathrm{T}}$ باشد. برای تمایز میان واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا روش‌های رتبه‌بندی مختلفی در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهادشده است. یکی از مهم‌ترین مطالعات صورت گرفته در این زمینه روش ابرکارایی است که بر اساس حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه مرجع انجام می‌شود. دو تکنیک مهم و شناخته‌شده در تحلیل پوششی داده ها مدل AP معرفی‌شده توسط اندرسون و پیترسن [۱۳] و مدل مبتنی بر متغیرهای کمکی توسط تن [۱۴] می‌باشد. فرم ریاضی این دو روش به صورت زیر می‌باشد:

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

$$\begin{aligned}
&Min\ \theta\\
&s.t.\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_{ij}\le\theta x_{io}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_{rj}\ge y_{ro}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
&\lambda_j\ge 0, \qquad j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&Min\ \frac{1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}}{1+\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^+}{y_{ro}}}\\
&s.t.\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=x_{io}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{ro}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
&\lambda_j, s_i^-, s_r^+\ge 0, \qquad \forall i,j,r.
\end{aligned} \tag{2}$$

کارساک و آهیسکا [۳] رویکرد تصمیم‌گیری چند معیاره وزن مشترک را برای انتخاب تکنولوژی معرفی نمودند. هم‌چنین آن‌ها رویکرد پیشنهادی را برای زمانی که خروجی‌های ترتیبی موجود می‌باشد تعمیم دادند. مدل پیشنهادی کارساک و آهیسکا [۳] برای ورودی‌ها و خروجی‌های دقیق به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&Min\quad d_{\max}-k\sum_{j\in E}d_j\\
&s.t.\\
&d_{\max}\ge d_j, \qquad j\in E,\\
&\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{x_j}+d_j=1, \qquad j\in E,\\
&u_r\ge\varepsilon, \qquad r=1,\ldots,s,\\
&d_j\ge 0, \qquad j\in E.
\end{aligned} \tag{3}$$

در مدل فوق d_j انحراف کارایی DMU_j از واحد کارای ایده‌آل می‌باشد. E مجموعه مرجع تمام واحدهای کارای قوی و k نیز پارامتر تمایز می‌باشد که مقدار آن توسط تحلیل‌گر در بازه $[0,1]$ تعیین می‌شود. کارساک و آهیسکا [۴] یک الگوریتم برای تعیین مقدار مناسب پارامتر k ارایه نمودند. الگوریتم پیشنهادی قادر به محاسبه مقادیر پارامتر تمایز k به روش سیستماتیک و قوی می‌باشد بدون آن که تحلیل‌گر ملزم به اختصاص یک گام دلخواه شود. با این حال، نکاتی در خصوص رویکرد پیشنهادی کارساک و آهیسکا [۳] وجود دارد که

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

به آن‌ها اشاره می‌شود. یکی از نکات مهم رویکرد پیشنهادی کارساک و آهیسکا [۳] این است که تنها یک ورودی را در نظر می‌گیرد و زمانی که ورودی‌های متعددی وجود دارد نمی‌توان از این رویکرد استفاده نمود. نکته دیگر تعیین پارامتر تمایز k است که نیاز به تلاش محاسباتی بالا دارد. در آخر، مواردی وجود دارند که بیش از یک واحد در رویکرد پیشنهادی کارا می‌شوند.

وانگ و ژیانگ [۱۱] مدل‌های جایگزی MILP را برای تعریف کاراترین واحد تصمیم‌گیرنده پیشنهاد نمودند که تنها شامل محدودیت‌های ضروری و متغیرهای تصمیم‌گیرنده می‌باشند. آن‌ها مدل MILP زیر را تحت فرض بازده به مقیاس ثابت پیشنهاد نمودند:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m} v_i (\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) - \sum_{r=1}^{s} u_r (\textstyle\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) \\
& s.t. \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le I_j, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{j=1}^{n} I_j = 1, \\
& I_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& u_r \ge \frac{1}{(m+s)\max\{y_{rj}\}}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& v_i \ge \frac{1}{(m+s)\max\{x_{ij}\}}, \qquad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

که در آن $I_j \ (j=1,\dots,n)$ متغیر صفر و یک می باشد. دومین و سومین محدودیت تضمین می‌کنند که تنها بهترین واحد کارا می‌تواند مقدار کارایی بزرگ‌تر از یک داشته باشد در حالی که مقدار کارایی دیگر واحدها کمتر یا مساوی یک می‌باشد.

وانگ و ژیانگ [۱۱] مدل ورودی-محور MILP را تحت فرض بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر معرفی نمودند:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad \sum_{i=1}^{m} v_i (\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) - n v_0 - \sum_{r=1}^{s} u_r (\textstyle\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) \\
& s.t. \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0 \le I_j, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{j=1}^{n} I_j = 1, \\
& I_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& u_r \ge \frac{1}{(m+s)\max\{y_{rj}\}}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& v_i \ge \frac{1}{(m+s)\max\{x_{ij}\}}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& v_0 \quad \text{is free in sign.}
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

مدل خروجی-محور برای پیدا کردن بهترین واحد کارا تحت فرض بازده به مقیاس متغیر نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{r=1}^{s} u_r \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} y_{rj}\right) - n u_0 \\
&s.t. \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_0 - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le \mathrm{I}_j, \qquad j=1,\dots,n, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_0 \ge 0, \qquad j=1,\dots,n, \\
&\sum_{j=1}^{n} I_j = 1, \\
&I_j \in \{0,1\}, \qquad j=1,\dots,n, \\
&u_r \ge \frac{1}{(m+s)\max\{y_{rj}\}}, \qquad r=1,\dots,s, \\
&v_i \ge \frac{1}{(m+s)\max\{x_{ij}\}}, \qquad i=1,\dots,m, \\
&u_0 \quad \text{is free in sign.}
\end{aligned} \qquad (6)
$$

در بخش بعد ابتدا تعریفی برای بهترین واحد کارا ارایه می‌شود. سپس با استفاده از روش وزن‌های مشترک و معرفی یک مساله برنامه‌ریزی خطی ساده روشی برای تعیین بهترین واحد کارا ارایه می‌شود.

۳ تعیین بهترین واحد کارا

در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های کلاسیک، تعیین بهترین واحد کارا از میان واحدهای کارا موضوع جالب توجهی است که مورد توجه بسیاری از محققین تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. بسیاری از محققین به این موضوع توجه عمیقی داشتند و در یک دهه اخیر مطالعات قابل توجه‌ای در این زمینه توسط محققین صورت گرفته است. در بخش پیش به برخی از این مطالعات اشاره شد. در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم که ادعای کارساک و آهیسکا [۳] در خصوص همگرایی الگوریتم به یک واحد کارا، در برخی موارد معتبر نیست. مثال کوچک زیر را با این فرض در نظر بگیرید که واحدهای A، B و C سه خروجی و یک ورودی داشته باشند. داده‌ها در جدول ۱ قابل مشاهده می‌باشد.

جدول ۱. اطلاعات مثال عددی

DMUs	I	۱O	۲O	۳O	d_j
A	۱	۲	۳	۴	۰
B	۱	۳	۴	۲	۰
C	۱	۴	۲	۳	۰

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

روش کارساک و آهیسکا [۳] برای داده‌ها برای دو گام متفاوت ۰/۱ و ۰/۰۱به کار برده شد و در هر دو مورد $d_A = d_B = d_C = 0$. به این معنی که واحدهای A، B و C هر سه بهترین عملکرد را دارند و هیچ تمایزی میان آن ها اعمال نشده است. این نتیجه منطقی به نظر می‌رسد زیرا با مشاهده ورودی و خروجی ها می‌توان دریافت که واحدهای A، B و C عملکرد یکسانی دارند (این فرض در نظرگرفته‌شده که سه خروجی O_1، O_2 و O_3 اهمیت یکسانی دارند). از این رو نباید انتظار تمایز میان واحدهای A، B و C را داشته باشیم. به راحتی می‌توان دریافت که با استفاده از روش کارساک و هاریسکا [۳] با طول گام‌های مختلف داریم $d_A = d_B = d_C = 0$. حال، رویکرد پیشنهادی خود را برای تعیین بهترین واحد کارا به شرح ذیل ارایه می‌دهیم.

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد به طوری که هر $DMU_j : j = 1,\dots,n$ورودی‌های $x_{ij} : i = 1,\dots,m$ را مصرف نموده تا خروجی‌های $y_{rj} : r = 1,\dots,s$ را تولید نماید. تصمیم‌گیرندگان همیشه مقدار کارایی یک را به عنوان سطح معیار مشترک برای هر $DMU_j : j = 1,\dots,n$ در نظر می‌گیرند. این سطح معیار برای اندازه‌گیری انحراف هر DMU_jاز موقعیت ایده‌آل روی مرز استفاده می‌شود. فرض کنید DMU_j یک واحد کارای قوی باشد. دو محدودیت زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - d'_j = 1$$

که در آن $u_r : r = 1,\dots,s$ و $v_i : i = 1,\dots,m$ به ترتیب نشان‌دهنده وزن‌های r امین خروجی و i امین ورودی باشند.

فاصله مجازی میان $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ و موقعیت ایده‌آل یک با نماد d_j نشان داده می‌شود. به طور مشابه، فاصله میان $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ و یک نیز با نماد d'_j نشان داده می‌شود. هدف کاهش فاصله میان d_j و d'_j می‌باشد. برای این منظور، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
& Min \quad d_{\max}^{(1)} + d_{\max}^{(2)} \\
& s.t. \\
& d_{\max}^{(1)} \geq d_j, && j \in E, \\
& d_{\max}^{(2)} \geq d'_j, && j \in E, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + d_j = 1, && j \in E, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - d'_j = 1, && j \in E, \\
& v_i \geq \varepsilon \,,\, u_r \geq \varepsilon, && \forall i, r, \\
& d_j \geq 0 \,,\, d'_j \geq 0, && j \in E.
\end{aligned} \tag{7}$$

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

که در آن E مجموعه مرجع همه واحدهای کارای قوی می‌باشد. محدودیت‌های $d_{\max}^{(1)} \ge d_j$ و $d_{\max}^{(2)} \ge d'_j$ برای اطمینان از $d_{\max}^{(1)} = \underset{1\le j\le n}{Max}\{d_j\}$ و $d_{\max}^{(2)} = \underset{1\le j\le n}{Max}\{d'_j\}$ به مدل اضافه شده‌اند. E_j مجموع وزن‌دارشده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دارشده ورودی‌های DMU_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij}}$$

حال، اندازه مقایسه DMU_p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_p = \frac{E_p}{\max\limits_{1\le j\le n}\{E_j\}}$$

واضح است که $0 < C_p < 1$.

تعریف ۱. واحد تحت ارزیابی DMU_p بهترین عملکرد را دارد اگر و تنها اگر $C_p = 1$.

اندازه مقایسه C_p به طور مستقیم با واحد تحت ارزیابی DMU_p در ارتباط است. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که می‌توان از آن برای تمایز عملکرد واحدها استفاده نمود. به عبارت دیگر، $C_p < C_q$ به این معنی است که عملکرد DMU_q بهتر از DMU_p می‌باشد. معتقدیم که صرف‌نظر از نوع تکنولوژی، بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا باید یک MPSS در تکنولوژی باشد. بنابراین در تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا، منطقی است که آن را میان واحدهای MPSS بیابیم. در ادامه نشان می‌دهیم که بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا یک MPSS است.

قضیه ۱. اگر $C_p = 1$ آن گاه DMU_p یک MPSS است.

اثبات: فرض کنید $(v_i^*, u_r^*, d_j^*, d_j'^*, d_{\min}^*, d_{\max}^*)$ یک جواب بهینه مدل (۷) باشد. بنابراین داریم:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj} + d_j^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij} - d_j'^* = 1$$

یا به طور معادل

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj} \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij} \ge 1$$

از ترکیب دو نامعادله فوق داریم:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ij} \le 0$$

و این یعنی (u^*, v^*) یک جواب شدنی مدل CCR چارنز و همکاران [۱] می‌باشد. از طرف دیگر،

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

$$C_p = \frac{\dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip}}}{\underset{1\le j\le n}{Max}\left\{\dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}\right\}} = 1$$

بنابراین $E_p = 1$ و DMU_p یک MPSS است.

در بخش بعد، به کمک یک مثال عددی، روش پیشنهادی مطالعه حاضر و رویکردهای موجود مورد مقایسه قرار می گیرند.

٤ مثال عددی

جهت تشریح مفهوم عملی رویکرد پیشنهادی برای تعیین بهترین عملکرد از یک نمونه واقعی برگرفته از مقاله وانگ و ژیانگ [۱۱] استفاده شده است. دوازده سیستم تولید انعطاف‌پذیر (FMS) شامل دو ورودی: سرمایه و فضای کار مورد نیاز و چهار خروجی: کیفیت، کار در فرآیند (WIP)، متوسط تعداد کارهای تاخیردار و متوسط بازده می‌باشد. جدول ۲ ورودی‌ها و خروجی‌های ۱۲ سیستم (FMS) را نشان می‌دهد.

جدول ۲. داده‌های ۱۲ سیستم تولید انعطاف‌پذیر

خروجی‌ها				ورودی‌ها		
متوسط بازده	متوسط کارهای تاخیردار	کار در فرآیند	کیفیت	فضای کار	سرمایه	سیستم تولیدی
۳۰/۱	۱۴/۲	۴۵/۳	۴۲	۵	۱۷/۰۲	۱
۲۹/۸	۱۳	۴۰/۱	۳۹	۴/۵	۱۶/۴۶	۲
۲۴/۵	۱۳/۸	۳۹/۶	۲۶	۶	۱۱/۷۶	۳
۲۵	۱۱/۳	۳۶	۲۲	۴	۱۰/۵۲	٤
۲۰/۴	۱۲	۳۴/۲	۲۱	۳/۸	۹/۵	۵
۱۶/۵	۵	۲۰/۱	۱۰	۵/۴	۴/۷۹	٦
۱۹/۷	۷	۲۶/۵	۱۴	۶/۲	۶/۲۱	۷
۲۴/۷	۹	۳۵/۹	۲۵	۶	۱۱/۱۲	۸
۱۸/۱	۰/۱	۱۷/۴	۴	۸	۳/۶۷	۹
۲۰/۶	۶/۵	۳۴/۳	۱۶	۷	۸/۹۳	۱۰
۳۱/۱	۱۴	۴۵/۶	۴۳	۷/۱	۱۷/۷۴	۱۱
۲۵/۴	۱۳/۸	۳۸/۷	۲۷	۶/۲	۱۴/۸۵	۱۲

تفاوت نتایج حاصل از رویکردهای مختلف در جدول ۳ قابل مشاهده است.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

جدول ۳. نتایج مدل‌های مختلف

DMU	CCR	AP	مدل (۲)	مدل (۳)	مدل (٤)	C_p
۱	۱	۱/۰۴۵۶	۰	۰	۰	۰/۹۸۰۵
۲	۱	۱/۰۹۳۲	۰	۰	۰	۰/۹۶۷۶
۳	۰/۹۸۲۴	۰/۹۸۲۴	۰	۰	۰	۰/۸۳۳۵
٤	۱	۱/۱۳۴۵	۰	۱	۱	۰/۹۹۴۰
۵	۱	۱/۱۵۹۷	۱	۰	۰	۱/۰۰۰۰
٦	۱	۱/۰۲۷۹	۰	۰	۰	۰/۵۹۰۹
۷	۱	۱/۰۶۰۲	۰	۰	۰	۰/۶۴۵۷
۸	۰/۹۶۱۴	۰/۹۶۱۴	۰	۰	۰	۰/۷۷۷۷
۹	۱	۱/۴۳۱۷	۰	۰	۰	۰/۳۴۶۱
۱۰	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۳۵	۰	۰	۰	۰/۶۱۳۹
۱۱	۰/۹۸۳۱	۰/۹۸۳۱	۰	۰	۰	۰/۸۱۶۲
۱۲	۰/۸۰۱۲	۰/۸۰۱۲	۰	۰	۰	۰/۷۴۷۱

بر اساس مدل AP واحد شماره ۹ بالاترین رتبه را در میان واحدهای دیگر به‌دست آورده است. با استفاده از مدل (۴) یا همان مدل وانگ و ژیانگ [۱۱] واحد شماره ۵ بالاترین رتبه را دریافت نموده است. این در حالی است که دومین و سومین مدل واحد شماره ۴ را به عنوان واحدی با بالاترین رتبه نشان می‌دهند. این تفاوت نیز تنها به دلیل عدم وجود تعریفی برای بهترین واحد کارا می‌باشد. اندازه مقایسه C_p برای هر DMU_p در ستون آخر جدول ۳ آمده است. نتایج نشان می‌دهد $C_۵ = ۱$ و با توجه به تعریف ۱، واحد شماره ۵ بالاترین رتبه را کسب نموده است. جالب است که این واحد در روش AP رتبه دوم را دریافت نموده است.

۵ نتیجه‌گیری

مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها از سطح الگوی یک به عنوان معیار کارایی واحدهای تصمیم‌گیری استفاده می‌کنند و در کاربردهای عملی معمولا بیش از یک واحد تصمیم‌گیری کارا ظاهر می‌شود. از این رو ایجاد تمایز در بین واحدهای کارای تحلیل پوششی داده‌ها موضوع پر کاربردی است که در سه دهه‌ی اخیر توجه محققین را به خود جلب کرده است. مساله تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا در تحلیل پوششی داده‌ها موضوع جالبی است که در مقطعی توجه تنی چند از محققین را به خود جلب کرده است. درتمامی روش‌های موجود برای تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیرنده فقدان یک تعریف کامل از بهترین واحد محسوس است و از این رو روش‌های مختلف بدون در نظر گرفتن چارچوبی از بهترین واحد، به طور تصادفی یک واحد دلخواه را به عنوان بهترین واحد معرفی می‌کنند. در این مقاله ابتدا تعریفی از بهترین واحد تصمیم‌گیری ارایه شد و در ادامه با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی روشی برای تعیین بهترین واحد تصمیم‌گیرنده کارا در میان تعدادی از واحدها معرفی شد. برای این منظور، یک اندازه مقایسه برای هر واحد تصمیم‌گیری معرفی شد و با استفاده از این

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]

اندازه بهترین واحد معرفی شد. با توجه به این که در روش پیشنهادی از یک مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده‌شده است. بنابراین، تلاش محاسباتی به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از روش‌های موجود می‌باشد.

در مقایسه رویکردهای مختلف (تکنیک ابرکارایی، رویکرد پیشنهادی این مقاله و تکنیک‌های موجود برای تعیین بهترین واحد کارا) یک نکته مهم قابل دریافت است که هیچ یک از روش‌ها یکدیگر را تایید نمی‌کنند. رویکردهای مختلف واحدهای مختلفی را به عنوان بهترین واحد کارا معرفی می‌نمایند. در این مقاله یک تعریف از بهترین واحد کارا ارایه شد و به کمک آن یکی از واحدهای MPSS از مجموعه امکان تولید به عنوان بهترین واحد کارا معرفی شد. این مقاله ادعا نمی‌کند که رویکرد پیشنهادی آن بهترین واحد کارای واقعی را تعیین می‌نماید اما مثال‌های عددی نشان دادند که بهترین عملکرد در رویکرد پیشنهادی بهترین رتبه را در مقایسه با مدل‌های موجود دارد.

منابع

[1] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision-making units, European Journal of Operational Research. 2, 429–444.

[2] Banker R.D., Charnes A., Cooper W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis, Management Science. 30, 1078–1092.

[3] Karsak, E. E., & Ahiska, S. S., (2005). Practical common weight multi-criteria decision-making approach with an improved discriminating power for technology selection. International Journal of Production Research, 43(8), 1537-155.

[4] Karsak, E. E., & Ahiska, S. S. (2008). Improved common weight MCDM model for technology selection. International Journal of Production Research, 46(24), 6933-6944.

[5] Ertay T., Ruan D., Tuzkaya U.R., (2006). Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems, Inf. Sci. 176, 237–262.

[6] Amin G.R., Toloo M., (2007). Finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model, Computers & Industrial Engineering. 52 (2), 71–77.

[7] Amin G.R., (2009). Comments on finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated mode, Computers & Industrial Engineering. 56 (4), 1701–1702.

[8] Toloo M., Nalchigar S., (2009). A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU, Appl. Math. Model. 33, 597–604.

[9] Toloo M., (2012). On finding the most BCC-efficient DMU: A new integrated MIP–DEA model, Applied Mathematical Modelling 36, 5515–5520.

[10] Foroughi A. A., (2011). A new mixed integer linear model for selecting the best decision-making units in data envelopment analysis. Computers and Industrial Engineering, 60, 550–554.

[11] Wang Y. M., Jiang P., (2012). Alternative mixed integer linear programming models for identifying the most efficient decision-making unit in data envelopment analysis, Computers & Industrial Engineering 62, 546–553.

[12] Akhlaghi R., Rostamy-Malkhalifeh M, Amirteimoori A. and Kordrostami S., (2022). A Linear Programming Relaxation DEA Model for Selecting a Single Efficient Unit with Variable RTS Technology. Croatian Operational Research Review, 131, 131-13.

[13] Andersen P., Petersen N. C., A., (1993). procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, Management Science, 39, 1261-1264.

[14] Tone, Ka., (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 143 (1), 32-41.

[DOI: 10.61186/jamlu.20.2.137]