

تحلیل مقدار تعادل بازار با رویکرد فازی

فاطمه باباکردی^۱

۱- استادیار، دانشگاه گنبد کاووس، گروه ریاضی و آمار، گنبد کاووس، ایران

رسید مقاله: ۲۳ شهریور ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۱۴ بهمن ۱۴۰۰

چکیده

در این مقاله برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار، مدل‌بندی معادله‌ی دوگان فازی را در نظر می‌گیریم. با تعریف سه دسته جواب برای معادله‌ی دوگان فازی، قیمت فازی متقارن مینیمال، قیمت فازی متقارن ماکسیمال و قیمت فازی نامتقارن را تعیین کرده و از روی آن نقطه‌ی تعادلی فازی بازار و تابع عرضه و تقاضای فازی را محاسبه می‌کنیم و با بیان قضیه‌ای شرایطی را مطرح می‌کنیم که تحت آن معادله‌ی دوگان فازی در نظر گرفته شده برای تعیین قیمت فازی بازار، همواره دارای جواب فازی است. با بحث و بررسی ایرادات روش پیشین برای محاسبه‌ی قیمت فازی بازار نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی اشکالات روش قبلی را ندارد. در پایان مثال‌های عددی کارایی روش پیشنهادی و برتری روش را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادله‌ی خطی دوگان فازی، اعداد فازی، تابع عرضه‌ی فازی، تابع تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادل فازی.

۱ مقدمه

در بازار رقابتی قیمت تعادلی و مقدار تعادلی یک کالا با عرضه و تقاضای بازار برای آن کالا تعیین می‌شود. قیمت تعادلی یک کالا دقیقاً برابر با قیمتی است که مصرف‌کنندگان مقدار کالایی را که حاضرند در یک دوره زمانی خاص بخرند برابر با مقداری است که تولیدکنندگان آن کالا حاضرند عرضه کنند. در قیمت‌های بالاتر کمبود تقاضا اتفاق و باعث مازاد عرضه می‌شود. این اضافه عرضه به قیمت فشار می‌آورد و باعث می‌شود که قیمت دوباره به سطح تعادلی بازگردد. در قیمت‌های پایین‌تر نیز، مقدار تقاضا از مقدار عرضه بیشتر می‌شود و باعث مازاد تقاضا می‌شود. این مازاد تقاضا باعث افزایش قیمت و در نتیجه بازگشت قیمت به اندازه قبل خود (قیمت تعادلی) می‌شود. پس از این که قیمت به تعادل رسید، این قیمت میل به استمرار و باقی‌ماندن دارد. مدل عرضه و تقاضا در واقع برای بازار رقابتی تنظیم شده‌است که در آن هیچ‌یک از خریداران و فروشندگان نمی‌توانند اثر زیادی بر روی قیمت بگذارند، و قیمت به صورت یک داده است. در حالی که در بازار واقعی در نظر گرفتن قیمت به صورت قطعی و ثابت تقریباً غیرممکن است از این رو بایستی مساله را با یک روش پوشش

* فاطمه باباکردی

آدرس الکترونیکی: babakordif@yahoo.com

داده‌های غیرقطعی یعنی نظریه فازی در نظر گرفت. مساله‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی همواره مورد توجه محققین بوده است. در [۱] سیستم اقتصادی با نقشه‌ی اعداد فازی بررسی شد و تعریفی از سیستم اقتصادی فازی ارائه گردید. در [۲] الگوریتمی برای حل مساله‌ی حداکثر نقطه‌ی تعادل سیستم‌های کنترلی فازی، مطالعه شد. لی و همکاران با استفاده از قضیه‌ی نقطه ثابت و ساخت تابع لیاپانوف، شرایط کافی وجود و منحصر بفرد بودن و پایداری نمایی نقطه‌ی تعادل برای یک کلاس از شبکه‌های عصبی BAM فازی با تاخیر و تکانه‌های بینهایت در مقیاس‌های زمانی را بررسی کردند [۳].

مدل‌بندی دستگاه و معادله‌ی خطی فازی توصیف خوبی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار می‌باشد. تاکنون پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی دستگاه معادلات خطی فازی صورت گرفته است [۴-۱۱]. در [۱۲] ما و همکاران به حل دستگاه دوگان به فرم $A\tilde{X} = B\tilde{X} + \tilde{Y}$ که در آن A و B ماتریس حقیقی و $\tilde{Y}$ بردار فازی می‌باشد، پرداختند و نشان دادند که در حالت فازی نمی‌توان دستگاه $A\tilde{X} = B\tilde{X} + \tilde{Y}$ را با $(A-B)\tilde{X} = \tilde{Y}$ جایگزین نمود. در سال ۲۰۰۸ عباسبندی و همکاران با تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه قطعی جواب فازی مینمال، برای حل این دستگاه را بیان کردند [۱۳]. سپس اوتادی روشی برای حل دستگاه دوگان فازی مطرح کرد به‌طوری که در شرایط خاص دستگاه دارای جواب فازی است [۱۴].

اخیرا برنامه‌ریزی خطی برای حل دستگاه دوگان کاملاً فازی به کار گرفته شد [۱۵] و سپس قنبری و همکاران به بیان روش جبری برای حل دستگاه دوگان کاملاً فازی پرداختند [۱۶]. در [۱۷] شرایط وجودی نقطه‌ی تعادل فازی برای دستگاه خطی فازی $\tilde{X}(k+1) = \tilde{A}\tilde{X}(k)$ و مفهوم نقطه‌ی تعادلی تعمیم یافته‌ی سیستم خطی فازی مطرح شد. ملیانی و همکاران با بحث روی دستگاه دینامیکی فازی مختلط مفهوم نقطه‌ی تعادل فازی مختلط را معرفی کردند [۱۸].

خیبری و همکاران در [۱۹]، با استفاده از حل دستگاه معادلات خطی فازی، به تعیین مقدار تعادلی بازار پرداختند. در این مقاله بیان می‌کنیم، از آنجایی که دستگاه دوگان فازی و دستگاه فازی در حالت کلی با هم معادل نیستند، پس روش خیبری و همکاران دارای نقص است که بایستی اصلاح گردد. لذا روشی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار پیشنهاد می‌کنیم که دارای ایراد فوق نباشد [۲۰-۲۱].

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف پایه‌ای مورد نیاز را مطرح کرده و در بخش ۳ به مرور و بررسی روش خیبری و همکاران می‌پردازیم. در بخش ۴ مدل‌بندی فازی و روشی کاربردی برای تعیین نقطه تعادلی فازی بازار ارائه می‌دهیم. مثال‌های عددی در بخش ۵ آورده شده و نتیجه‌گیری و کارهای آتی در بخش ۶ مطرح شده است.

۲ تعاریف پایه‌ای

تعریف ۱-۲ [۲۲-۲۳] شکل پارامتری یک عدد فازی $\tilde{u}(r)$ یک زوج از توابع $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ است که در آن توابع $\underline{u}(r)$ و $\bar{u}(r)$ برای مقادیر $0 \leq r \leq 1$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. تابع $\underline{u}(r)$ تابعی غیرکاهشی نیمه پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0, 1]$ است.
 ۲. تابع $\bar{u}(r)$ تابعی غیرافزایشی نیمه پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0, 1]$ است.
 ۳. $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$ ، برای مقادیر $0 \leq r \leq 1$.
- در تعریف بالا اگر $\underline{u}(r)$ و $\bar{u}(r)$ توابع خطی باشند، نمایش پارامتری یک عدد فازی مثلثی به دست می آید و عدد فازی $\tilde{u}(r)$ را مثبت گوئیم هرگاه بازای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{u}(r), \bar{u}(r) \geq 0$ باشد.
- تعریف ۲-۲.** برای دو عدد فازی مثلثی دلخواه $\tilde{x}(r) = (\underline{x}(r), \bar{x}(r))$ و $\tilde{y}(r) = (\underline{y}(r), \bar{y}(r))$ و عدد حقیقی k ، جمع، ضرب اسکالر و تفریق به صورت زیر تعریف می گردد:
- $$\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \bar{x}(r) + \bar{y}(r)), \quad (1)$$
- $$k\tilde{x} = (k\underline{x}(r), k\bar{x}(r)), k \geq 0, \quad (2)$$
- $$k\tilde{x} = (k\bar{x}(r), k\underline{x}(r)), k < 0, \quad (3)$$
- $$\tilde{x} - \tilde{y} = (\underline{x}(r) - \underline{y}(r), \bar{x}(r) - \bar{y}(r)), \quad (4)$$
- $$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = (\underline{x}(r)\underline{y}(r), \bar{x}(r)\bar{y}(r)), \tilde{x}, \tilde{y} \geq 0. \quad (5)$$

۳ روش خیبری و همکاران برای تعیین نقطه تعادلی بازار

خیبری و همکاران در [۱۹]، عرضه و تقاضا فازی را به صورت توابعی خطی از قیمت به صورت

$$\begin{cases} q_d = a * p + b \\ q_s = c * p + d \end{cases} \quad (6)$$

که در آن q_d و q_s به ترتیب مقادیر تقاضا و عرضه هستند و پارامتر p قیمت و a و c اعداد حقیقی قطعی، b و d ضرایبی هستند که می بایست تعیین شوند، در نظر گرفتند و بیان کردند برای تعیین نقطه تعادلی بازار که در آن $q_d = q_s = q$ ، بایستی دستگاه دوگان فازی به فرم

$$\begin{cases} q = a * p + b \\ q = c * p + d \end{cases} \quad (7)$$

را حل کنیم و برای حل (۲) بایستی آن را به صورت

$$\begin{cases} q - a * p = b \\ q - c * p = d \end{cases} \quad (8)$$

که یک دستگاه فازی می باشد، تبدیل کرده و به روش حل دستگاه فازی حل نمود. آن ها در مثالی روابط بین عرضه و تقاضا را به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\begin{cases} q_d = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ q_s = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (9)$$

و بیان داشتند که اگر $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_r$ به ترتیب مقادیر فازی عرضه (تقاضا) و مقدار فازی قیمت در نظر گرفته شوند در این صورت با برابر قرار دادن مقادیر عرضه و تقاضا می‌بایست یک دستگاه معادلات خطی فازی به صورت زیر حل شود:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_r + \tilde{\delta} \\ \tilde{x}_1 = -3\tilde{x}_r + 13 \end{cases} \quad (10)$$

با دوباره نویسی معادلات بالا، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_r = \tilde{\delta} \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_r = 13 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن اعداد فازی مثلی $\tilde{\delta}$ و 13 را به ترتیب به صورت پارامتری $(9+4r, 17-4r)$ و $\tilde{\delta} = (3+2r, 7-2r)$ در نظر گرفتند و با حل دستگاه فازی به دست آوردند:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_r = (3+2r, 7-2r) \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_r = (9+4r, 17-4r) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (6+r, 8-r) \\ \tilde{x}_r &= (1+r, 3-r) \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین مقدار تقاضای فازی (همچنین عرضه فازی) و مقدار قیمت فازی به ترتیب عبارتند از $\tilde{V}$ و $\tilde{\alpha}$.

۳-۱۱ ایرادات روش خیری و همکاران

در این بخش به بیان ایراد اساسی روش خیری و همکاران می‌پردازیم.

ایراد اساسی وارده این است که آنها برای حل دستگاه دوگان فازی (۲) آن را به فرم دستگاه فازی (۳) تبدیل کرده و حل کردند. در صورتی که اگر چه این دو سیستم در حالت قطعی معادلند، در حالت فازی این دو دستگاه معادل نیستند.

اگر $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ و $\tilde{x}_r = (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r))$ و از طرفین اولین معادله‌ی (۴)، $\tilde{x}_r$ را کم و به طرفین دومین معادله $3\tilde{x}_r$ را اضافه کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} &[(\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) - (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r))] = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) - (\underline{x}_r(r), \bar{x}_r(r)) + (3+2r, 7-2r) \\ &[(\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)) + (3\underline{x}_r(r), 3\bar{x}_r(r))] = (-3\bar{x}_r(r), -3\underline{x}_r(r)) + (3\underline{x}_r(r), 3\bar{x}_r(r)) + (9+4r, 17-4r) \end{aligned}$$

با به کارگیری اعمال تعریف ۱-۲. به دست می‌آوریم:

(۱۵)

$$\begin{cases} (\underline{x}(r) - \bar{x}_r(r), \bar{x}_l(r) - \underline{x}_r(r)) = (\underline{x}_r(r) - \bar{x}_r(r) + 3 + 2r, \bar{x}_r(r) - \underline{x}_r(r) + 7 - 2r) \\ (\underline{x}(r) + 3\underline{x}_r(r), \bar{x}_l(r) + 3\bar{x}_r(r)) = (-3\bar{x}_r(r) + 3\underline{x}_r(r) + 9 + 4r, -3\underline{x}_r(r) + 3\bar{x}_r(r) + 17 - 4r) \end{cases}$$

از طرف دیگر با به کارگیری اعمال تعریف شده در تعریف ۲-۱. در طرفین دستگاه (۴) به دست می آوریم:

$$\begin{cases} (\underline{x}(r) - \bar{x}_r(r), \bar{x}_l(r) - \underline{x}_r(r)) = (3 + 2r, 7 - 2r) \\ (\underline{x}(r) + 3\underline{x}_r(r), \bar{x}_l(r) + 3\bar{x}_r(r)) = (9 + 4r, 17 - 4r) \end{cases} \quad (16)$$

مشاهده می کنیم که طرف چپ دستگاه معادلات (۸) و (۹) یکی هستند، در صورتی که طرف راست آنها در حالت کلی با هم برابر نمی باشند، یعنی دستگاه (۲) قابل تبدیل به دستگاه (۳) نیست. لذا در ادامه روشی برای تعیین مقدار تعادلی بازار ارایه می دهیم که بدون تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه فازی نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را تعیین می کند.

۴ مدل سازی و تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار

تعریف ۴-۱. به معادله‌ی

$$\tilde{a} + b\tilde{x} = \tilde{c} + d\tilde{x} \quad (17)$$

که در آن $\tilde{a}, \tilde{c}$ اعداد فازی معلوم و b, d اعداد حقیقی معلوم و $\tilde{x}$ عدد فازی مجهول می باشد، معادله‌ی دوگان فازی می گوئیم.

تعریف ۴-۲. سه دسته جواب معادله‌ی (۱۰) به صورت زیر تعریف می گردد:

الف. مجموعه جواب متحد

$$X_{\exists\exists} = \{x' : (\exists a \in \tilde{a})(\exists c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx'\} = \{x' : (\tilde{a} + bx') \cap (\tilde{c} + dx') \neq \emptyset\}, \quad (18)$$

ب. مجموعه جواب قابل قبول

$$X_{\forall\exists} = \{x' : (\forall a \in \tilde{a})(\exists c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx'\} = \{x' : (\tilde{a} + bx') \subseteq (\tilde{c} + dx')\}, \quad (19)$$

ج. مجموعه جواب قابل کنترل

$$X_{\exists\forall} = \{x' : (\exists a \in \tilde{a})(\forall c \in \tilde{c}) s.t. a + bx' = c + dx'\} = \{x' : (\tilde{a} + bx') \supseteq (\tilde{c} + dx')\}, \quad (20)$$

تابع تقاضا فازی: اصطلاح تقاضا مبین کل وضعیت امکانات فردی است که وی را قادر به خرید کالاها در قیمت‌های متفاوت می نماید و با فرض ثابت بودن سایر شرایط، بیان می کند که چه ارتباطی میان جهت و مقدار درخواستی کالا وجود دارد. عوامل مختلفی نظیر قیمت خود کالا، درآمد مصرف کننده، تعداد مصرف کنندگان در بازار، سلیقه و ترجیحات مصرف کنندگان، دامنه انتخاب و تعداد مصرف کننده، انتظارات قیمتی و قیمت سایر کالاهای مرتبط بر میزان تقاضا تاثیر گزار می باشد که با ثابت در نظر گرفتن عوامل موثر بر تقاضا به غیر از قیمت فازی کالای x ، تابع تقاضا فازی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{f}(\tilde{p}_x(r)) \quad (21)$$

بدون آنکه به کلیت کار خلی وارد شود، می توان تابع تقاضای فازی را به فرم خطی در نظر گرفت.

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\tilde{p}_x(r) \quad (22)$$

که در آن $\tilde{a}(r)$ عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و b عدد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{p}_x(r)$ ، $\tilde{Q}_x^d(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می باشند.

تابع عرضه فازی: منظور از عرضه مقدار کالا و خدماتی است که تولید کنندگان حاضرند در قیمت های مختلف در اختیار مصرف کنندگان قرار دهند که عواملی نظیر قیمت کالا، هزینه ی تولید و... در عرضه موثر می باشند که با ثابت در نظر گرفتن بقیه ی عوامل به غیر از قیمت فازی، تابع عرضه ی فازی کالای x توسط تولید کننده به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{f}(\tilde{p}_x(r)) \quad (23)$$

بدون آنکه به کلیت کار خلی وارد شود، می توان تابع عرضه ی فازی را به فرم خطی در نظر گرفت.

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\tilde{p}_x(r) \quad (24)$$

که در آن $\tilde{c}(r)$ و عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و d عدد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{p}_x(r)$ ، $\tilde{Q}_x^s(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می باشند.

نقطه ی تعادلی فازی بازار: منظور از نقطه ی تعادلی فازی بازار، نقطه ای است که در آن میزان عرضه فازی یک کالا با میزان تقاضا فازی بازار حدودا برابر می باشد. در این حالت تقاضا کننده تقریبا همان مقدار کالایی را می خواهد که فروشنده قصد عرضه آن را دارد و فروشنده حدودا همان میزان کالایی که تولید کرده می فروشد.

مدل ریاضی مقدار تعادلی فازی بازار: تابع تقاضای فازی و عرضه ی فازی به ترتیب به فرم $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\tilde{p}_x(r)$ و $\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\tilde{p}_x(r)$ که در آن $\tilde{a}(r) = (\underline{a}(r), \bar{a}(r))$ و $\tilde{c}(r) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r))$ اعداد فازی مثلثی مثبت معلوم و b, d اعداد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{p}(r) = (\underline{p}(r), \bar{p}(r))$ عدد فازی مثلثی مثبت مجهول هستند را در نظر بگیرید، برای تعیین مقدار تعادلی فازی بازار، ابتدا قیمت فازی تعادلی را با حل معادله ی $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{Q}_x^s(r)$ که یک معادله ی دوگان فازی به صورت زیر می باشد، تعیین می کنیم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) \quad (25)$$

۵ مدل سازی و تعیین مقدار تعادلی فازی بازار

۵-۱ تعیین مقدار تعادلی فازی متقارن بازار

برای حل معادله ی (۱۱) ابتدا قرار می دهیم $r=1$ و با حل معادله ی زیر $\underline{p}(1) = \bar{p}(1) = p$ را به دست می آوریم:

$$(\underline{a}(1), \bar{a}(1)) - b(p, p) = (\underline{c}(1), \bar{c}(1)) + d(p, p) \quad (26)$$

حال برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(p - \alpha, p + \alpha) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(p - \alpha, p + \alpha) \quad (27)$$

با اعمال حسابی تعریف ۱-۲ به دست می‌آوریم:

$$\underline{a}(r) - b(p + \alpha) = \underline{c}(r) + d(p - \alpha) \quad (28)$$

و

$$\bar{a}(r) - b(p - \alpha) = \bar{c}(r) + d(p + \alpha) \quad (29)$$

در ادامه بجای α در معادله‌ی اول α_1 و بجای α در معادله‌ی دوم α_2 قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$\alpha_1 = \frac{\underline{a}(r) - \underline{c}(r) - bp - dp}{b - d}, \quad (30)$$

$$\alpha_2 = \frac{\bar{a}(r) - \bar{c}(r) - bp - dp}{d - b}, \quad (31)$$

سرانجام گستره‌های متقارن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_s^- = \min_{s \leq r \leq 1} \{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}, \quad (32)$$

$$\alpha_s^+ = \max_{s \leq r \leq 1} \{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}, \quad (33)$$

جواب متقارن فازی معادله‌ی (۱۱) به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tilde{p}^-(r) = (p - \alpha_s^-, p + \alpha_s^-), \quad (34)$$

$$\tilde{p}^+(r) = (p - \alpha_s^+, p + \alpha_s^+), \quad (35)$$

۲-۵ تعیین مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار

برای مشخص کردن مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار $\tilde{p} = (p, \alpha, \beta)$ و پس از محاسبه‌ی مقدار p از (۱۲)،

برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\underline{a}(r), \bar{a}(r)) - b(p - \alpha, p + \beta) = (\underline{c}(r), \bar{c}(r)) + d(p - \alpha, p + \beta) \quad (36)$$

با اعمال حسابی تعریف ۱-۲ و برابر قرار دادن طرفین (۲۲)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d\alpha - b\beta = (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b + d)p \\ b\alpha - d\beta = (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b + d)p \end{cases} \quad (37)$$

که سرانجام با به کارگیری روش کرامر از (۲۳) داریم:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b + d)p & -b \\ (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b + d)p & -d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & -b \\ b & -d \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} d & (\underline{c}(r) - \underline{a}(r)) + (b + d)p \\ b & (\bar{c}(r) - \bar{a}(r)) + (b + d)p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & -b \\ b & -d \end{vmatrix}} \quad (38)$$

تذکر ۵-۲-۱. قیمت فازی نامتقارن، قیمت فازی متقارن و قیمت فازی متقارن مینیمال را به روش‌های بیان شده در بالا محاسبه می‌کنیم و با قراردادن در معادلات عرضه و تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۵-۱. هرگاه $(b-d), (b+d) \neq 0$ ، معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، دارای جواب فازی منحصر بفرد است. **اثبات.** جواب معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، به صورت $\tilde{p}(r) = (p - \alpha, p + \beta)$ می‌باشد که در آن p از (۲۶) با قرار دادن $\underline{a}(1), \bar{a}(1) = a$ و $\underline{c}(1), \bar{c}(1) = c$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p = \frac{a-c}{b+d} \quad (39)$$

چون $b+d \neq 0$ ، بنابراین هسته‌ی $\tilde{p}(r)$ ، یعنی p ، از (۳۹) به صورت منحصر بفرد تعیین می‌گردد. از طرفی برای تعیین گستره‌ها، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- جواب فازی متقارن: در این حالت چون $b-d \neq 0$ ، گستره‌ها به صورت منحصر بفرد از (۳۰) و (۳۱)، تعیین می‌گردند.

- جواب فازی نامتقارن: در این حالت چون $(b-d), (b+d) \neq 0$ ، یعنی $b^2 - d^2 \neq 0$ ، بنابراین در این حالت نیز گستره‌ها به صورت منحصر بفرد از (۳۸)، به دست می‌آیند.

لذا حکم برقرار است.

۶ مثال‌های عددی

مثال ۶-۱. در این مثال روابط بین عرضه و تقاضا که در مقاله‌ی خیری و همکاران [۱۹]، به صورت زیر در نظر گرفته شده بود:

$$\begin{cases} \tilde{q}_d = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ q_s = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (39)$$

را با روش‌های پیشنهادی با فرض $\tilde{p} = (\underline{p}(r), \bar{p}(r))$ حل می‌کنیم:

$$(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) + (3 + 2r, 7 - 2r) = -3(\underline{p}(r), \bar{p}(r)) + (9 + 4r, 17 - 4r), \quad (40)$$

با قرار دادن $\underline{p}(1), \bar{p}(1) = 2$ ، $r = 1$ ، به دست می‌آوریم و برای محاسبه‌ی قیمت فازی متقارن ماکسیمال و مینیمال معادله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(2 - \alpha, 2 + \alpha) + (3 + 2r, 7 - 2r) = -3(2 - \alpha, 2 + \alpha) + (9 + 4r, 17 - 4r) \quad (41)$$

از (۱۷-۱۲) داریم:

$$\alpha_{11} = -1 + r, \quad (42)$$

$$\alpha_{12} = -1 + r, \quad (43)$$

بنابراین از (۱۸-۱۹) به دست می آوریم:

$$\tilde{p}^-(r) = \tilde{p}^+(r) = (2 - | -1 + r |, 2 + | -1 + r |) = (1 + r, 3 - r) = \tilde{2}, \quad (44)$$

سرانجام نقطه‌ی تعادلی فازی متقارن بازار با به کارگیری (۲۵)، $(\tilde{2}, \tilde{2})$ یعنی $((1 + r, 3 - r), (4 + 3r, 10 - 3r))$ یا $((1 + r, 3 - r), (7r, 14 - 7r))$ خواهد بود. برای تعیین قیمت فازی نامتقارن معادله‌ی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(2 - \alpha, 2 + \beta) + (3 + 2r, 7 - 2r) = -3(2 - \alpha, 2 + \beta) + (9 + 4r, 17 - 4r) \quad (45)$$

که در این حالت نیز به دست می آوریم:

$$\alpha = \beta = -1 + r \quad (46)$$

بنابراین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار $(\tilde{2}, \tilde{2})$ ، یعنی $((1 + r, 3 - r), (4 + 3r, 10 - 3r))$ یا $((1 + r, 3 - r), (7r, 14 - 7r))$ خواهد بود که انتخاب به عهده‌ی تصمیم گیرنده است.

در مقایسه‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی به دست آمده با این روش و نقطه‌ی تعادلی فازی به دست آمده به روش خیبری و همکاران دقت کنید که آنها پول فازی $\tilde{x}_p(\tilde{p})$ را $(1 + r, 3 - r)$ به دست آوردند که اگر این مقدار را در اولین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_d = (4 + 3r, 10 - 3r)$ بدست می آید و اگر در دومین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_s = (7r, 14 - 7r)$ به دست می آید. چند نکته در اینجا وجود دارد:

۱. در اغلب موارد تابع عرضه بر حسب قیمت صعودی و تابع تقاضا نزولی است، بنابراین بایستی جای s و d عوض گردد و صورت سوال به فرم زیر اصلاح گردد:

$$\begin{cases} \tilde{q}_s = \tilde{p} + \tilde{\delta} \\ \tilde{q}_d = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (47)$$

۲. در $[14]$ ، مقدار عرضه و تقاضا در نقطه‌ی تعادل را برابر با $(6 + r, 8 - r)$ بیان کردند. در صورتی که با جاگذاری قیمت تعادلی $(1 + r, 3 - r)$ ، در معادله‌ی اول دستگاه (۲۵)، $(4 + 3r, 10 - 3r)$ و در معادله‌ی دوم دستگاه (۲۵)، $(7r, 14 - 7r)$ ، را به دست می آوریم.

۳. طبق تعریف ۳-۵ مقاله‌ی آنها اگر $\tilde{q}_d = (\underline{q}_d(r), \bar{q}_d(r))$ و $\tilde{q}_s = (\underline{q}_s(r), \bar{q}_s(r))$ در نقطه‌ی تعادلی فازی بایستی $\underline{q}_d(r) = \underline{q}_s(r)$ و $\bar{q}_d(r) = \bar{q}_s(r)$ اما مشاهده می کنیم در این مثال در قیمت تعادلی، $\tilde{q}_s \neq \tilde{q}_d$.

طبق دسته جواب‌های تعریف شده در این مقاله، قیمت تعادلی $(1 + r, 3 - r)$ ، یک جواب قابل قبول برای معادله‌ی تعادل $\tilde{q}_s = \tilde{q}_d$ می باشد (چون $(7r, 14 - 7r) \subseteq (4 + 3r, 10 - 3r)$). بنابراین روش ما ایرادات [۱] را ندارد.

مثال ۶-۲. فرض کنید تابع عرضه و تقاضای فازی کالای x ترتیب به صورت $\tilde{Q}_x^s = (r, 3 - 2r) + 3\tilde{p}_x$ و $\tilde{Q}_x^d = (18 + 3r, 24 - 3r) - 2\tilde{p}_x$ باشد، می خواهیم مقدار تعادلی فازی بازار و میزان عرضه و تقاضای فازی در قیمت تعادلی را محاسبه کنیم، بدین منظور معادله‌ی (۱۱) را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$(r, 3-2r) + 3(p(r), \bar{p}(r)) = (18+3r, 24-3r) - 2(p(r), \bar{p}(r)) \quad (48)$$

با قرار دادن $r=1$ به دست می آوریم $p(1), \bar{p}(1)=4$.

• مقدار تعادلی فازی متقارن: معادله (۱۳) را به فرم زیر تشکیل می دهیم:

$$(r, 3-2r) + 3(4-\alpha, 4+\alpha) = (18+3r, 24-3r) - 2(4-\alpha, 4+\alpha) \quad (49)$$

$$\alpha_{11} = -2r + 2, \quad (50)$$

$$\alpha_{12} = -r + 1, \quad (51)$$

بنابراین:

$$\tilde{p}^-(r) = (4 - (-r + 1), 4 + (-r + 1)) = (3 + r, 5 - r), \quad (52)$$

$$\tilde{p}^+(r) = (4 - (-2r + 2), 4 + (-2r + 2)) = (2 + 2r, 6 - 2r), \quad (53)$$

نمودار آنها در شکل ۱ نشان داده شده است و نقطه‌ی تعادلی بازار $(\tilde{p}, 13)$ می باشد، یعنی

$$(\tilde{p}^-(r), \tilde{Q}_x^{-s}) = ((3+r, 5-r), (9+4r, 18-5r)), \quad (54)$$

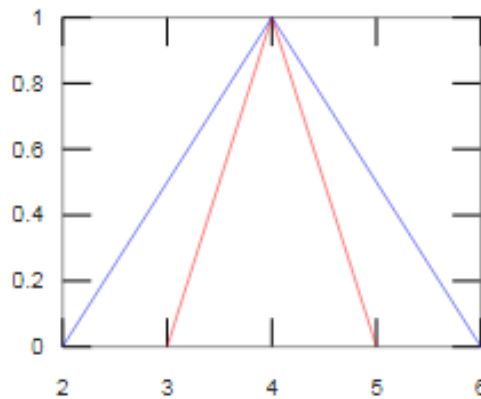
یا

$$(\tilde{p}^-(r), \tilde{Q}_x^{-d}) = ((3+r, 5-r), (8+5r, 18-5r)), \quad (55)$$

$$(\tilde{p}^+(r), \tilde{Q}_x^{+s}) = ((2+2r, 6-2r), (6+7r, 21-8r)), \quad (56)$$

$$(\tilde{p}^+(r), \tilde{Q}_x^{+d}) = ((2+2r, 6-2r), (6+7r, 20-7r)). \quad (57)$$

$\tilde{p}^-(r)$ ، یک جواب قابل قبول برای معادله $\tilde{Q}_x^{-s} = \tilde{Q}_x^{-d}$ و $\tilde{p}^+(r)$ ، یک جواب قابل کنترل برای $\tilde{Q}_x^{+s} = \tilde{Q}_x^{+d}$ می باشد.



شکل ۱. نمایش $\tilde{p}^-(r)$ (نمودار قرمز) و $\tilde{p}^+(r)$ (نمودار آبی) در مثال ۴-۲

• مقدار تعادلی فازی نامتقارن: معادله (۲۲) را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$(r, 3-2r) + 3(4-\alpha, 4+\beta) = (18+3r, 24-3r) - 2(4-\alpha, 4+\beta) \quad (58)$$

از (۲۴) و (۲۷)، به دست می آوریم:

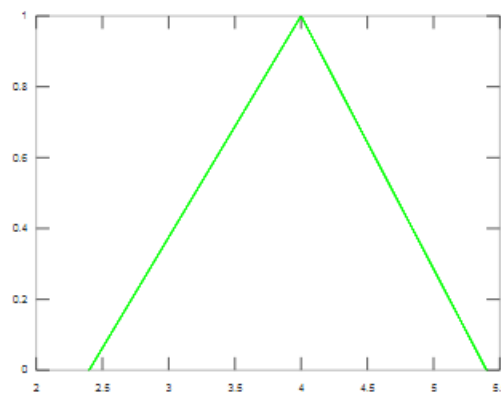
$$\alpha = \frac{-\lambda r + \lambda}{\delta}, \quad \beta = \frac{-\gamma r + \gamma}{\delta}, \quad \text{بنابراین قیمت} \quad (59)$$

فازی نامتقارن به صورت زیر است:

$$\tilde{p}(r) = \left(\varphi - \left(\frac{-\lambda r + \lambda}{\delta} \right), \varphi + \left(\frac{-\gamma r + \gamma}{\delta} \right) \right) \quad (60)$$

که قیمت تعادلی فازی نامتقارن در شکل ۲ نشان داده شده است و مقدار تعادلی بازار

$$\tilde{Q}_x^s = \tilde{Q}_x^s = \left(\frac{36}{\delta} + \frac{29}{\delta} r, \frac{96}{\delta} - \frac{31}{\delta} r \right) \text{ می باشد.}$$



شکل ۲. نمایش $\tilde{p}(r)$ (نمودار سبز) در مثال ۴-۲

۷ نتیجه گیری

باتوجه به شرایط اقتصادی جهان به علت آسیب‌های ناشی از کروناویروس، وجود اطلاعات دقیق در زمینه‌های اقتصادی برای تصمیم‌گیری امکان‌پذیر نیست، از آنجایی که یکی از مباحث کلیدی در اقتصاد نقطه‌ی تعادلی بازار است؛ لذا در این مقاله به تحلیل نقطه‌ی تعادلی بازار با رویکرد فازی پرداختیم. از مزایای روش پیشنهادی این است که قیمت تعادلی فازی متقارن مینیمال، قیمت تعادلی فازی متقارن ماکسیمال و قیمت تعادلی فازی نامتقارن را به روش پیشنهادی محاسبه می‌کنیم و در پایان تصمیم‌گیرنده جوابی که به مساله واقعی نزدیک‌تر است را به عنوان جواب نهایی سیستم انتخاب می‌کند. در پژوهش بعدی تردیدهای ناشی از تصمیم‌گیری را نیز در مدل‌سازی در نظر می‌گیریم و به تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی مجدد بازار خواهیم پرداخت.

منابع

- [1] Miao, Y.S.: The Equilibrium Point in Fuzzy Economic Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 6(1), 9–14 (1992).
- [2] Zhu, K.P., Zhong, M.Y., Tang, B.Y.: Study on Algorithm for the Greatest Equilibrium State of Fuzzy Control Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 15(3), 80–83 (2001)..

- [3] Yongkun, L., Lijie, S and Li, Y., (2014), Existence and Exponential Stability of Equilibrium Point for Fuzzy BAM Neural Networks with Infinitely Distributed Delays and Impulses on Time Scales, Journal of Applied Mathematics, Article ID 721586.
- [4] Allahviranloo, T., Babakordi, F., (2017), Algebraic solution of fuzzy linear system as: $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{X} = \tilde{Y}$, Soft Computing, 7463-7472.
- [5] Babakordi, F., (2020), A Novel Transformation Method for Solving Complex Interval Matrix, 12, 239-234.
- [6] Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2020), On the rectangular fuzzy complex linear systems, 91, 106-196.
- [7] Mosleh, M., Otadi, M., Abbasbandy, S., (2011), Solution of Fully Fuzzy Linear Systems by ST Method, Journal of applied Mathematics, 28, 23-31.
- [8] Younbae, J., (2021), Relaxation Technique For Solving Fuzzy Linear Systems Of Linear Fuzzy Real Numbers, J. Math. Comput. Sci. 11, 8211-8220.
- [9] StephenDinagar, D., HetciyalSangeethaPriyam, A., (2021), Solving Linear System Of Equations With Fuzzy Revised Decomposition Method, Advances and Applications in Mathematical Sciences, 20, 931-99954.
- [10] Abdollahzadeh, R., ModarreseKhiabani, F., Iranzadeh, S., (2021) A Model for Evaluating the Financial Performance of Islamic Azad Universities using the Combination of ANFIS and PSO, Journal of applied Mathematics, 18, 39-56.
- [11] Babakordi, F., Allahviranloo, T., (2021), A New Method for Solving Fuzzy Bernoulli Differential Equation, Journal Of Mathematical Extension, 15, 1-20.
- [12] Ma, M., Friedman, M., Kandel, A., (2000), Duality in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets Syst. 109, 55-58.
- [13] Abbasbandy, S., Otadi, M., Mosleh, M., (2008), Minimal solution of general dual fuzzy linear systems, Chaos, Solitons and Fractals, 37, 1113-1124.
- [14] Otadi, M., (2013), A New Method for Solving General Dual Fuzzy Linear Systems, Journal of Mathematical Extension, 7, 63-75.
- [15] Babakordi, F., Adabitarfirozja, M., (2020), Solving fully fuzzy matrix dual system with optimization problem, International Journal of Industrial Mathematics, 12, 11 pages.
- [16] Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2021), A straightforward approach for solving dual fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems, 10.1016/j.fss.2021.04.007.
- [17] Jian-bing Gao, Si-zong Guo, (2010), A Solving Method of Fuzzy Linear System's Equilibrium Point, conference paper, Fuzzy Information and Engineering, 189-197.
- [18] Melliani, S., El Allaoui, A., Chadli, L. S., (2016), Complex fuzzy dynamical systems and Stability of the equilibrium Point, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 3, 223-233.
- [19] Khabiri, B., Naseri, S.H., Abdi, M., (2010). Determination of the market equilibrium value using the solution of the fuzzy linear equation system. Journal of Applied Mathematics, Lahijan Branch, 2 (25), 69-77.
- [20] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Khezerloo, M., (2011). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 4652-4662.
- [21] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Homayoun-nejad, M., Baleanu, D., (2013), General Solutions of Fully Fuzzy Linear Systems, Abstract and Applied Analysis, 10.1155/2013/593274.
- [22] Cong-Xin, W., Ming, M., (1991). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Embedding problem of fuzzy number space: Part I, Fuzzy Sets and Systems 44, 33-38.
- [23] Goetschel, R., Voxman, W., (1986), Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems. 18, 31-43.