

روش تکرار وردشی چندگامی بهینه برای حل دستگاه همزیستی دو نوع موجود زنده بر هم اثرگذار

صادق پورجعفر^۱، زینب آیاتی^{۲*}

۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

۲- استادیار، دانشگاه گیلان، دانشکده فنی شرق، گروه علوم مهندسی، رودسر، ایران

رسید مقاله: ۲۷ بهمن ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۸ مرداد ۱۴۰۱

چکیده

در این مقاله، یک تعمیم جدید از روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل شکار و شکارچی که بیانگر همزیستی دو نوع موجود زنده بر هم اثرگذار می‌باشد، ارائه شده است. تابع خطا برای هر معادله و در نتیجه حداکثر خطا در بازه مفروض برای تکرارهای متوالی، به دست آمده است. بازه مفروض به n زیر بازه با طول یکسان تقسیم گردیده و یک تکرار بهینه از VIM بر اساس به حداقل رساندن حداکثر خطا در اولین زیر بازه، انتخاب شده است. سپس، یک روش تکرار وردشی چندگامی جدید اعمال می‌گردد. در روش پیشنهادی، روش تکرار وردشی فقط در اولین زیر بازه ویژه اجرا و از مقدار جواب در پایان هر گام به عنوان شرط اولیه گام بعدی مجدداً در اولین زیر بازه استفاده شده است. در پایان، جواب هر زیر بازه به مکان واقعی آن انتقال داده شده است. نشان داده شده که خطای جواب به دست آمده با روش پیشنهادی به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی: روش تکرار وردشی، روش تکرار وردشی چندگامی، دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل، جواب بهینه، گونه‌های بیولوژیکی.

۱ مقدمه

همانطور که می‌دانیم، مدل بسیاری از پدیده‌های طبیعی منجر به معادلات دیفرانسیل غیرخطی در علوم مختلف می‌شود و به دست آوردن جواب‌های تحلیلی یا عددی با دقت مناسب بسیار مهم است. به منظور دستیابی به این هدف، روش‌های مختلفی برای معادلات خطی و غیرخطی تا کنون ارائه داده شده است، مانند روش آشفتگی هموتوبی [۱-۳] (HPM)، روش تجزیه آدومین [۴-۶] (ADM)، روش تکراری وردشی [۷-۱۳] (VIM)، روش آنالیز هموتوبی [۱۴] (HAM)، روش مجانبی هموتوبی بهینه [۱۵] (OHAM)، و غیره [۱۶-۲۴]. در تمامی این

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Zainab.ayati@guilan.ac.ir & ayati.zainab@gmail.com

روش‌ها برای رسیدن به دقت مورد نظر، مجبور به اجرای تکرارهای بیشتری از روش هستیم که مستلزم محاسبات بیشتر و در نتیجه بالا رفتن خطای محاسباتی می‌باشد. در این مقاله سعی شده با تقسیم بازه و تعیین تعداد تکرار بهینه حداکثر خطا مینیمم گردد.

در مقاله حاضر، سیستم معادلات شناخته شده زیر به نام شکار و شکارچی که اغلب برای توصیف پویایی سیستم‌های بیولوژیکی استفاده می‌شود در نظر گرفته می‌شود که در آن دو گونه با هم تعامل دارند، یکی به عنوان شکارچی و دیگری به عنوان طعمه.

$$\begin{cases} \frac{dn_1(t)}{dt} = n_1(t) \left[K_1 - \gamma_1 n_1(t) - \int_{t-T_1}^t f_1(t-s)n_2(s)ds \right], \\ \frac{dn_2(t)}{dt} = n_2(t) \left[-K_2 + \gamma_2 n_1(t) + \int_{t-T_2}^t f_2(t-s)n_1(s)ds \right], \end{cases} \quad (1)$$

در معادلات بالا، $\gamma_1, \gamma_2, K_1, K_2$ پارامترهای معلوم هستند و $n_1(0), n_2(0)$ به عنوان شرایط اولیه داده شده‌اند. n_1 تعداد شکارچی‌ها و n_2 تعداد طعمه‌ها می‌باشد. معادله اول به معادله شکار و معادله دوم به معادله شکارچی معروف هستند. k_1 شاخص رشد شکارشدن، γ_1 شاخص رشد شکارها، $\gamma_2 n_1 n_2$ نشان‌دهنده افزایش جمعیت شکارچی‌ها و $k_2 n_2$ نشان‌دهنده مرگ طبیعی آنهاست. این معادله اولین بار توسط لوتکا و ولترا معرفی شده و به همین دلیل به معادله لوتکا - ولترا نیز شناخته شده است.

در این مقاله دستگاه معادلات شکار و شکارچی با دو روش نیمه عددی تکرار وردشی و روش تکرار وردشی چندگامی بهینه حل می‌شود در روش تکرار وردشی چندگامی بهینه نخست سعی می‌شود تکرار مناسبی از VIM بر اساس مینیمم کردن ماکزیمم خطا در اولین زیر بازه انتخاب گردد. سپس اجرای VIM در زیر بازه نخست برای هر گام صورت گرفته، نهایتاً جواب‌های به دست آمده به زیر بازه اصلی، انتقال می‌یابند.

۲ روش‌های تکرار وردشی و تکرار وردشی چندگامی بهینه

روش تکرار وردشی توسط J. He در سال ۱۹۹۸ پیشنهاد شده است و بسیاری از مسایل را با تقریبی قابل قبول حل می‌کند [۱۶-۱۸]. معادله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$G(x) = g(x).$$

فرض کنید $G(x)$ را به دو قسمت که یکی از آن‌ها یک عملگر خطی و دیگری یک عملگر غیرخطی است و به ترتیب با L و N نشان داده می‌شود، تقسیم نمودیم. بنابراین معادله به صورت زیر تغییر می‌کند

$$L(x) + N(x) = g(x), \quad (2)$$

که $g(x)$ یک تابع تحلیلی است. ابتدا بر اساس VIM یک تابع تصحیح ساخته شده، سپس معادله پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \int_0^x \lambda(s)(LU_n(s) + N\tilde{U}_n(s) - g(s))ds. \quad (3)$$

که λ را ضریب لاگرانژ نامند [۱۹]، و مقدار بهینه آن توسط VIM به دست می آید [۲۰]. اندیس " n " تقریب مرتبه n -ام را نشان می دهد. $\tilde{U}_n$ نشان دهنده تغییرات محدود است، یعنی $\delta \tilde{U}_n = 0$ تقریب اولیه قابل دستیابی با توجه به شرایط اولیه است.

با محاسبه مقدار بهینه λ و جایگذاری در (۳)، و با استفاده از محاسبات متوالی از رابطه (۳)، می توان تقریب مطلوبی از جواب را به دست آورد. همگرایی این روش و کران خطای جواب به دست آمده در هر مرحله در [۲۵] بیان شده است.

معمولاً برای حل مساله توسط MVIM، بازه مورد نظر را به چند زیر بازه تقسیم کرده و برای هر کدام از آنها VIM اعمال می شود، مقدار جواب در نقطه انتهایی هر زیربازه به عنوان مقدار اولیه بازه بعدی در نظر گرفته می شود. انگیزه این عمل استفاده از بسط جواب در بازه ای با شعاع کمتر در نزدیکی شرط اولیه به منظور مینیم کردن خطای جواب به دست آمده است. ولی ایده مقاله استفاده از تکرار مناسبی از VIM با هدف به حداقل رساندن حداکثر خطا در اولین زیربازه مناسب است. سپس VIM برای هر زیر بازه تنها در اولین زیربازه و با شرایط اولیه مقادیر آخر هر گام برای ابتدای گام بعدی صورت گرفته، نهایتاً جواب هر گام به زیربازه اصلی منتقل می شود. نشان داده می شود که MVIM به کار رفته در این مقاله خطایی بسیار کمتر و قابل ملاحظه نسبت به VIM و MVIM معمولی دارد.

برای به کار بردن روش های مذکور روی معادله (۱)، طرح تکراری زیر نوشته می شود

$$\begin{cases} n_{i,n+1}(t) = n_{i,n}(t) + \int_0^t \left(\frac{dn_{i,n}(\xi)}{d\xi} - n_{i,n}(\xi) \left[K_i - \gamma_i n_{r,n}(\xi) - \int_{\xi-T}^{\xi} f_i(\xi-s) n_{r,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \\ n_{r,n+1}(t) = n_{r,n}(t) + \int_0^t \left(\frac{dn_{r,n}(\xi)}{d\xi} - n_{r,n}(\xi) \left[-K_r + \gamma_r n_{i,n}(\xi) + \int_{\xi-T}^{\xi} f_r(\xi-s) n_{i,n}(s) ds \right] \right) d\xi. \end{cases} \quad (4)$$

با در نظر گرفتن تابع تصحیح زیر

$$\begin{cases} n_{i,n+1}(t) = n_{i,n}(t) + \int_0^t \lambda_i(\xi) \left(\frac{dn_{i,n}(\xi)}{d\xi} - \tilde{n}_{i,n}(\xi) \left[K_i - \gamma_i \tilde{n}_{r,n}(\xi) - \int_{\xi-T}^{\xi} f_i(\xi-s) \tilde{n}_{r,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \\ n_{r,n+1}(t) = n_{r,n}(t) + \int_0^t \lambda_r(\xi) \left(\frac{dn_{r,n}(\xi)}{d\xi} - \tilde{n}_{r,n}(\xi) \left[-K_r + \gamma_r \tilde{n}_{i,n}(\xi) + \int_{\xi-T}^{\xi} f_r(\xi-s) \tilde{n}_{i,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \end{cases} \quad (5)$$

و با توجه به ویژگی تغییرات محدود یعنی $\delta \tilde{n}_{i,n} = 0$ ، ضرایب لاگرانژ را از شرایط زیر به دست

می آوریم:

$$\begin{cases} \lambda_i'(\xi) = 0, & 1 + \lambda_i(\xi)|_{\xi=t} = 0, \\ \lambda_r'(\xi) = 0, & 1 + \lambda_r(\xi)|_{\xi=t} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

از حل معادلات بالا داریم $\lambda_i = \lambda_r = -1$.

بنابراین (۵) به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{cases} n_{\lambda,n+1}(t) = n_{\lambda,n}(t) - \int_0^t \left(\frac{dn_{\lambda,n}(\xi)}{d\xi} - n_{\lambda,n}(\xi) \left[K_{\lambda} - \gamma_{\lambda} n_{\gamma,n}(\xi) - \int_{\xi-T}^{\xi} f_{\lambda}(\xi-s) n_{\gamma,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \\ n_{\gamma,n+1}(t) = n_{\gamma,n}(t) - \int_0^t \left(\frac{dn_{\gamma,n}(\xi)}{d\xi} - n_{\gamma,n}(\xi) \left[-K_{\gamma} + \gamma_{\gamma} n_{\lambda,n}(\xi) + \int_{\xi-T}^{\xi} f_{\gamma}(\xi-s) n_{\lambda,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \end{cases} \quad (V)$$

که $n_{i,n}(\cdot)$, γ_i , K_i و توابع $f_i(\xi-s)$ برای $i=1,2$ معلوم هستند و لذا جواب‌های تقریبی معادله از رابطه فوق قابل محاسبه می‌باشند.

همچنین خطای جواب به‌دست آمده در مرحله k ام، از رابطه زیر به‌دست آمده است

$$\begin{cases} en_{\lambda,k} = \left| \frac{dn_{\lambda,k}(t)}{dt} - n_{\lambda,k}(t) \left[K_{\lambda} - \gamma_{\lambda} n_{\gamma,k}(t) - \int_{t-T}^t f_{\lambda}(t-s) n_{\gamma,k}(s) ds \right] \right|, \\ en_{\gamma,k} = \left| \frac{dn_{\gamma,k}(t)}{dt} - n_{\gamma,k}(t) \left[-K_{\gamma} + \gamma_{\gamma} n_{\lambda,k}(t) + \int_{t-T}^t f_{\gamma}(t-s) n_{\lambda,k}(s) ds \right] \right|. \end{cases}$$

۳ مثال‌های عددی

مساله شکار و شکارچی را به صورت دستگاه زیر از معادلات دیفرانسیل انتگرال در نظر بگیرید [۶]:

$$\begin{cases} \frac{dn_{\lambda}(t)}{dt} = n_{\lambda}(t) \left[K_{\lambda} - \gamma_{\lambda} n_{\gamma}(t) - \int_{t-T}^t f_{\lambda}(t-s) n_{\gamma}(s) ds \right], \\ \frac{dn_{\gamma}(t)}{dt} = n_{\gamma}(t) \left[-K_{\gamma} + \gamma_{\gamma} n_{\lambda}(t) + \int_{t-T}^t f_{\gamma}(t-s) n_{\lambda}(s) ds \right], \end{cases}$$

با شرایط اولیه و مقادیر عددی زیر

$$\begin{cases} n_{\lambda}(\cdot) = 1, K_{\lambda} = 0.2, \gamma_{\lambda} = 0.1, T = 0.1, f_{\lambda}(t-s) = f_{\gamma}(t-s) = e^{-(t-s)}, \\ n_{\gamma}(\cdot) = 1, K_{\gamma} = 0.1, \gamma_{\gamma} = 0.1, \end{cases}$$

ابتدا جواب تقریبی را با روش VIM به‌دست می‌آوریم و سپس، تابع خطا را محاسبه می‌کنیم. ایده ما برای استفاده از MVIM، به حداقل رساندن حداکثر خطا به ویژه در بازه اولیه تکرارها است. نتایج VIM و MVIM با بهترین تکرار در برخی نقاط مقایسه می‌شود.

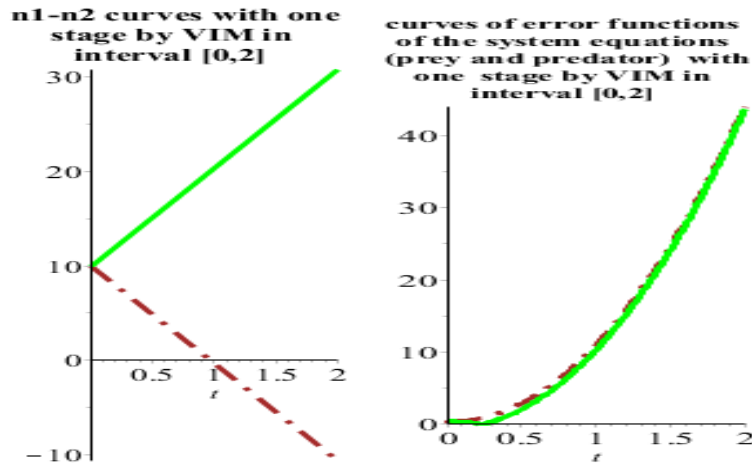
نتایج عددی به کمک VIM

در این بخش چند تقریب اولیه VIM محاسبه می‌شود و حداکثر خطا را در بازه مفروض به‌دست می‌آوریم. در هر تکرار، معادلات تقریبی به‌دست آمده و منحنی‌های آن‌ها رسم شده است. سپس یک تکرار ویژه با کمترین خطا در اولین زیر بازه برای استفاده از MVIM انتخاب شده است. با استفاده از روش ذکر شده، جواب سیستم شکار و شکارچی با اولین تکرار به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} n_{1,1}(t) = 10 - 10/3163 t, \\ n_{1,2}(t) = 10 + 10/4163 t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} en_{1,1}(t) = |0/4874 - 0/8141 t + 11/3004 t^2|, \\ en_{1,2}(t) = |-0/4827 - 0/5038 t + 11/3004 t^2|. \end{cases}$$

منحنی جواب‌های تقریبی و خطاهای اولین تکرار در شکل ۱ رسم شده است.



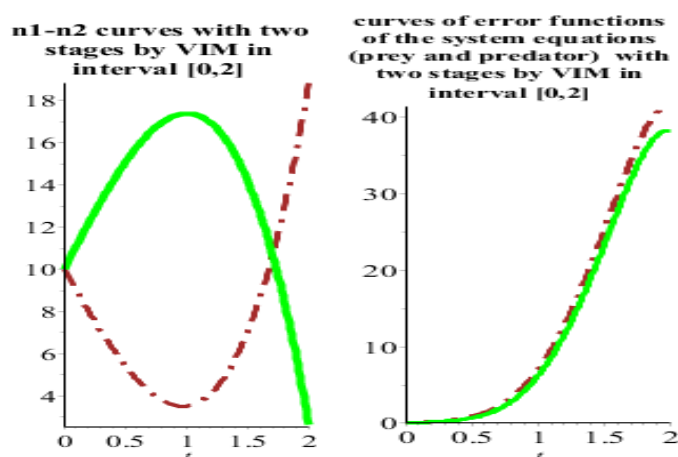
شکل ۱. منحنی جواب و خطای جواب به دست آمده توسط VIM برای تکرار اول در بازه $[0, 2]$

جواب به دست آمده از دستگاه توسط VIM برای مرحله اول منجر به خطای حداکثر برابر $44/0606$ برای معادله شکار و حداکثر خطا معادل با $43/7115$ برای معادله شکارچی در فاصله $[0, 2]$ می‌شود. اما در بازه $[0, 5]$ حداکثر خطاها به ترتیب به $2/9053$ و $2/905$ برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابد.

جواب‌های زیر، جواب‌های تقریبی n_1 ، n_2 و معادلات خطای آن‌ها با استفاده از VIM است که در تکرار دوم و سوم به دست می‌آیند

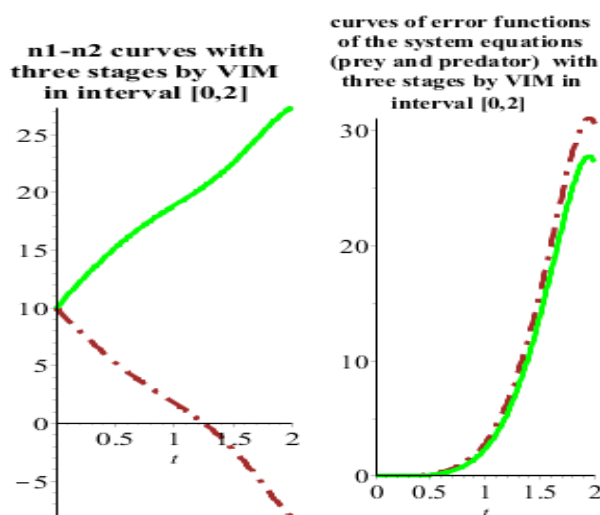
$$\begin{cases} n_{r,1}(t) = 10/00 - 9/8289 t + 3/7669 t^2 - 0/4072 t^3, \\ n_{r,2}(t) = 10/00 + 10/8990 t - 3/7668 t^2 + 0/2519 t^3, \\ en_{r,1}(t) = |0/0210 - 0/4867 t^2 - 0/9486 t + 1/5111 t^3 - 8/1565 t^4 + 1/4921 t^5 - 0/4602 t^6|, \\ en_{r,2}(t) = |0/0249 + 0/5684 t^2 - 1/0845 t + 1/4362 t^2 - 8/1593 t^4 + 1/4921 t^5 - 0/4602 t^6|, \\ n_{r,1}(t) = 10/00 - 9/8080 t + 3/6046 t^2 - 0/8815 t^3 + 0/2132 t^4 - 0/0767 t^5 - 1/6313 t^6 + 0/3778 t^7, \\ n_{r,2}(t) = 10/00 + 10/8740 t - 3/9563 t^2 + 0/7941 t^3 - 0/2137 t^4 + 0/0767 t^5 + 1/6318 t^6 - 0/3590 t^7, \\ en_{r,1}(t) = |-0/0029 - 1/6743 t^4 + 0/4297 t^3 - 0/3210 t^2 + 0/048 t^1 - 0/050 t^0 - 0/0712 t^12 + 0/0620 t^11 \\ + 1/3477 t^7 - 0/2216 t^2 + 1/0473 t^3 + 3/2673 t^6 - 1/6413 t^5 + 0/6138 t^4 + 0/0605 t|, \\ en_{r,2}(t) = |0/0024 - 0/0347 t - 1/6741 t^4 + 0/4298 t^3 - 0/3224 t^2 + 0/048 t^1 - 0/050 t^0 - 0/0712 t^12 \\ + 0/0620 t^11 + 1/5513 t^7 - 0/2197 t^2 + 1/0528 t^3 + 3/4057 t^6 - 1/6952 t^5 - 0/1368 t^4|. \end{cases}$$

منحنی جواب‌های تقریبی و خطاهای تکرار دوم و سوم در شکل های ۲ و ۳ ترسیم شده‌اند.



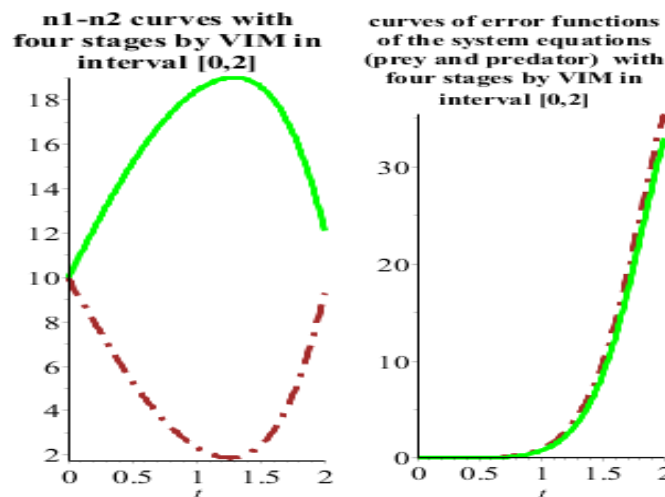
شکل ۲. منحنی ها و خطای جواب بدست آمده توسط VIM برای تکرار دوم در بازه $[0, 2]$.

حداکثر خطای جواب‌های دستگاه توسط VIM در تکرار دوم برای معادله شکار برابر $43/7115$ و برای معادله شکارچی $38/2530$ در بازه $[0, 2]$ می‌باشد. اما در زیر بازه $[0, 0.5]$ ، حداکثر خطاها به ترتیب به $0/8871$ و $0/6970$ برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند. جواب‌های دستگاه توسط VIM در مرحله سوم حداکثر خطا را برای معادله تقریبی شکار برابر $31/1173$ و حداکثر خطا را برای معادله تقریبی شکارچی در فاصله $[0, 2]$ برابر $27/7813$ تعیین می‌کند. در حالی که در بازه $[0, 0.5]$ ، حداکثر خطاها به ترتیب به $0/1800$ و $0/1172$ برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند.

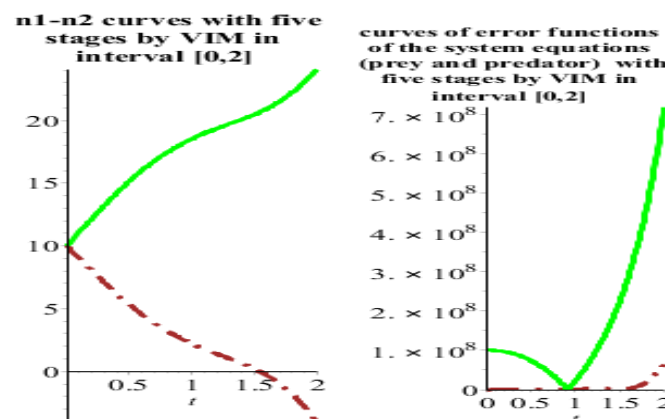


شکل ۳. منحنی ها و خطای جواب به دست آمده توسط VIM برای تکرار سوم در بازه $[0, 2]$.

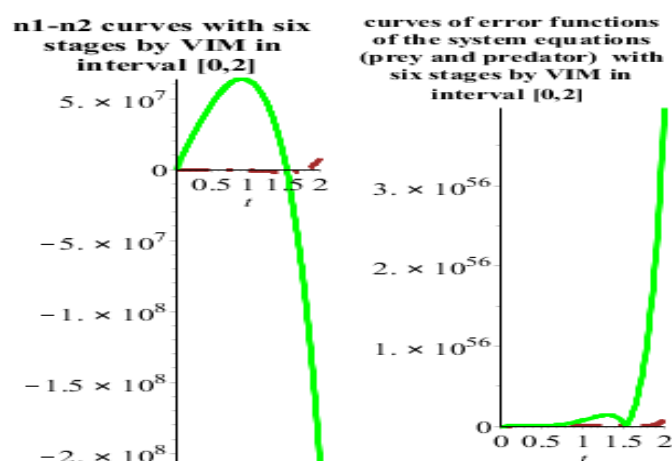
منحنی‌های تکرار چهارم و پنجم معادلات و خطاهای تقریبی توسط VIM بدون تقسیم بازه اولیه در شکل (۴) و (۵) ترسیم شده‌اند. جواب دستگاه توسط VIM برای مرحله چهارم حداکثر خطا را $35/5057$ برای معادله شکار و $32/9151$ برای معادله شکارچی در بازه $[0, 2]$ تعیین می‌کند. اما در بازه $[0, 0.5]$ حداکثر خطاها به ترتیب 0.0289 و 0.0175 برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌کنید، خطای سیستم بسیار افزایش می‌یابد. بنابراین، جواب به‌دست آمده با تکرار پنجم VIM نامطلوب است. با توجه به این که انتظار می‌رود با افزایش تعداد جملات جواب تقریبی، میزان خطا کاهش یابد، متأسفانه وضعیت بدتر می‌شود. جواب با تکرار ششم و هفتم VIM، مانند پنجم، وضعیت مطلوبی ندارد. منحنی‌های وابسته و معادلات خطای آن‌ها در شکل ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند.



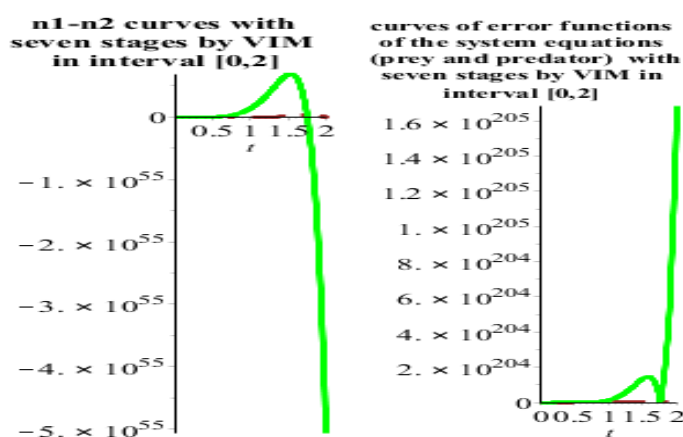
شکل ۴. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار چهارم در بازه $[0, 2]$.



شکل ۵. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار پنجم در بازه $[0, 2]$.



شکل ۶. منحنی‌ها و خطای جواب به دست آمده توسط VIM برای تکرار ششم در بازه $[0, 2]$.



شکل ۷. منحنی‌ها و خطای جواب به دست آمده توسط VIM برای تکرار هفتم در بازه $[0, 2]$.

نتایج عددی به وسیله MVIM

اکنون، با توجه به تکرارهای مختلف VIM، می‌توان بهترین تکرار و زیر بازه اولیه مناسب را انتخاب کرد. این تکنیک گام به گام جدید می‌تواند منجر به جواب‌های بسیار بهتر و خطای کمتر شود. برای مثال ما تکرار چهارم با طول گام 0.5 را در هر زیربازه انتخاب می‌کنیم. بنابراین، معادلات شکار و شکارچی به همراه معادلات خطا در چهار گام به دست می‌آیند. نتیجه حاصل، جواب را بسیار مطلوب و با دقت بیشتر ارایه می‌دهد. به خصوص، دقت این تکنیک بسیار مناسب است.

گام اول: جواب شکار و شکارچی با تکرار چهارم VIM و خطای باقیمانده، با در نظر گرفتن این جواب در بازه $[0, 0.5]$ ، به شرح زیر به دست آمده است.

$$\left\{ \begin{aligned} n_{f,1}(t) &= 1 - 9/81 \cdot 9t + 3/53 \cdot 7t^2 - 0/8512t^3 + 0/68 \cdot 0t^4 - 0/35 \cdot 3t^5 - 1/5 \cdot 85t^6 + 0/7147t^7 + 0/0003t^8 \\ &\quad - 0/0003t^9 - 0/0054t^{10} + 0/0051t^{11} + 0/0391t^{12} - 0/0321t^{13} - 0/1860t^{14} + 0/1309t^{15} \\ n_{f,2}(t) &= 1 + 10/8716t - 3/8830t^2 + 0/8115t^3 - 0/6997t^4 + 0/3592t^5 + 1/6592t^6 - 0/7469t^7 - 0/0003t^8 \\ &\quad + 0/0004t^9 + 0/0055t^{10} - 0/0052t^{11} - 0/0391t^{12} + 0/0322t^{13} + 0/1860t^{14} - 0/1316t^{15} \\ Rn_{f,1}(t) &= 0/0061t + 0/0677t^{10} + 0/1121t^{14} - 0/1993t^{17} - 0/2893t^{18} + 0/4618t^{19} + 0/5539t^{20} - 0/810t^{21} \\ &\quad - 0/6390t^{22} - 0/0001 + 0/9594t^{23} - 0/5513t^{24} - 0/7770t^{25} + 0/2924t^{26} + 0/0001t^{27} + 0/0003t^{28} - 0/0009t^{29} \\ &\quad - 0/0018t^{30} + 0/0045t^{31} + 0/0082t^{32} - 0/0191t^{33} - 0/0330t^{34} + 1/0671 \times 10^{-8}t^{35} - 3/0702 \times 10^{-8}t^{36} \\ &\quad - 3/3563 \times 10^{-7}t^{37} + 9/6443 \times 10^{-7}t^{38} + 0/000004t^{39} - 0/00001t^{40} - 0/00004t^{41} - 0/03025t^{42} - 0/10982t^{43} \\ Rn_{f,2}(t) &= 0/0092t + 0/0679t^{10} + 0/11216t^{14} - 0/2010t^{17} - 0/2943t^{18} + 0/4729t^{19} + 0/5882t^{20} - 0/8553t^{21} \\ &\quad - 0/7807t^{22} + 1/0844t^{23} - 0/2648t^{24} - 0/9624t^{25} + 0/3310t^{26} + 0/0001t^{27} + 0/0003t^{28} - 0/0009t^{29} - 0/0018t^{30} \\ &\quad + 0/0045t^{31} + 0/0082t^{32} - 0/0191t^{33} - 0/0329t^{34} + 1/06719 \times 10^{-8}t^{35} - 3/0702 \times 10^{-8}t^{36} - 3/3563 \times 10^{-7}t^{37} \\ &\quad + 9/6443 \times 10^{-7}t^{38} + 0/000004t^{39} - 0/00001t^{40} - 0/00004t^{41} - 0/0620t^{42} + 0/0215t^{43} - 0/0003 \end{aligned} \right.$$

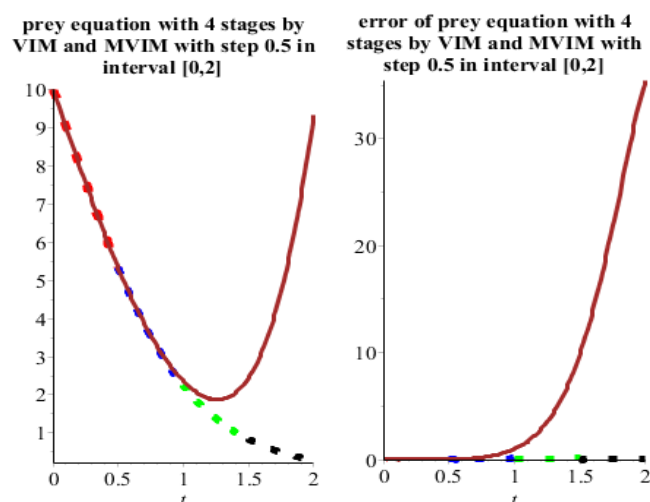
جواب‌ها و معادلات خطا با در نظر گرفتن زیر بازه هر گام به دست می‌آید. سپس با جایگزینی جواب‌های موجود در سیستم مقادیر معادلات و خطاها در نقاط ویژه محاسبه می‌شود.

جدول ۱. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکار در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۵

Prey T	VIM	Eq (VIM)	MVIM	Eq (MVIM)	Eq (VIM) - Eq (MVIM)
۰	۱۰	۰/۰۰۰۱	۱۰	۰/۰۰۰۱	۰
۰/۵	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۰۹	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۹۰	۱/۱ E- ۱۶
۱	۲/۳۵۶۰	۰/۹۹۴۴	۲/۲۴۴۸۶	۰/۱۵۳۳	۰/۸۴۱۰
۱/۵	۲/۴۴۶۷	۹/۹۴۲۳	۰/۸۳۹۰	۰/۱۶۷۲	۹/۷۷۵۱
۲	۹/۳۳۲۱	۳۵/۵۰۵۷	۰/۲۹۹۸	۰/۰۸۷۶	۳۵/۴۱۸۲

جدول ۱ و شکل ۸ دقت MVIM به ویژه با انتخاب تکرار مناسب VIM و گام اولیه مناسب توسط MVIM در جواب به دست آمده را برای گونه شکار نشان می‌دهد. تفاوت حداکثر خطای معادلات با در نظر گرفتن جواب به دست آمده از چهارمین تکرار VIM و MVIM با طول گام ۰/۵، حدود ۳۵ واحد است. جواب دستگاه با چهار تکرار VIM دارای حداکثر خطا برابر ۳۵/۵۰۵۷ برای معادله تقریبی شکار در فاصله [۲، ۰] می‌باشد. اما با MVIM و طول گام ۰/۵، حداکثر خطا تقریباً برابر ۰/۱۶ در بازه [۲، ۰] است. منحنی‌های جواب معادله شکار و

خطا با جایگزینی جواب به دست آمده در معادله حاکم (باقی مانده یا خطای معادله) به ترتیب در شکل ۸ نشان داده شده است.

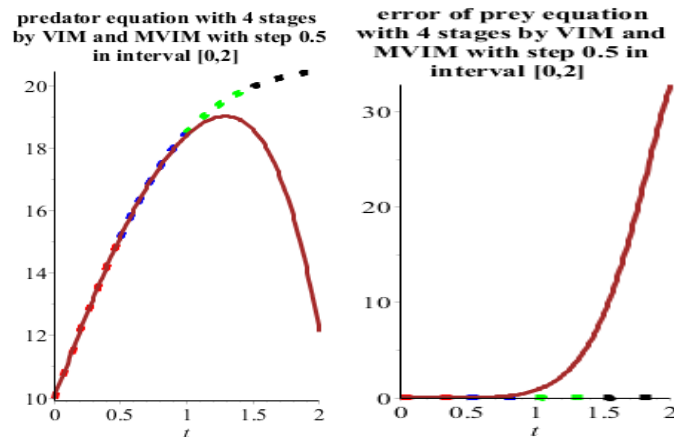


شکل ۸. منحنی جواب و خطای تقریبی معادله شکار به دست آمده توسط VIM (خط پیوسته) و MVIM (خط نقطه) برای تکرار چهارم و طول گام ۰.۵ در فاصله [۰، ۲].

جدول ۲. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکارچی در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰.۵.

Predator t	VIM	$ E_{eq(VIM)} $	MVIM	$ E_{eq(MVIM)} $	$ E_{eq(VIM)} - E_{eq(MVIM)} $
۰	۱۰	۰/۰۰۰۳	۱۰	۰/۰۰۰۳	۰
۰/۵	۱۵/۱۵۵۸	۰/۰۱۷۵	۱۵/۱۵۸۵	۰/۰۱۷۵	۵/۳ E-۱۵
۱	۱۸/۴۱۹۸	۰/۷۷۴۹	۱۸/۵۰۵۶	۰/۱۰۲۱	۰/۶۷۲۸
۱/۵	۱۸/۶۰۱۲	۸/۶۵۹۵	۱۹/۹۸۱۰	۰/۱۱۶۸	۸/۵۴۲۷
۲	۱۲/۱۱۲۷	۳۲/۹۱۵۱	۲۰/۴۸۳۳	۰/۰۶۲۲	۳۲/۸۵۲۹

جدول ۲ و شکل های ۹ نشان می دهد که جواب به دست آمده برای گونه شکارچی توسط MVIM و انتخاب گام اولیه و تکرار مناسب VIM بسیار دقیق تر از جواب VIM است. حداکثر خطا برای جواب سیستم با چهار تکرار VIM برابر ۳۲/۹۱۵۱ برای معادله تقریبی شکارچی در فاصله [۰، ۲] می باشد. اما، با MVIM و طول گام ۰/۵، حداکثر خطا تقریباً به ۰/۱۲ در بازه زمانی [۰، ۲] کاهش می یابد. منحنی های جواب معادله شکارچی و خطا با جایگزینی جواب به دست آمده در معادله (باقی مانده یا خطای معادله) به ترتیب در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۹. منحنی جواب و خطای تقریبی معادله شکارچی به دست آمده توسط VIM (خط پیوسته) و MVIM (خط نقطه) برای تکرار چهارم و طول گام ۰/۵ در فاصله [۰، ۲].

این تکنیک با استفاده از تکرار چهارم VIM و طول گام ۰/۲۵ نیز اعمال شده است. جواب به دست آمده توسط MVIM و طول گام ۰/۲۵ بسیار دقیق تر از جواب به دست آمده توسط VIM و حتی جواب به دست آمده توسط MVIM با طول گام ۰/۵ است. همچنین، مقادیر تقریبی به دست آمده توسط MVIM در بازه مورد نظر و در نقاط تعیین شده دقیق تر از جواب VIM بدون تقسیم بازه به زیر بازه ها بوده است. نتایج اعمال روش چند گامی با طول گام ۰/۲۵، در جداول ۳ و ۴ ارایه شده است.

جدول ۳. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکار در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۲۵

Prey T	VIM	$ Eeq_{(VIM)} $	MVIM	$ Eeq_{(M)} $ (VIM)	$ Eeq_{(VIM)} - Eeq_{(MVIM)} $
۰	۱۰	۰/۰۰۰۱	۱۰	۰/۰۰۰۱	۰
۰/۲۵	۷/۵۵۰۵	۰/۰۰۱۹	۷/۵۵۰۵	۰/۰۰۲۰	۳E-۱۶
۰/۵	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۹۰	۵/۳۱۸۴	۰/۰۰۴۹	۰/۰۲۴۰۴
۰/۷۵	۳/۵۴۸۲	۰/۲۰۶۴	۳/۵۲۶۴	۰/۰۰۸۶	۰/۱۹۷۸
۱	۲/۳۵۶۰	۰/۹۹۴۴	۲/۲۳۱۹	۰/۰۱۰۵	۰/۹۸۳۹
۱/۲۵	۱/۸۷۶۱	۳/۵۵۵۹	۱/۳۶۷۶	۰/۰۰۹۹	۳/۵۴۶۰
۱/۵	۲/۴۴۶۷	۹/۹۴۲۳	۰/۸۲۰۸	۰/۰۰۷۶	۹/۹۳۴۷
۱/۷۵	۷/۷۲۲۴	۲۱/۹۲۸۳	۰/۴۸۶۵	۰/۰۰۵۳	۲۱/۹۲۳۱
۲	۹/۳۳۲۱	۳۵/۵۰۵۷	۰/۲۸۶۳	۰/۰۰۳۴	۳۵/۵۰۲۳

جدول ۴. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکارچی در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۲۵

Predator t	VIM	$ Eeq_{(VIM)} $	MVIM	$ Eeq_{(MVIM)} $	$ Eeq_{(VIM)} - Eeq_{(MVIM)} $
۰	۱۰	۰/۰۰۰۳	۱۰	۰/۰۰۰۳	۰
۰/۲۵	۱۲/۷۰۶۷	۰/۰۰۱۲	۱۲/۷۰۶۷	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۸
۰/۵	۱۵/۱۵۸۵	۰/۰۱۷۵	۱۵/۱۵۹۹	۰/۰۰۲۱	۰/۰۲۶۷۶
۰/۷۵	۱۷/۱۰۰۹	۰/۱۴۶۱	۱۷/۱۱۵۸	۰/۰۰۳۹	۰/۲۰۲۴

۱	۱۸/۴۱۹۹	۰/۷۷۴۹	۱۸/۵۱۳۳	۰/۰۰۵۱	۰/۹۸۹۳
۱/۲۵	۱۹/۰۱۷۹	۲/۹۵۵۳	۱۹/۴۲۸۶	۰/۰۰۴۹	۳/۵۵۱۰
۱/۵	۱۸/۶۰۱۲	۸/۶۵۹۵	۱۹/۹۸۸۵	۰/۰۰۳۹	۹/۹۳۸۴
۱/۷۵	۱۶/۵۳۲۱	۱۹/۷۷۱۰	۲۰/۳۱۰۵	۰/۰۰۲۷	۲۱/۹۲۵۵
۲	۱۲/۱۱۲۷	۳۲/۹۱۵۱	۲۰/۴۸۲۰	۰/۰۰۱۸	۳۵/۵۰۴۰

بر اساس نتایج به دست آمده در جداول ۳ و ۴، جواب سیستم در تکرار چهارم و طول گام ۰/۲۵ بهتر از جواب حاصل از تکرار چهارم تک گامی است. بنابراین انتخاب یک تکرار مناسب و طول گام متناسب می تواند جواب بهتری را نتیجه دهد.

بر اساس جداول مذکور، حداکثر خطای معادله شکار با جایگزینی جواب حاصل از MVIM و طول گام ۰/۲۵ حدود ۰/۰۱ است در حالی که حداکثر خطای VIM حدود ۳۵/۵ می باشد. همچنین، حداکثر خطای معادله شکارچی با استفاده از جواب به دست آمده از MVIM و طول گام ۰/۲۵ حدود ۰/۰۰۵، ولی حداکثر خطای VIM حدود ۳۳ است.

۴ جمع بندی و بحث

در این مقاله ابتدا معادلات شکار و شکارچی به کمک روش VIM تا تکرار هفتم به دست آمد. خطای جواب به دست آمده در بازه [۲، ۵] نشان داد که برای دستیابی به مینیمم خطا انتخاب تکرار چهارم با طول گام کوچک تر یا مساوی با ۰/۵ مناسب است. اگر چه هر چقدر طول گام کوچک تر باشد انتظار می رود نتایج بهتری حاصل گردد؛ اما جهت اجتناب از افزایش محاسبات مساله با طول گام های ۰/۵ و ۰/۲۵ حل شد. در این مقاله به طول برای سیستم مذکور و شرایط اولیه داده شده، حداکثر خطای معادله شکار از طریق VIM برابر ۳۵/۵۰۵۷ و با استفاده از MVIM به کار رفته، برای طول گام های ۰/۵ و ۰/۲۵ به ترتیب برابر ۱۶۷۲/۰ و ۰/۰۰۹۹ محاسبه گردید. همچنین، حداکثر خطا برای معادله شکارچی از ۳۲/۹۱۵۱ برای VIM به ترتیب به ۱۱۶۹/۰ و ۰/۰۰۵۱ برای MVIM جدید و با طول گام ۰/۵ و ۰/۲۵ کاهش می یابند. این نتایج افزایش بسیار زیاد دقت جواب در روش MVIM را در مقایسه با روش VIM نشان می دهد.

۵ نتیجه گیری

اگرچه روش تکرار وردشی برای مسایل مختلف قابل استفاده است، اما در مقاله حاضر نشان داده شده است که خطای جوابی که با این روش در یک سیستم شناخته شده به دست می آید، قابل توجه است. دستگاه دو گونه همزیست بر هم اثرگذار در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. جواب های تقریبی چندین تکرار توسط VIM به دست آمده و معادلات خطای آنها نیز ارائه شده است. سپس یک تکرار مناسب از VIM با خطای کمتر در زیر بازه اول، انتخاب گردید. بر اساس این جواب و طول گام مناسب، از MVIM استفاده شد. با اعمال مقدار جواب در انتهای هر گام به عنوان شرایط اولیه گام بعدی، نخست جواب تمام گام ها در اولین زیر بازه به دست آمده، نهایتاً به زیر بازه اصلی منتقل شده اند. نشان داده شد که اختلاف زیادی بین جواب به دست آمده از

VIM و MVIM جدید وجود دارد. مقادیر جواب، خطای حاصل از جایگزینی آن‌ها در سیستم معادلات و نیز اختلاف آن‌ها در چندین نقطه معین در شکل‌ها و جداول نشان داده شده‌اند. با توجه به اینکه زیر بازه بزرگ‌تر دارای نقاطی با فاصله بیشتر از نقطه اولیه و در نتیجه باعث ایجاد خطای بیشتر می‌گردند، لذا خطای جواب به‌دست آمده با کاهش طول گام بهبود یافته است.

منابع

- [1] He J. H., (2000). A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 35, 37–43.
- [2] He J. H., (2005) Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 695–700.
- [3] He J. H., (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique, *Appl. Math. Comput.*, 135, 73–79.
- [4] G.A. Adomian, (1998). Review of the decomposition method in applied mathematics, *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501–544.
- [5] Cherruault Y., (1989). Convergence of Adomian's method, *Kybernets*, 18, 31–38.
- [6] Biazar J., Montazeri R., (2005). A computational method for solution of the prey and predator problem, *Applied Mathematics and Computation*, 163, 841–847.
- [7] He J. H., (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations, *Commun. Non-Linear Sci. Numer. Simul.*, 2 (4), 230–235.
- [8] He J. H., (1998). Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167, 27–68.
- [9] He J. H., (1998). Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167, 69–73.
- [10] He J. H., (1999). Variational iteration method kind of non-linear analytical technique: Some examples, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 34, 699–708.
- [11] He J. H., (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, *Appl. Math. Comput.*, 114 (23), 115–123.
- [12] He J. H., (1997). Variational iteration method for delay differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2 (4), 235–236.
- [13] Darvishi M. T., Khani F., Soliman A. A., (2007). The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 54.
- [14] Liao S., *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, ISBN 1 - 58458 - 407 - X.
- [15] Marinca V., Herisanu N., (2015). *The Optimal Homotopy Asymptotic Method*, Springer, (2015).
- [16] He J. H., (2006) Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International journal of Modern physics B*, 20 (10), 1141-1199.
- [17] He J. H., (2006). *Non-perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems*, Dissertation, de-Verlag in Internet GmbH, Berlin, (2006).
- [18] He J. H., (2003). Variational approach to the sixth-order boundary value problems, *Appl. Math. Comput.*, 143 (2_3), 537_538.
- [19] Inokuti M., (1978). General use of the Lagrange multiplier in non-linear mathematical physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), *Variational Method in the Mechanics of Solids*, pergamon press, Oxford, pp. 156-162.
- [20] Finlayson B. A., (1972). *The Method of weighted Residuals and Variational Principles*, Academic press, New York.
- [21] saeidi M., ilie M., khoshkena A., (1386). Calculation approximate and non-numerical solutions for the predator-prey Lotka–Volterra equation and its comparison with numerical solutions, *Journal of Operational Research and Its Applications*, 12 (4), 47-35.
- [22] Lotfi T., Babolian E., Yaghoubi F., (1388). Calculation of beta function by Adomian decomposition and homotopy perturbation methods and their comparison, *Journal of Operational Research and Its Applications*, 6(20), 9-20.

- [23] Heydari M. H., Bavi O., (2021). An optimal variational iteration method for investigating the physical behavior of quasi-steady squeezing flow confined between parallel rigid walls, *Physica Scripta*, 96 (11), 114012.
- [24] Harir A., Melliani S., El Harfi H., Saadia Chadli L., (2020). Variational Iteration Method and Differential Transformation Method for Solving the SEIR Epidemic Model, *International Journal of Differential Equations*, 1, 1-7.
- [25] Zaid M. Odibat, (2010). A study on the convergence of variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 51, 1181–1192.