

## ارایه الگوهای بهینه‌سازی قیمت گذاری دارایی‌های مالی با استفاده از سنجش‌های کمی سوگیری‌های رفتاری

مسعود کریمخانی<sup>۱</sup>، غلامرضا زمردیان<sup>۲\*</sup>، منصوره علیقلی<sup>۳</sup>، میر فیض فلاح شمس<sup>۴</sup>، فرهاد حنیفی<sup>۵</sup>

۱- دانشجوی دکتری، گروه مدیریت مالی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- استادیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۳- دانشیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۴- دانشیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۵- استادیار، گروه مدیریت بازرگانی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱ اردیبهشت ۱۳۹۸

پذیرش مقاله: ۳ آذر ۱۳۹۸

### چکیده

بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی کمی یک رشته در حال ظهور است که سعی در مدل‌سازی تأثیر سوگیری‌های سرمایه‌گذاران بر قیمت‌گذاری دارد. هدف این مقاله ارایه مروری بر مبانی نظری، چالش‌های آن و ارایه راه‌حل‌های کمی در این حوزه است. مقاله به دو بخش تقسیم شده است. در بخش نخستین مقاله، مروری بر ادبیات منتخب مبانی نظری کلیدی شده است. چرا این رشته مالی جدید پدیدار می‌شود؟ چه موضوعاتی را مطالعه می‌کند؟ در بخش دوم، مقاله به تشریح یک طرح کلی می‌پردازد و مجموعه‌ای از منابع جامع راجع به رویکردهای بهینه‌سازی در مدل‌سازی کمی تأثیر سرمایه‌گذاران رفتاری بر بازارهای مالی را ارایه می‌دهد. شواهد و مطالعات اخیر در مورد تصمیم‌گیری مالی تحت عدم قطعیت نشان می‌دهد که افراد مانند مدل‌های نئوکلاسیک رفتار نمی‌کنند. به همین دلیل سرمایه‌گذاران اغلب رفتارهایی به صورت سوگیری‌های رفتاری دارند که در مدل‌های نئوکلاسیک توصیف نشده است. از آنجا که سوگیری‌های رفتاری در سرمایه‌گذاران یک مفهوم نسبتاً گنگ است و تعریف و اندازه‌گیری عددی آن بسیار دشوار می‌باشد؛ بنابراین سوگیری‌های رفتاری سرمایه‌گذاران محدودیت دیگری هستند که تصمیم‌گیری مالی افراد را بهینه می‌کند. مساله بهینه‌سازی مدل‌های قیمت‌گذاری متداول دارایی‌های مالی اثر سوگیری‌های رفتاری را در ارزیابی پرتفوی‌ها لحاظ نمی‌کند. لذا در این تحقیق به بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت سنجش مقداری سوگیری‌های رفتاری در فضای روان‌شناسی شناختی، فاکتورهای مربوط به احساسات و عوامل غیرعقلایی پرداخته می‌شود.

**کلمات کلیدی:** سوگیری‌های رفتاری، بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی، مالی رفتاری.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Gh.zomorodian2@gmail.com

## ۱ مقدمه

از تئوری‌های دانش مالی نئوکلاسیک این‌گونه استنباط می‌شود که انسان اقتصادی مدل ساده‌ای از رفتار اقتصادی انسان است که بر پایه اصولی از قبیل منفعت شخصی کامل، عقلانیت کامل و تصمیم‌گیری اقتصادی بر اساس اطلاعات کامل استوار است [۱]. در بین اصول بیان شده، فرض عقلانیت کامل بنیادی‌ترین فرض در مالی نئوکلاسیک است که ریشه در اقتصاد نئوکلاسیک دارد؛ به طوری که طرفداران مالی نئوکلاسیک فرض عقلانیت را به این معنا به کار می‌گیرند که عاملان اقتصادی از تمام پیامدهای احتمالی آگاهی دارند و قادر به انتخاب‌هایی منطقی و سازگار هستند که مطلوبیت آن‌ها را حداکثر می‌کند [۲، ۳]. استفاده از فرض عقلانیت در مالی نئوکلاسیک دو دلیل اساسی دارد: ۱- عقلانیت باعث می‌شود تجزیه و تحلیل اقتصادی نسبتاً آسان شود. ۲- عقلانیت این امکان را برای اقتصاددانان فراهم می‌کند که یافته‌های خود را کمی کرده، پردازش و درک آن را ساده نمایند [۲]. در خلال دهه‌های گذشته، با نقض و چالش عقلانیت، اقتصاد مالی به شدت متحول شد و منجر به ظهور رشته مالی رفتاری گردید؛ به طوری که در اواخر قرن بیستم، تئوری عقلانیت، به چندین شیوه به چالش کشیده شد. اول اینکه، وقایع متعددی در بازارها رخ داده بود که فرض اساسی تئوری‌های مالی نئوکلاسیک را زیر سوال برد. دوم مالی رفتاری با شناخت حقایق روانشناسانه بیان داشت، که انسان‌ها دارای سوگیری فراوان هستند و برخلاف آنچه مالی نئوکلاسیک به طور مرسوم پنداشته‌اند، بی‌عاطفه و حسابگر نیستند و تحت تأثیر سوگیری‌ها و خطاهای یادگیری هستند [۴]. بیکر و ولرگر<sup>۱</sup> (۲۰۰۶) شواهدی را ارایه دادند که در برخی مقاطع نرخ بازده سهام مورد انتظار، مشروط بر سوگیری سرمایه‌گذار است. آن‌ها شاخص انتخاب را به صورت مؤلفه اساسی از چندین مؤلفه روانشناسی در نظر گرفتند. آن‌ها پیش‌بینی کردند که ویژگی‌های انتخاب تحت تأثیر انتخاب‌های احساسی است [۵]. از آنجا که، سوگیری‌های سرمایه‌گذار در تئوری مالی نئوکلاسیک در زمینه مساله انتخاب دارایی‌ها و تشکیل و بهینه‌سازی پرتفوی دارایی‌ها همواره یکی از موضوع‌های مورد بحث در تئوری‌های مالی نئوکلاسیک نادیده گرفته شده بود؛ مالی رفتاری در طول دو دهه گذشته، در پاسخ به پدیده‌ای که در بالا توضیح داده شد، توسعه پیدا کرد. محققان مالی و اقتصادی، با استفاده از روش‌های متنوع مدل‌های ریاضی، سوگیری‌های سیستماتیک از قبیل تورش‌های ادراکی، خطاهای انسانی که در سرمایه‌گذاران رخ می‌دهد را در جهت کمی کردن سوگیری‌ها و استفاده از آن‌ها در ارزش‌گذاری دارایی مالی در نظر گرفتند [۶].

## ۲ مبانی نظری پژوهش

چنانچه یک نگرش اجمالی به علوم مالی شود، دو انقلاب بزرگ در این علم صورت گرفته شده است. انقلاب اول در حوزه مالی از نگرش نئوکلاسیک‌ها در حوزه مسایل مالی از طریق بیشینه‌سازی دارایی‌ها، از دهه ۱۹۵۰ شروع شد. تئوری‌هایی از قبیل انتخاب پرتفوی میانگین-واریانس بر حسب مطلوبیت مورد انتظار، مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای<sup>۲</sup> (CAPM)، تئوری بازار کارا<sup>۳</sup> و قیمت‌گذاری اختیارات<sup>۱</sup> بسط نگرش

<sup>۱</sup> Baker, Malcolm, and Jeffrey Wurgler

<sup>۲</sup> Capital asset pricing model

<sup>۳</sup> Efficient market theory

نئوکلاسیک‌ها است. پایه تئوری نئوکلاسیک‌های مالی بر مفهوم بیشینه‌سازی ثروت<sup>۲</sup> بر مبنای عقلانیت می‌باشد. از این رو، نظریات اقتصادی- مالی نئوکلاسیک‌ها، فعالیت‌های انسانی را مانند علوم طبیعی منطقی و قابل پیش‌بینی می‌داند. به همین جهت در الگوی تصمیم‌گیری عقلایی، برای ارزیابی ترجیحات افراد از تابع مطلوبیت مورد انتظار استفاده می‌شود [۷، ۸، ۹، ۱۰]. این تابع مفروضات مختلفی دارد؛ از جمله، خطی بودن میزان مطلوبیت، یکسان بودن وزن مطلوبیت انتخاب‌های متفاوت، عدم تغییر ترجیحات در طول زمان، ریسک‌گریزی و تصمیم‌گیری بر اساس عقلانیت. اگرچه تئوری مطلوبیت، به عنوان یک موضوع جذاب زیربنای اصول اقتصادی- مالی مکتب نئوکلاسیک‌ها و اساس اقتصاد مالی کمی را تشکیل می‌دهد، اما این تئوری در پیش‌بینی سیستماتیک رفتارهای انسانی در تصمیم‌گیری‌ها مخصوصاً در شرایط نامطمئن و احتمالی چندان موفق نبوده است [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]. رویکردهای ریاضی و آمار که در توسعه تئوری‌های انتخاب در مکتب مالی نئوکلاسیک نقش اساسی ایفا کرده‌اند، به طور گسترده به عنوان سنگ بنای مالی کمی در نظر گرفته می‌شود؛ به طوری که مدل انتخاب پرتفوی واریانس میانگین مارکوویتز<sup>۳</sup> (۱۹۵۲)، که از نظریه احتمالات برای کمی کردن ریسک و نیز برنامه‌ریزی درجه دوم برای استنتاج راه‌حل استفاده می‌کند، یکی از پایه‌گذاران این مکتب است. تئوری قیمت‌گذاری اختیارات بلک شولز و مرتون<sup>۴</sup> از حسابان ایتو<sup>۵</sup> و معادلات دیفرانسیل جزئی، مثال‌های دیگر از "ریاضیات مالی"<sup>۶</sup> است. همچنین معیارهایی از قبیل اروپرت<sup>۷</sup> در تبیین مقداری مقرر گونه تابع ریسک‌گریزی مطلوبیتی مطلق<sup>۸</sup> را بنا کردند. مطلوبیت درجه دو، یک مورد ویژه از ریسک‌گریزی مطلق هاپربولیکی است، به طوری که یک سرمایه‌گذار، ترجیحات یک دارایی پر ریسک را به جای یک دارایی کم ریسک انتخاب کند. به بیان دیگر ریسک‌گریزی مطلق به معنای عدم تمایل به معامله‌ای پرسود ولی با ریسک بالا و ترجیح معامله‌ای با سود کم‌تر، ولی امنیت بیشتر می‌باشد [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. انقلاب دوم، مالی رفتاری است که در دهه ۱۹۸۰ آغاز شد. تئوری‌های اصلی آن عبارتند از: تئوری چشم‌انداز (تجمعی)، تئوری پتانسیل- بالقوه / آرمان<sup>۹</sup> (SP/A)، پشیمانی و خویش‌داری، اکتشافات<sup>۱۰</sup> و سوگیری‌ها<sup>۱۱</sup> می‌باشد. تئوری‌های مالی رفتاری فرض می‌کنند، احساسات و اکتشافات و سوگیری‌ها در هنگام مواجهه با عدم قطعیت‌ها بر تصمیمات ما تأثیر می‌گذارند و باعث می‌شوند که انسان، غیرقابل پیش‌بینی، متناقض، ناکارآمد و بیشتر از همه به شیوه‌های نامعقول رفتار کند. مالی رفتاری تلاش می‌کند تا توضیح دهد که چرا احساسات و خطاهای شناختی، سرمایه‌گذاران را تحت تأثیر قرار داده و ناهنجاری‌های بازار سهام از قبیل حباب و سقوط را ایجاد می‌کنند. در واقع، مالی رفتاری به دنبال کشف ثبات و قابلیت پیش‌بینی در نقص‌های انسانی است؛ به طوری که چنین نقایصی را می‌توان درک کرد، اجتناب کرد یا از

<sup>1</sup> Option pricing

<sup>2</sup> wealth maximization

<sup>3</sup> Markowitz, H.M.

<sup>4</sup> Black and Scholes, Merton

<sup>5</sup> Itô calculus

<sup>6</sup> Financial Mathematics

<sup>7</sup> Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion (ARA)

<sup>8</sup> Absolute risk aversion

<sup>9</sup> Security-potential/aspiration

<sup>10</sup> Heuristics

<sup>11</sup> Biases

آن‌ها بهره‌برداری نمود [۱۰]. مالی رفتاری شواهدی دارد مبنی بر این که قالب‌ها بر انتخاب‌ها تأثیرگذار هستند و در نتیجه فرض عقلانیت و نگاه ریاضی نئوکلاسیک در حوزه مالی را به چالش می‌کشند. دانیل کاهنمن و همکارانش<sup>۱</sup> (۲۰۰۲) با طرح نظریه چشم‌انداز، دریچه جدیدی را به ریاضیات مالی گشودند و مفهوم استفاده از تئوری مطلوبیت مورد انتظار تحت ریسک‌گریزی، مورد انتقاد مالی رفتاری قرار گرفت [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. در ادامه به بررسی بهینه‌سازی ارزش‌گذاری دارایی‌های مالی با استفاده از سنجش‌های سوگیری‌های رفتاری ریاضی پرداخته می‌شود.

### ۳ نگرش‌های بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی با استفاده از سنجش‌های رفتاری

#### ۳-۱ بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت نظریه چشم‌انداز<sup>۲</sup>

دانشمندان مالی رفتاری با طرح نظریه چشم‌انداز با استفاده از تابع ارزش  $S$ ، بر حسب تابع مطلوبیت فریدمن و ساوج<sup>۳</sup> (۱۹۴۸) متعاقباً یک «تابع ارزش» را برای سودها مقعر و برای زیان‌ها محدب در نظر گرفتند. این تابع تغییر، ثروت را در موقعیت‌های نهایی دارایی در نظر می‌گیرد. به عبارتی نظریه چشم‌انداز به عنوان نظریه توضیح‌دهنده تصمیم‌گیری تحت شرایط عدم اطمینان، سرمایه‌گذاران پیامدها را بر حسب سطح ثروت کل ارزیابی نمی‌کنند، بلکه بر حسب ادراک خود از سود یا زیان نسبت به نقطه مرجع (نوعاً قیمت خرید) ارزیابی می‌کنند. این نتیجه‌گیری، انکار نظریه مطلوبیت مورد انتظار که توسط نیومن-مورگنسترن<sup>۴</sup> (۱۹۴۴) مبتنی بر یک سیستم برهانی، نمایانگر «رویداد کلیدی» نظریه چشم‌انداز به عنوان «یک نظریه جایگزین از انتخاب پر ریسک» به شمار می‌رود. در نظر گرفتن «تغییرات در ثروت<sup>۵</sup> یا رفاه، به جای سطح ثروت<sup>۶</sup>» به عنوان «حاملین ارزش» نظریه چشم‌انداز را «با اصول اولیه ادراک و داوری<sup>۷</sup> هماهنگ می‌سازد [۱۴].

تابع مطلوبیت فریدمن و ساوج<sup>۸</sup> (۱۹۴۸) که مبنای تابع ارزش، نظریه چشم‌انداز (شکل  $S$ ) توسط کاهنمن و تیورسکی<sup>۹</sup> (۱۹۷۹، ۱۹۹۲) قرار گرفت، فرض می‌کند: تابع مطلوبیت برای تمایل یک فرد به خرید بیمه برای زیان‌های بزرگ دارای مطلوبیت مقعر برای زیان و همچنین تمایل به بازی لاتاری دارای مطلوبیت محدب برای بازده بالا دارد و دارای شکل هندسی ۱ می‌باشد. این تابع از جمع دو تابع مقعر و محدب تشکیل شده است [۱۵].

<sup>1</sup> Daniel, K. D., Hirshleifer, D., & Siew Hong, T.

<sup>2</sup> Prospect Theory

<sup>3</sup> Friedman and Savage

<sup>4</sup> Neumann and Morgenstern

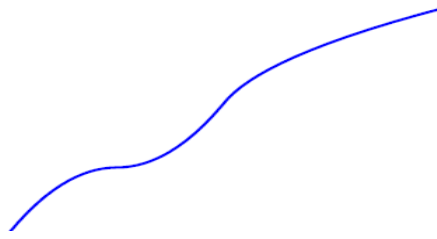
<sup>5</sup> Changes of wealth

<sup>6</sup> Final states

<sup>7</sup> Perception and judgment

<sup>8</sup> Friedman and Savage

<sup>9</sup> Kahneman and Tversky



شکل ۱. تابع مطلوبیت فریدمن و ساوج

تابع مطلوبیتی که فریدمن و ساوج<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۴ ارائه دادند به نوعی شبیه تابع سیگموئید<sup>۲</sup> است که این تابع به ازای کلیه مقادیر حقیقی کران دار و مشتق پذیر قابل تعریف می باشد. همچنین دارای مشتق مثبت است. این تابع به لحاظ گرافیکی شکلی شبیه حرف S انگلیسی می باشد و خاصیت یک تابع سیگموئید یا بایولار تابع غیرخطی مشتق پذیر است [۱۵، ۱۶].

تابع سیگموئیدی لگاریتمی

$$f(x) \sim \text{value} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

و تابع تانژانت سیگموئیدی

$$f(x) \sim \text{value} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

بنابراین سرمایه گذاران در منطقه سود ریسک گریز (مقعر) بوده و در منطقه زیان ریسک پذیر، جستجوگری ریسک یا علاقمند ریسک<sup>۳</sup> (محدب) هستند. بنابراین در منطقه سود تقعر (مفهوم ریسک گریزی یا اجتناب از ریسک<sup>۴</sup>) دارند. با توجه به نکات مطرح شده، «نظریه چشم انداز» پیش بینی می کند که افراد معمولاً در انتخاب گزینه های سود آور، تصمیمات ریسک گریز و در انتخاب گزینه های زیان آور، تصمیمات ریسک پذیر اتخاذ می کنند. این پیش بینی ها از سه ویژگی اساسی سیستم شناختی اصلی بشر سرچشمه می گیرد. نخست، تمام فرآیند تصمیم گیری نسبت به یک نقطه مرجع خنثی<sup>۵</sup> رخ می دهد. خروجی های مازاد از این نقطه مرجع، سودها هستند و خروجی های شکل نقطه مرجع، زیانها می باشند. دوم، زیان گریزی به این معنی است که ناراحتی از دست دادن چیزی دو برابر بیشتر از خوشحالی به دست آوردن همان چیز است. به زبان فنی تر، انسانها زیان گریز هستند. بنابراین وقتی سرمایه گذار یک دارایی را دارد، نمی خواهد آن را از دست بدهد، اما وقتی آن دارایی را نداشته باشد، برای خرید آن هم فوریتی احساس نمی کند [۱۵]. سومین، تضعیف حساسیت برای ادراکات بالارونده و پایین رونده و تکامل تغییرات ثروت به کار گرفته می شود [۱۵].

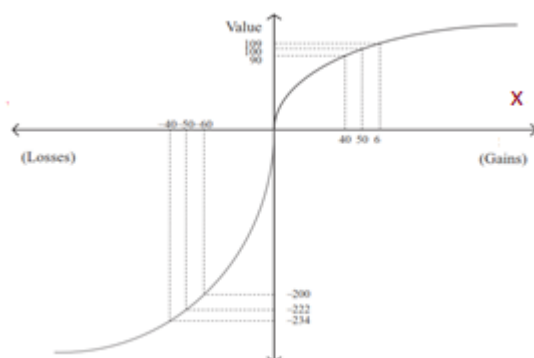
<sup>1</sup> Friedman and Savage

<sup>2</sup> Sigmoid function

<sup>3</sup> Risk loving or risk seekin

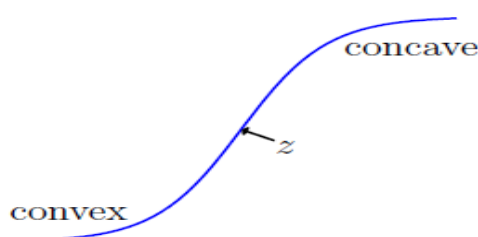
<sup>4</sup> Risk avoiding

<sup>5</sup> Neutral reference point



شکل ۲. یک تابع ارزش (سیگموئید) با در نظر گرفتن این سه اصل ارزش نظریه چشم‌انداز کاهنمن و تیورسکی<sup>۱</sup> (۱۹۷۹، ۱۹۹۲)

متفقاً، این سه اصل، نقطه مرجع خنثی، زیان‌گریزی و تضعیف حساسیت را می‌توان از طریق یک شکل که منحنی سیگموئید نامتقارنی را به تصویر می‌کشد، نشان داد که در آن نقطه عطف در سطح پذیرش خنثی رخ می‌دهد که پرشیب بودن زیرسطح پذیرش، نمایانگر زیان‌گریزی است و نرخ نزولی تغییرات در هر دو جهت نمایانگر تضعیف حساسیت نسبت به سودها و زیان‌هاست [۱۵]. چنانچه مقادیر کوانتایل‌های (چندک‌ها) ثروت نسبت به مرجع  $Z$  در نظر گرفته شود، با شرط  $x \leq z$  در منطقه ریسک‌گریز (محدب) و اگر  $x \geq z$  ثروت دارای تقعر (مفهوم ریسک‌گریزی یا اجتناب از ریسک<sup>۲</sup>) است.



$$x \leq z \in [l, u] \Rightarrow \text{convex}$$

$$x \geq z \in [l, u] \Rightarrow \text{concave}$$

شکل ۳. یک تابع ارزش (سیگموئید نامتقارنی)

مسائل بهینه‌سازی تابع ارزش نظریه چشم‌انداز در این است که هدف، پیدا کردن مقدار بهینه یک تابع ارزش (کمینه و بیشینه) بر روی دامنه‌ای خاص است. روش‌های زیادی برای حل کردن این مسائل وجود دارد و حالت خاص این مساله برنامه‌ریزی خطی است که در آن تابع مورد نظر برای کمینه یا بیشینه شدن یک تابع خطی می‌باشد. بهینه‌سازی تابع ارزش نظریه چشم‌انداز مربوط به مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است که توابع هدف و همین‌طور قیود مسأله محدب و مقعر هستند. اکنون تعداد زیادی از این مسائل که کاربردهای مهندسی دارند قابل حل می‌باشند. به منظور یافتن بهینه تابع ارزش کاهنمن تحت قید مجموعه محدب و مقعر ( $Z$ ) فرض می‌شود [۱۰، ۱۴، ۱۵].

<sup>1</sup> Kahneman and Tversky

<sup>2</sup> Risk averse or risk avoiding

در رابطه زیر،  $f(x)$  تابع ارزش کاهنمن با تقریب تابع سیگموئید است به طوری که  $x \in R^n$  می‌باشد. این تابع در دامنه حداکثر زیان  $l$  و حداکثر مطلوبیت  $u$ ،  $f: [l, u] \rightarrow R$ ، با نقطه عطف  $z$  ( $z \in R$ ) را می‌توان به صورت یک سیگموئیدی دو بخشی  $f_1$  و  $f_2$  بازنویسی کرد:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{1}{2f'(z_r)(x-z_r)} & x \leq z_r \\ f(z_r) + \frac{1}{2f'(z_r)(x-z_r)} & x > z_r \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2f'(z_r)(x-z_r)} & x \leq z_r \\ f(x) - f(z_r) - \frac{1}{2f'(z_r)(x-z_r)} & x > z_r \end{cases}$$

اگر معادله فوق، محدب باشد، آن‌گاه تابع در بازه  $f: [l, z_1] \rightarrow R$  و  $f: [z_r, u] \rightarrow R$  قرار دارد. به این معنی که این افراد استراتژی جسورانه دارند. استراتژی جسورانه یعنی این که تابع مطلوبیت ثروت او به صورت محدب باشد، بنابراین برای این شخص مطلوبیت نهایی با افزایش ثروت افزایش می‌یابد و شخص همیشه در این حالت خواهان پذیرش ریسک است و مایل است شانس خود را آزمون کند. چنانچه معادله فوق، مقعر باشد، آن‌گاه تابع در بازه  $f: [z_1, z_r] \rightarrow R$  قرار دارد. به این معنی که این افراد استراتژی محافظه کارانه دارند و مطلوبیت نهایی افراد ریسک‌گریز با افزایش ثروتشان کاهش می‌یابد. بنابراین هر فردی که منحنی مطلوبیت ثروت او مقعر باشد ریسک‌گریز است. یک شخص ریسک‌گریز ترجیح می‌دهد که یک بازه مطمئن به دست آورد و در حالی که شانس و اقبال مطرح باشد شرکت نخواهد کرد. [۱۵].

### ۳-۲ بهینه‌سازی قیمت گذاری دارایی‌های مالی تحت نظریه دوگانگی انتخاب<sup>۱</sup>

نظریه دوگانگی انتخاب بر پایه مفروضات تئوری مطلوبیت انتظار فریدمن و ساوج پایه گذاری شده است. بهینه‌سازی قیمت گذاری دارایی‌های مالی تحت نظریه دوگانگی انتخاب که توسط<sup>۲</sup> یاری (۱۹۸۷) ارائه شد، یک رویکرد بسط یافته از تئوری مطلوبیت قابل انتظار می‌باشد؛ به نحوی که سعی در رفع معماها و پارادوکس‌های این تئوری داشت. نظریه دوگانگی انتخاب بیان می‌دارد، ذهن انسان از دو سیستم مجزا و متفاوت تشکیل شده است. سیستم یک به صورت خودکار و سریع، بدون نیاز به تلاش زیاد یا کنترل خودخواسته عمل می‌کند و پیوسته فعال است و سیستم دو به فعالیت‌های ذهنی نیازمند تلاش، مانند محاسبات پیچیده معطوف می‌شود. کارکردهای سیستم دو اغلب با تجربه‌های ذهن گرا مانند اختیار، انتخاب و تمرکز در ارتباط است. این در حالی است که سیستم نوع دو یک شیوه تفکر پرحمت، آرام و کنترل شده است که نیاز به انرژی، تمرکز و توجه کافی خیلی بیشتر از سیستم

<sup>1</sup> Optimization of financial asset pricing under the theory of duality of choice

<sup>2</sup> Yaari

نوع یک دارد و به همین علت ذهن معمولاً سعی می‌کند از آن دوری کند. بنابراین نظریه‌ی دوگانگی انتخاب تلاش می‌کند که نشان دهد، چگونه این دو سیستم متفاوت می‌توانند در کنار هم رفتارها و حالت‌های ذهنی انسان را در قالب نظریه مطلوبیت قابل انتظار به کار گیرند. به بیان دیگر یکی از مهم‌ترین و مؤثرترین اقدامات در جهت افزایش بازدهی و مدیریت منابع، تقسیم کار میان سیستم‌های یک و دو است. انجام درست این کار تلاش را به حداقل و کارکرد را به حداکثر (بهینه‌سازی) می‌رساند. این نظریه فرض دارد که سرمایه‌گذاران اطلاعات را از طریق دو الگوی موازی و متعامل پردازش می‌کنند، بنابراین رفتار انسان پیامد دو سامانه پردازش است که در موقعیت‌های مختلف، غلبه نسبی بر هم دارند [۱۷]. در واقع مدل پردازش شناختی انسان در این دیدگاه، به صورت دو بعد تک قطبی و نه یک بعد دو قطبی انجام می‌شود؛ به این معنا که پردازش شناختی در دو سامانه مستقل صورت می‌گیرد و توانایی در یک سبک به هیچ وجه نشان‌دهنده ضعف در سامانه دیگر نیست. از این رو، افراد می‌توانند در هر دو سبک، هیچ‌کدام از سبک‌ها و یا تنها در یکی از این سبک‌ها عملکرد خوبی داشته باشند. در چارچوب دیدگاه نظریه دوگانگی انتخاب، ریسک‌ها با یک انحراف اعمال‌شده به توابع توزیع احتمال و در مقابل در مطلوبیت مورد انتظار، گرایش‌ها نسبت به ریسک‌ها با کارکرد مطلوبیت از ثروت مشخص می‌شوند. یاری (۱۹۸۷) جهت استدلال نظریه دوگانه انتخاب، فرض ذیل را پس از اثبات ارایه داد: [۱۸]

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} wP(X > x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [w(1 - F_X(x))]dx$$

که در آن  $X$  یک متغیر بازده مورد انتظار،  $V(X)$  ارزش ثروت،  $F(x)$  تابع توزیع تجمعی،  $W$  تابع توزیع احتمال (یا توزین) با نگاشت از  $[0,1] \rightarrow [0,1]$ ، و اوزان  $W(0) = 0$ ،  $W(1) = 1$  است [۱۹]. برخلاف معادله مطلوبیت مورد انتظار فریدمن و ساوج که وابسته به سطح مطلوبیت نهایی ثروت است، معادله نظریه دوگانگی انتخاب شامل تحریف ناشی از احتمال از دست دادن ثروت می‌باشد. به عبارتی  $[w(1 - F_X(x))]$  وزن مطلوبیت نهایی ناشی از تحریف ثروت است که بر روی ثروت نهایی  $X$  اثر می‌گذارد و میزان ارزش ثروت را بیان می‌کند. نظریه دوگانگی انتخاب<sup>۲</sup> یاری (۱۹۸۷) رویکردی متفاوت از مدل میانگین-واریانس با نگرش محدودیت حفظ ثروت است؛ زیرا در این مدل ریسک پرتفوی شامل واریانس آن نمی‌باشد، بلکه احتمال از دست دادن ثروت است. سرمایه‌گذاران در تلاش هستند تا ثروت نهایی آن‌ها از سطح معینی کمتر نشود. نظریه دوگانگی انتخاب با هدف کمینه کردن احتمال کاهش ثروت از سطح معینی این نظر را داد که در شرایط  $W(0)$ ، این معیارها ترجیح جایگزین (احتمال کاهش ثروت از سطح معینی) را در مدل ورود می‌کند. اگر  $W(0)$  محدب باشد، مقادیر اوزان  $w(1 - F_X(x))$  در مقادیر احتمالی یک ( $p = 1$ ) بیشتر از مقدار در مقادیر احتمالی یک ( $p = 0$ ) است، بنابراین بیش اوزان‌دهی در تابع  $V(X)$  احتمال از دست دادن ثروت را بیشتر می‌کند. به عبارت دیگر، نماینده ریسک‌پذیری است. در نظریه دوگانگی انتخاب، نگرش به ریسک تحریف ناشی از احتمال از دست دادن ثروت، به جای استفاده از مطلوبیت نهایی است که با اوزان‌دهی کمتری برای  $V(X)$  حاصل می‌شود. بنابراین این

<sup>1</sup> Expected utility theory

<sup>2</sup> Yaari's dual theory of choice



استنتاج می‌شود که مردم در برخورد با سود و زیان، متفاوت رفتار می‌کنند و به طور متمایز نسبت به ضرر، حساسیت بیشتری نسبت به سود دارند. بنابراین سرمایه‌گذاران در این نظریه، در سودها (دریافتی‌ها) و زیان‌ها نسبت به نقاط مرجع انتخاب‌هایشان را ارزیابی می‌کنند و به زیان‌ها وزن بیشتری نسبت به سودها می‌دهند [۱۹].

### ۳-۳ بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت نظریه گشتاورهای سطح بالا

این مفهوم را می‌توان فاصله‌ی مفهومی بین قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای مدل مارکویتز (مالی کلاسیک) و اقتصاد رفتاری با تطبیق بسط نوسانات سطح بالا گشتاوری یک دارایی سرمایه‌ای<sup>۱</sup> نشان داد. از آنجا که مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس مارکویتز از این ایده نشأت می‌گیرد که سرمایه‌گذار بازده‌های مورد انتظار بالاتر و ریسک پایین‌تر را با فرض عقلایی مارکویتز ترجیح می‌دهند؛ بنابراین دارایی سرمایه‌ای دارای خاصیت گشتاوری دارد که در صورت ثابت بودن سایر شرایط، سرمایه‌گذاران احتمال بالاتر یک نوسانات یک دارایی را در جهت مثبت به احتمال بالای یک نوسان شدید در جهت منفی ترجیح می‌دهند؛ به طوری که سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز چولگی مثبت را به چولگی منفی ترجیح می‌دهند، زیرا با احتمال بیشتر، بازدهی سهام با چولگی مثبت بیشتر از میانگین خودش است. برای کشیدگی سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز، کشیدگی کمتر را به کشیدگی بیشتر ترجیح می‌دهند، تا بدین وسیله خود را از نوسانات حدی ایمن دارند [۲۰]. با این فرض، قیمت‌گذاری دارایی نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار عقلایی، چولگی مثبت در بازده‌های پرتفوی را ترجیح می‌دهد. در حالی که مطالعه دقیق داده‌های موجود در بازار ما را به این حقیقت مهم رهنمون می‌سازد که اگر بازده یک سبد سرمایه‌گذاری حول میانگین نامتقارن باشد، نظریه بهینه‌سازی کلاسیک سبد ارایه شده توسط مارکویتز، کارایی لازم را نخواهد داشت. بنابراین، سرمایه‌گذاران برای تحمل این ریسک، تقاضای بازده در سطوح مختلف ریسک به صورت غیرخطی دارند. به منظور یافتن راه حلی برای رفع این نقیصه، کونو (۱۹۹۳)، روشی را برای افزودن چولگی در تابع هدف پیشنهاد داده است. همچنین بویل (۲۰۰۶)، با ارایه تقریب‌های خطی مناسب از گشتاور مرتبه سوم و همچنین ارایه الگوریتمی کارا برای پیاده‌سازی این روش، گام عملی مفیدی برای گسترش این ایده در بازارهای مالی برداشته است. برخی محققان برای تبیین رفتارهای غیرخطی تقریب بازده به توجه سطح معینی از انتظار ریسک از سری تیلور<sup>۲</sup> بهره گرفتند. کاربرد این سری برای تخصیص دارایی‌های مالی نسب به ریسک و بازده در سطح گشتاورهای بالا، قابل استناد در تقریب از تابع مطلوبیت انتظاری است. بسط سری تیلور توابع را حول یک نقطه (میانگین بازده مورد انتظار) با تعدادی متناهی از جملات سری تیلور تقریب می‌زند و باعث می‌شود، انتخاب سبد سهام بهینه در حضور گشتاور بالا و عدم اطمینان پارامترها نشان داده شود. مخصوصاً برای اندازه‌گیری اثر گشتاور بالا روی تخصیص دارایی، می‌توان مطلوبیت انتظاری را به بسط سری تیلور حول میانگین تغییرات ثروت (یا بازده) مورد انتظار تقریب کرد. سری تیلور یک تابع ثروت  $X$ ،  $f(X)$ ، با مقادیر حقیقی یا مختلط که در

<sup>1</sup> The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

<sup>2</sup> Taylor Series

همسایگی ثروت (یا بازده  $x_0$ ) مورد انتظار حقیقی یا بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، سری توانی زیر می‌باشد: [۲۱]، ۲۲، ۲۳].

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots$$

که در آن مقادیر  $(x-x_0)^r$  و  $r!$  برابر با یک است، و مشتق مرتبه صفر  $f(x)$  برابر با خود  $f(x)$  و  $f'(x)$  مشتق مرتبه اول است. شکل خلاصه‌تر بسط سری تیلور حول ثروت (یا بازده) مورد انتظار به صورت ذیل است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

در مدل فوق تقریب میانگین تغییرات ثروت (یا بازده) در نوسانات مؤلفه‌های بازار، اگر تغییرات ثروت (یا بازده) به صورت بازده لگاریتمی، طبق تعریف  $f(x) = \ln(1+x)$  فرض شود، محاسبه بازده لگاریتمی به جای بازده حسابی این اجازه را می‌دهد که بازده چند دوره‌ای مرکب پیوسته را به سهولت جمع بازده‌های یک دوره‌ای مرکب پیوسته محاسبه نمود. در واقع، نه فقط از لحاظ زیبایی شناختی بلکه از لحاظ ریاضی بازده لگاریتمی نسبت به بازده هندسی و میانگین حسابی، تغییرات را به دقت نشان می‌دهد؛ به طوری که هنگامی بازده‌ها به صورت سری به هم مرتبط باشند، میانگین حسابی می‌تواند باعث تخمین‌های گمراه‌کننده شود [۲۱، ۲۲، ۲۳]. مقادیر بازده میانگین حسابی از معادل هندسی آن بیشتر است؛ اگر بازده‌ها توزیع نرمال لگاریتمی داشته باشند، تفاوت بین این دو، نصف واریانس بازده‌ها است. محاسبه بازده‌های لگاریتمی نه تنها مشکل دست‌کاری میانگین‌های هندسی را حل می‌کند، بلکه اجازه می‌دهد بازده چند دوره‌ای مرکب پیوسته را به سادگی به صورت جمع بازده‌های یک دوره‌ای مرکب پیوسته بیان کنیم:

$$f(x) = \ln[(1+x_t) \times (1+x_{t-1}) \times \dots \times (1+x_{t-k+1})]$$

بنابراین

$$f(x) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}$$

از آن مهم‌تر این که، این بیان بازده‌های لگاریتمی به یک بسط بسیار ساده و ظریف سری تیلور تبدیل می‌شود. برای تابع لگاریتمی  $f(x) = \ln(1+x)$ ، بسط سری تیلور به صورت ذیل درمی‌آید: [۲۴]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad -1 \leq x \leq 1$$

تعمیم بسط سری تیلور برای توضیح  $f(x)$  در حول میانگین بازده مورد انتظار  $x = \mu$  به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\mu)}{n!} (x-\mu)^n \\ &= \ln(1+\mu) + \frac{x-\mu}{1+\mu} - \frac{(x-\mu)^2}{2(1+\mu)^2} + \frac{(x-\mu)^3}{3(1+\mu)^3} - \frac{(x-\mu)^4}{4(1+\mu)^4} + o[(x-\mu)^5] \end{aligned}$$

که  $O[(X-\mu)^5]$  باقیمانده جملات از مرتبه پنجم و بالاتر را ارایه می‌کند. با توجه به اینکه سری زمانی به بازده‌های لگاریتمی نیز متکی است، بسط دقیق‌تر مرتبه سوم یا بالاتر سری تیلور را می‌توان به وسیله‌ی مربوط کردن عامل تنزیلی به نرخ حاشیه‌ی جایگزینی بین دوره‌های  $t$  و  $t+1$  در اقتصاد دو دوره‌ای استنتاج کرد. جاویر

استراد (۲۰۱۵)<sup>۱</sup> از بسط سری تیلور و جایگزین پراکنندگی مرکزی آماری بهره استفاده کرد؛ به طوری که با جایگذاری میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma$  در بسط  $f(x)$  باشند. پس مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای مرسوم به شکل بسط سری تیلور بازده های مورد انتظار به دست می آید.

$$f(x) = \ln(1+\mu) + \frac{x-\mu}{1+\mu} - \frac{\sigma^2}{2(1+\mu)^2} + \frac{\text{skew}(x)}{3(1+\mu)^3} - \frac{\text{kurt}(x)}{4(1+\mu)^4} + o[(x-\mu)^5]$$

بنابراین:

$$f(x) = \ln(1+\mu) + \frac{x-\mu}{1+\mu} - \frac{\sigma^2}{2(1+\mu)^2} + \frac{\mu_3}{3(1+\mu)^3} - \frac{\mu_4}{4(1+\mu)^4} + o[(\mu)^5]$$

که  $o[(x-\mu)^5]$  جملات باقی مانده ی بسط سری تیلور را فراتر از مرحله  $n$  تعیین می نماید. استرادا، جمله ی دوم سری،  $\frac{x-\mu}{1+\mu}$  را حذف می کند و اهمیت چندانی به باقی جملات تیلور قایل نمی شود؛ بنابراین مدل پیشنهادی استرادا که جمله ی باقی مانده را به عنوان اجرای مستقیم چولگی و کشیدگی و بسط سری تیلور مستقیماً یک تابع مطلوبیت انتظاری براساس میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی برای یک سرمایه گذار که یک تابع مطلوبیت تغییرات ثروت (بازده) لگاریتمی را بیان کرد، عبارت است از: [۲۵]

$$U(W) = f(x) = \ln(1+\mu) - \frac{s^2}{2(1+\mu)^2} + \frac{\text{skew}(x)}{3(1+\mu)^3} - \frac{\text{kurt}(x)}{4(1+\mu)^4}$$

بنابراین، چنانچه تابع مطلوبیت سرمایه گذار در قالب توزیع ثروت ذیل بیان شود:

$$U(w) = \int U(w).f(w).dw$$

که  $f(w)$  تابع توزیع احتمال ثروت پایان دوره است که به توزیع احتمال چند متغیره ی بازده و وزن اجزای سبد سهام وابسته می باشد؛ بنابراین، بسط بینهایت سری تیلور تابع مطلوبیت عبارت است از:

$$U(w) = U(\bar{w}) + \frac{1}{1!} U'(\bar{w})s + \frac{1}{2!} U''(\bar{w})s^2 + \frac{1}{3!} U'''(\bar{w})s^3 + \frac{1}{4!} U^{(4)}(\bar{w})k^4$$

که  $\bar{w} = 1 + \alpha'\mu$  نشان دهنده ثروت مورد انتظار پایان دوره است،  $\mu$  بردار بازده های انتظاری را تعیین می کند و  $\alpha'$  بردار ترانسپوز وزن سبد سهام را تعیین می نماید. در صورتی که چولگی و کشیدگی به ترتیب، به عنوان سومین و چهارمین مرحله ی مرکزی به جای سومین و چهارمین گشتاور استاندارد تعریف شود، در این مدل بسط سری تیلور تلویحاً در مورد تأثیر چولگی و کشیدگی بر رفاه سرمایه گذار بیان می شود. تحت فرضیات ضعیف تر- فواید حاشیه ای مثبت، ریسک گریزی در همه سطوح رفاه و ثبات شدید در دیدگاه سرمایه گذار نسبت به گشتاور آماری وجود دارد [۲۵]. اگر  $n$  فرد باشد و  $U^{(n)}(w) > 0, \forall w$  و اگر  $n$  زوج باشد و  $U^{(n)}(w) < 0, \forall w$  باشد. ترجیح منفی برای چولگی منفی ناشی از گشتاور جزء پایین به عنوان ریسک نامطلوب با درجه گشتاوری  $n$  می باشد و ترجیح مثبت برای چولگی مثبت ترجیح مثبت برای چولگی مثبت ناشی از گشتاور جزء بالا به عنوان ریسک مطلوب با درجه گشتاوری  $n$  می باشد. بسط سری تیلور تابع مطلوبیت فوق نشان می دهد که اگر مشتق سوم تابع مطلوبیت مثبت باشد، ترجیح برای چولگی و مشتق وجود دارد. درجه گشتاور جزء پایین، درجه

<sup>1</sup> Javier Estrada

ریسک‌پذیری و ریسک‌گریزی و متقابلاً تحذب و تعقر منحنی تابع مطلوبیت در ناحیه‌ی زیر تغییرات ثروت (بازده) لگاریتمی مورد انتظار را تعیین می‌کند؛ به‌طوری که در حوزه تئوری پرتفوی ترجیحات مشتق سوم همواره مثبت است. همچنین واتاد (۲۰۱۱) نشان داد که سرمایه‌گذاران تمایل به چولگی دارند. او از شکل غیرخطی، برای نشان دادن سطوح یا درجه اشتیاق سرمایه (گشتاور سطح بالا) یک تابع نمایی استفاده نمود. این تابع از نظر شکل ظاهری شبیه تابع هایپربولیک تانژانت لیبرلینگ داشت که وقتی سرمایه‌گذاران ثروت بیشتری به دست می‌آورند تمایل بیشتری به پذیرش موقعیت‌های پر ریسک پیدا می‌کنند. به بیان واضح‌تر، سرمایه‌گذاران ثروتمندتر تمایل بیشتری به پذیرش ریسک در سبد سهام سرمایه‌گذاری خود دارند. بنابراین، حضور مشتق سوم مثبت در بیشتر مدل‌های متعارف مثبت است. به‌طوری که وقتی ثروت سرمایه‌گذاران زیاد شود، تمایل بیشتری به امتحان کردن مزه‌ی نتایج چوله‌ی مثبت دارند. بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت نظریه گشتاورهای سطح بالا فرض می‌کند که در صورت ثابت بودن سایر شرایط، سرمایه‌گذاران مقادیر بالای گشتاورهای فرد را که نمایانگر امید یا حرص و طمع بر مقادیر گشتاورهای زوج نمایانگر ترس می‌باشد، ترجیح می‌دهند.

پایداری ریسک‌گریزی، سازگاری کامل اولویت گشتاور و ترجیح مثبت برای چولگی مثبت نشان‌دهنده‌ی ترجیح منفی برای گشتاور چهارم (کشیدگی) است. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاران متمایل به بازده متوسط و چولگی و از واریانس و کشیدگی گریزان هستند. گشتاورهای فرد، میانگین و چولگی بازده را افزایش می‌دهند اما گشتاور زوج، بازده ترکیبی مورد انتظار را جابه‌جا می‌کنند. رفتار متناوب رفتار گشتاورهای ریاضی شماره‌های زوج و فرد، یک گسترش منطقی از ویژگی غیرخطی و ضروری رفتار سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد که قبلاً به وسیله رفتار یک سوئه شبه واریانس مشاهده شده است. بیشتر سرمایه‌گذاران، زیان‌های بزرگ یا کسری‌های کوچک غیرمکرر را ریسک‌دارتر از زیان‌های کوچک مکرر یا کسری‌های کوچک در نظر می‌گیرند. وضوح این ادعا که سرمایه‌گذاران به طور کلی مقادیر بالای گشتاورهای فرد و مقادیر پایین گشتاورهای زوج را ترجیح می‌دهند؛ در دورترین نقاط توزیع مشاهده می‌شود. گشتاورهای زوج را می‌توان به عنوان راهی برای کاهش مقادیر زیاد در کنار زیان‌ها و افزایش سود آن‌ها در نظر گرفت. درکشش‌های عریض، چولگی مثبت نشان‌دهنده‌ی حضور سودهای بیش از اندازه است؛ یک امکان وسوسه‌انگیز و سفته بازی وجود دارد که برخی از اقلام سبد سهام دارای سود غیرمنتظره زیادی باشند، گویا این که یک لاتاری برنده شده‌اند. در مقابل، گشتاورهای زوج، پراکندگی و لذا نوسانات را اندازه می‌گیرند؛ چیزی غیرمعمول که باعث کاهش عدم اطمینان بازده‌ها می‌شود. بنابراین با تعریف اصلی و کلی بسط سری تیلور به عنوان تابع دیفرانسیل‌ها، فاکتوریل‌ها و چندجمله‌ای‌ها تخمین ساده‌تری از بازده‌های انتظاری یا مطلوبیت سرمایه‌گذار به عنوان تابع ترجیحی را ممکن می‌سازد [۲۱، ۲۲، ۲۳].

$$U(w) = U(\bar{w}) + \frac{U(\bar{w})'}{2} (\bar{w})\sigma^2 + \frac{U(\bar{w})''}{6} (\bar{w})(skew(x))^2 + \frac{U(\bar{w})'''}{24} (\bar{w})(kurt(x))^4$$

که در آن skew و kurt نشان‌دهنده‌ی چولگی و کشیدگی هستند؛ که بر حسب میانگین بازده انتظاری تعریف شده‌اند. براساس ادراک محقق طبق نتایج فوق ذکر که از پاسخ‌های سرمایه‌گذار به مراحل فرد و زوج، مطلوبیت

انتظاری واقعی که با این تابع برآورد شده است، رابطه مثبتی با بازده مورد انتظار و چولگی دارد و با واریانس و کشیدگی رابطه منفی دارد.

بنا به اعتقاد مارکویتز توجه به گشتاورهای بالاتر نظیر چولگی و کشیدگی به عنوان شاخص ریسک به جای واریانس، نتایج دقیق تری را به همراه دارد؛ مگر آنکه بنا به دلایلی مانند تقارن توزیع احتمال متغیر مورد بررسی، گشتاورهای بالاتر در نظر گرفته نشوند. بنابراین در مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای چهار- گشتاوری دارایی سرمایه ای، بسط سری تیلور، یک فرآیند محاسبات عددی در تشکیل مدل قیمت گذاری رفتاری بر حسب حساب ریسک گریزی تعریف می شود که از قضیه گشتاورهای سطح بالا در تبیین تئوری چشم انداز و نظریه SP/A استفاده می کند [۲۵].

### ۳-۴ بهینه سازی قیمت گذاری دارایی های مالی تحت مدل ترکیبی سرمایه گذار عقلایی- رفتاری یانک

یانک و همکاران<sup>۱</sup>، در چارچوبی مدل سازی ریاضی به بررسی تأثیر سوگیری بر روی پرتفوی سهام پرداختند. این ایده از بیان فریدمن<sup>۲</sup> (۲۰۰۲) استفاده شده که می گوید، سرمایه گذار عقلایی می تواند سرمایه گذاران غیرعقلایی را کنار بگذارد، به طوری که در بازارهای مالی با وجود سرمایه گذار خوش بین و بدبین، اثر سوگیری مثبت بر قیمت سهام تا حدی با سوگیری منفی نامتقارن است. تأثیر سوگیری ناهمگون و نامتقارن به سطح ثروت سرمایه گذاران و سطح سوگیری های آنها بستگی دارد. علاوه بر آن سوگیری ها ناهمگون و نامتقارن موجب بروز نوساناتی در توزیع ثروت می شود؛ که فراریت عواید سهام را زیاد می کند و میانگین برگشت عواید سهام را تحریک می کند. این مدل توصیفی برای ناهنجاری های برگشت میانگین توجیه پذیر است. به این جهت مساله در حوزه مالی با دو نوع سرمایه گذار ناهمگون شامل: سرمایه گذار عقلایی از منظر مالی کلاسیک ( $P^r$ ) و سرمایه گذار رفتاری از منظر مالی رفتاری ( $P^s$ ) در نظر گرفته می شود. فرض قیمت تعادلی سهام معادله ذیل است [۱۶، ۲۶، ۲۷].

$$P_t = W_t^r P_t^r + W_t^s P_t^s$$

$$P_t = \sum_{i=1}^r W_i^r . P_t^r + \sum_{j=1}^s W_j^s . P_t^s$$

$$W_t^r + W_t^s = W \quad \sum W = 1$$

$$P_0^r = D_0 (k^{-1} + k)^m$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^r = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n (k^{-1} + k)^m$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^r = D_0 (ke^{m-1} + ke^{m-\tau})$$

از منظر مالی رفتاری ( $P^s$ ) قیمت سهام تعادلی در معادلات زیر صدق می کند:

$$P_0^s = D_0 (ke^{f(si)} + k^\tau e^{\tau f(si)})$$

$$P_0^s = D_0 (k(e^{f(si)} - 1) + k^\tau (1 - e^{\tau f(si)}))$$

<sup>1</sup> Yang, C., Xie, J., Yan, W

<sup>2</sup> Friedman, M.,

به طوری که پارامتر  $si$  شامل سوگیری‌های سرمایه‌گذار رفتاری و  $D_0$  سود نقدی سهام با توزیع نرمال  $N(N_0, \mu_D)$  است. اگر سرمایه‌گذار  $i$  عقلانی باشد  $s_i = 0$  است. اگر  $si > 0$  مطابق با موردی است که سوگیری‌های سرمایه‌گذار خوش‌بینانه است و  $si < 0$  سرمایه‌گذار دارای سوگیری بدبینانه است. بر پایه فرضیه نرخ رشد احساسات قیمت تعادلی با احساسات خوش‌بینانه تحریک می‌شود و با احساسات بدبینانه کم می‌شود. به عبارتی سهم ثروت سرمایه‌گذار دارای سوگیری مثبت افزایش می‌یابد و اگر سرمایه‌گذار دارای سوگیری مثبت در دارایی مالی باشد، وزن بیشتری از سهم ثروت سرمایه‌گذار عقلانی کم می‌شود. [۱۶، ۲۶، ۲۷].

**۳-۵ بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت دینامیک قیمت‌گذاری سوگیری‌های ناهمگن**  
 بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت دینامیک قیمت‌گذاری سوگیری‌های ناهمگن از مطالعات یانگ و ژانگ<sup>۱</sup> (۲۰۱۳) استنتاج شد. آن‌ها فرض کردند، که در یک بازار مالی با دو نوع سرمایه‌گذار ناهمگن، که دارای سوگیری مثبت (O) و سرمایه‌گذار دارای سوگیری منفی (P) وجود داشته باشد، قیمت تعادلی سهام برای  $t = 0, 1$  به این شرح است [۲۸، ۲۹].

$$P_t = w_t^O P_t^O + w_t^P P_t^P$$

که در آن وزن سوگیری مثبت (O) و سرمایه‌گذار دارای سوگیری منفی (P) به صورت ذیل است.

$$w_t^O = \frac{\lambda_O}{\lambda_O + \lambda_P}, w_t^P = \frac{\lambda_P}{\lambda_O + \lambda_P}, \lambda_O$$

$$\ln \lambda_O = \frac{f(SI_O)}{\sigma_D^2} \left( \ln \frac{D_1}{D_0} - \mu_D \right) - \frac{f^{\prime}(SI_O)}{2\sigma_D^2}$$

$$\ln \lambda_P = \frac{f(SI_P)}{\sigma_D^2} \left( \ln \frac{D_1}{D_0} - \mu_D \right) - \frac{f^{\prime}(SI_P)}{2\sigma_D^2}$$

که در آن  $\mu_D$  مقدار رشد سود نقدی  $D$  با توزیع احتمال  $N(\mu_D, 2\sigma_D)$  است. در مطالعات یانگ و ژانگ (۲۰۱۳) اثر سوگیری‌های مثبت قوی‌تر از سوگیری‌های منفی در پرتفوی یک سرمایه‌گذار است. بنابراین قیمت تعادلی در بازده پرتفوی در سوگیری‌های مثبت بیشتر است. در مقایسه معادلات پرتفوی، سوگیری رفتاری ترکیبی از سرمایه‌گذار عقلایی- رفتاری است که نشان می‌داد، اثر سوگیری‌های مثبت روی قیمت سهام تا حدی با سوگیری‌های منفی متعادل می‌شود. در معادله یانگ و ژانگ (۲۰۱۳) اثر سوگیری ناهمگن به سطح ثروت سرمایه‌گذار و سطح احساسات او بستگی دارد. بنابراین سوگیری‌های ناهمگن بر قیمت تعادلی اثر دارد. برای نشان دادن اثر خالص سوگیری‌های ناهمگن روی قیمت تعادلی به نفوذ ساده،  $f(s_1) = e - 1$  فرض می‌شود [۲۸، ۲۹].

### ۳-۶ بهینه‌سازی قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی تحت مدل دودا<sup>۲</sup>

بر اساس تئوری چشم‌انداز، پیامدهای تصمیم بر حسب همه‌ی ثروت یک فرد تعریف می‌شود؛ همچنین، این چشم‌اندازها بر اساس سود، زیان یا خنثی‌بودن نسبت به یک نقطه‌ی مرجع بررسی می‌شوند؛ که مؤید وضعیت

<sup>1</sup> Chunpeng Yang, Rengui Zhang

<sup>2</sup> Duda et al.

کنونی هر فرد است. بر اساس این نظریه، تصمیم گیرنده پیامدهای متصور از نتیجه‌ی تصمیم‌اش را بررسی می‌کند و بر حسب تابع ارزش<sup>۱</sup>  $(g(x))$  آنان را نسبت به نقطه مرجع می‌سنجد؛ به تابع و تابع احتمال وزنی<sup>۲</sup>  $(w(x))$  برای هر تصمیم بستگی دارد. موضوع نیز طی دو مرحله انجام می‌پذیرد؛ در طی مرحله‌ی اول، گزینه‌ها بر طبق قواعد سر رتبه‌بندی می‌شوند. در ویرایش، افراد نتایج را به جای وضعیت نهایی ثروت و رفاه، به‌عنوان سود یا زیان درک می‌کنند. سود یا زیان با توجه به برخی نقاط مرجع تعریف می‌شوند. در نتیجه، موقعیت نقطه‌ی مرجع مشاهده، بر نتایج به‌عنوان سود یا زیان تأثیر می‌گذارد. مشاهده و بررسی معاملات از نظر سود و زیان نسبت به نقاط مرجع متفاوت از نظریه‌ی مطلوبیت مورد انتظار است که در آن نتایج بر اساس کل ثروت یا موقعیت نهایی دارایی ارزیابی می‌شوند. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود [۹، ۳۰، ۳۳، ۳۲].

$$g(x, p) = w(p_1)g(X_1) + w(p_2)g(X_2) + \dots$$

$$w(p_n)g(X_n) = \sum_{i=1}^n w(p_i)g(X_i)$$

در این تابع  $g(x, p)$  نشان‌دهنده تابع تصمیم‌گیری،  $w(x)$  نشان‌دهنده تابع احتمال وزنی و  $g(x, i)$  نشان‌دهنده تابع ارزش<sup>۳</sup> است. تابع چشم‌انداز از تابع ارزش و تابع احتمال وزنی تشکیل شده است و با تعیین پارامترهای این توابع می‌توان شکل تئوری چشم‌انداز را تعیین کرد. برای ارزیابی میزان ارزش و تابع احتمال وزنی در تئوری چشم‌انداز توابع مختلفی ارائه شده است و تقریباً همه این مطالعات شکل پیشنهادی تابع چشم‌انداز کاهنمن و تیورسکی را تأیید می‌کنند [۷، ۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳]. شبیه‌سازی مطالعات دودا و همکاران (۲۰۰۶) در ۴۲ کشور دنیا، منجر به استخراج یک آنالیز عددی از تابع ارزش به صورت زیر شد [۷، ۹، ۳۰، ۳۳، ۳۲].

$$g(x) \begin{cases} x^\alpha, & \text{if } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

دستگاه معادله فوق نشان‌دهنده درجه‌ی نسبی بودن ارتباطات و برهم کنش در چشم‌انداز یا موانع حرکت در میان سرمایه‌گذاران مختلف است. به عبارت دیگر، اثر ساختار ریاضی فوق بر روی کنش، گونه‌های مختلف در چشم‌انداز سرمایه‌گذاران را نشان می‌دهد. در مدل دودا و همکاران (۲۰۰۶) نقطه صفر همانند تابع چشم‌انداز کاهنمن و تیورسکی به عنوان نقطه مرجع محسوب می‌شود. در نقاط بالاتر از نقطه مرجع، شکل این تابع به صورت محدب است. به عبارت دیگر، مشتق دوم تابع ارزش در این نقطه منفی است ( $V'' \leq 0, X \geq 0$ ). بنابراین در نقاط پایین‌تر از نقطه مرجع، به صورت مقعر است و مشتق دوم تابع ارزش بزرگ‌تر از صفر است. ( $V'' \geq 0, X \leq 0$ ) این ویژگی نشان‌دهنده درجه حساسیت کمتر این تابع است. بنابراین چندپارگی چشم‌انداز دو بعد دارد: یکی ویژگی ریسک‌گریزی یا محدب گونه بودن تابع و دیگری ریسک‌پذیری یا مقعر بودن تابع است. از آنجا که تابع ارزش در منطقه سود نسبت به منطقه زیان دارای شیب کمتر است؛ به عبارتی ( $V' < 0, V'(-X) < 0, X \leq 0$ ) طول نقطه زیان طولانی‌تر از نقطه سود است. براساس مدل دودا (۲۰۰۶) مقدار  $0 \leq \alpha\beta \leq 1, 1 \leq \lambda$  معین است. به طوری که با افزایش  $\alpha, \beta$  و میزان حساسیت در تابع چشم‌انداز کاهش

<sup>1</sup> Value Function

<sup>2</sup> Weighting Function

<sup>3</sup> Value Function

می‌یابد. همچنین با افزایش  $\lambda$  درجه اجتناب از زیان کاهش می‌یابد. این مفهوم با نگرش کاهنمن و تیورسکی که بیان می‌کرد، واریانس تابع احتمال وزنی ثابت نیست و در نواحی نزدیک به ۰ یا ۱ بسیار زیاد می‌شود، همسویی دارد. کاهنمن و تیورسکی به این غیرقابل پیش‌بینی بودن اذعان دارند و بیان می‌کنند که به دلیل اینکه مردم توانایی محدودی برای درک و ارزیابی احتمالات اکستریم دارند، از رویدادهایی با احتمال وقوع بسیار کم یا چشم‌پوشی می‌کنند و یا به آن‌ها وزن زیادی می‌دهند و همچنین اختلاف بین احتمال بالای یک رویداد با قطعیت در وقوع آن رویداد را یا ناچیز فرض دارند و یا بزرگ‌نمایی می‌کنند. از آنجا که تابع احتمال وزنی تابع دودا اندازه تأثیر احتمال یک رخداد را بر درجه اشتیاق و مطلوبیت یک دورنما مشخص می‌کند، این تابع، تابعی غیرخطی است. همچنین وزن تصمیمات می‌تواند تحت تأثیر فاکتورهایی مانند ابهام یا عدم اطمینان در مورد سطح عدم اطمینان یا ریسک است. بنابراین با توجه به عایدی مورد انتظار از ترکیبات مختلف  $\lambda, \alpha$ ، شکل تابع ارزش  $v(x)$  و عایدی نهایی تصمیم‌گیرنده محاسبه می‌شود.

$$w(p) = \frac{\delta p^\gamma}{\delta(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}} \quad \delta, \gamma, \alpha, \lambda \geq 0$$

در این تابع  $w(p)$ ، نشان‌دهنده تابع احتمال وزنی،  $\lambda$  نشان‌دهنده انحنای تابع احتمال وزنی،  $\delta$  نشان‌دهنده کشیدگی تابع احتمال وزنی و نشان‌دهنده احتمالات مختلف است.  $\gamma$  تعیین‌کننده درجه حساسیت کمتر تابع چشم‌انداز در احتمالات مختلف است. با افزایش  $\gamma$  میزان تحذب تابع چشم‌انداز نیز افزایش می‌یابد. بنابراین تابع وزنی در نقاط انتهایی رفتاری متفاوت دارد. این تابع توسط محققان دیگر از قبیل پرستون و باراتا<sup>۱</sup>، کاهنمن و تیورسکی، کمرر و هو، یو و گونزالز و آیدلایو<sup>۲</sup> نیز بررسی و تأیید شده است. عامل مهم دیگری که تابع احتمال وزنی را تحت تأثیر قرار می‌دهد، جذابیت است. جذابیت درجه اهمیت تصمیمات مختلف را نشان می‌دهد. درجه حساسیت کمتر شکل تابع را مشخص می‌کند که ابتدا مقعر بوده و بعد محدب می‌شود، اما جذابیت مشخص می‌کند که تابع احتمال وزنی در بعضی از مواقع در بالای خط ۴۵ درجه قرار می‌گیرد و بعضی مواقع در پایین خط. این خاصیت به صعود یا نزول تابع احتمال وزنی مربوط می‌شود. در نظر گرفتن بخشی از احتمالات کوچک که اندازه‌گیری برای آن‌ها ممکن نیست، در بخش‌های موجود به احتمالات کوچک وزن بیشتری داده می‌شود (بالای خط ۴۵ درجه قرار می‌گیرند) در حالی که احتمالات بزرگ‌تر وزن کم‌تری می‌گیرند (پایین خط ۴۵ درجه قرار می‌گیرند). منحنی تابع در دامنه موجود، زیر خط ۴۵ درجه قرار می‌گیرد و در این تابع، جمع وزن تصمیمات برای تصمیم بین دو گزینه برابر ۱ نخواهد شد. کاهنمن و تیورسکی این خاصیت را به صورت قید ذیل، عدم قطعیت تعریف کردند: [۳۳، ۳۲، ۸، ۹].

$$0 < p < 1, w(p) + w(p-1) < 1$$

<sup>1</sup> Reston and Baratta

<sup>2</sup> Wu and Gonzalez



## ۴ نتیجه گیری و پیشنهادات

سرمایه گذاری یک موضوع جذاب است؛ زیرا عوامل زیادی بر بازارهای مالی تاثیر می گذارند، در نتیجه انحرافات زیادی نیز می توانند در انتخاب ایجاد شوند. بحران مالی سال های اخیر توانایی مدل های اقتصادی سنتی برای کمک به اداره پیچیدگی دنیای مالی مدرن را به شدت زیر سوال برده است. تعداد فزاینده ای از محققان، دست اندرکاران و تنظیم کننده ها موافق هستند که بحران مالی مکرر و همچنین شواهد قاطع ناهنجاری های بازار فقط با توسل به مسایل مالی رفتاری قابل توضیح است. مسایل مالی رفتاری توانسته است، غیرمنطقی بودن سرمایه گذار را مشخص کند. به عبارت دیگر، سرمایه گذاران در زمان انتخاب یک سبد تحت عوامل روان شناسی شناختی، فاکتورهای مربوط به احساسات و عوامل غیرعقلایی قرار دارند و یکی از این عوامل مهم سوگیری رفتاری در انتخاب است. به طوری که در مالی رفتاری فرض بر این است که رفتار افراد به طور کامل منطقی نیست و امکان بروز رفتار غیرمنطقی در تصمیم گیری افراد وجود دارد. یکی از این رفتارهای غیرمنطقی (سوگیری های رفتاری)، اثبات شده در علم روانشناسی، تأثیرگذاری سوگیری های افراد بر فرایند تصمیم گیری و قضاوت آنان درخصوص رویدادهای آتی است؛ به گونه ای که هرگاه افراد دارای سوگیری هایی باشند، به انتخاب های احساسی دست می زنند. بنابراین تأثیر سوگیری های رفتاری بر تصمیم گیری سرمایه گذاران مورد توجه بسیاری از تحقیقات در زمینه قیمت گذاری دارایی های مالی قرار گرفته است. محققان نشان داده اند که سوگیری های رفتاری سرمایه گذاران تأثیر عمیقی بر قیمت بازاری دارایی های مالی دارد. لذا نیاز به رویکرد پیشرفته ای در جهت استخراج قیمت گذاری است. از آنجا که هیچ کس به قطع و یقین از این موضوعات اطلاع ندارد، ارزش ذاتی تنها یک نظریه ای است که باید به همین شکل باقی بماند و سرمایه گذاران مختلف نظرات متفاوت خود را داشته باشند. به علاوه، نظرات هر سرمایه گذار با کسب اطلاعات جدید دستخوش تغییر خواهد شد. استفاده از بهینه سازی رفتاری معادلات دیفرانسیلی و سایر نظریات بهینه سازی به منظور قیمت گذاری دارایی موجود بازارهای مالی در حین تکامل آنها، پیشرفت های خوبی در راستای کشف تاثیر سوگیری ها بر قیمت ها به همراه داشته است، چرا که می توان از این ایده ها به منظور کشف قیمت های ذاتی در بازارهای مالی بهره جست. محققان مالی به دنبال مدل های پیشرفته ی بهینه سازی سبد اوراق بهادار هستند، مدل هایی که پویایی های بازده و ریسک های رفتاری ناشی از سوگیری های رفتاری را لحاظ کنند. از آنجا که بازارهای مالی با پیچیدگی های فراوانی روبه رو هستند، هیچ کس نمی تواند همه ی عوامل مرتبطی را که توصیف کننده این فعالیت ها باشند، شناسایی کند. چه برسد به این که، عواملی که یک پیش بینی صحیح را به دست می دهند کمی سازی نماید. علاوه بر این، سرمایه گذاران مختلف اطلاعات متفاوتی دارند و در نتیجه عکس العمل متفاوتی به اطلاعات نشان می دهند. حتی در جواب اینکه قیمت گذاری سهام نادرست است می توان چنین پرسید که قیمت صحیح سهام چیست؟ بسیاری ممکن است به ارزش ذاتی آن اشاره کنند اما ارزش ذاتی، به ارزش فعلی جریان های نقدی آینده ی سهام وابسته است. برای شناخت ارزش فعلی جریان های نقدی آینده، باید از نرخ تبدیل به سرمایه که بازار از آن برای تنزیل این جریان های نقدی استفاده می کند، شناخت خوبی پیدا کرد و سپس باید فهمید چه اتفاقی برای این جریان های نقدی در خصوص سود سهام و قیمت فروش سهام خواهد افتاد. از جنبه های خاص این تحقیق توصیف و بسط

نظریات مدل‌سازی ریاضی (سنجش مقداری) سوگیری رفتاری در قالب متغیرهای مقداری (بدون پرسشنامه‌ای) در قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی است و دیگر نتایج این تحقیق بهینه کردن پرتفوی در تئوری دورنمای کاهنمن و تیورسکی و کاربرد آن در بهینه‌سازی پرتفولیو می‌باشد. لذا پیشنهاد می‌شود نتایج این پژوهش بتواند مورد استفاده کلیه مدیران و دست‌اندرکاران شرکت‌های فعال در زمینه تجارت، کارشناسان بازار سرمایه، سهامداران، فعالان بازار سهام، سرمایه‌گذاران، پژوهشگران و مجامع علمی که به دنبال پژوهش‌های آتی و مرتبط با موضوع‌اند، قرار گیرد.

## منابع

- [۳] نیکومرام، ه.، سعیدی، ع.، حق شناس، ف.، میرعباسی، ی. (۱۳۹۷). بررسی کارایی بهینه‌سازی پرتفوی مبتنی بر ریسک نامطلوب و پتانسیل مطلوب و متغیرهای روانشناختی. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۹(۳۴)، ۳۰۵-۳۳۳.
- [۸] اولی، م.، نیکومرام، ه.، جهانشاد، آ.، پورزمانی، ز. (۱۳۹۶). استخراج ریاضی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای در چارچوب حسابداری ذهنی. دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، ۱۰(۳۶)، ۱-۱۲.
- [۹] مصلح شیرازی، ع.، نمازی، م.، محمدی، ع.، رجبی، ا. (۱۳۹۲). تئوری چشم انداز و مدل‌سازی الگوی تصمیم‌گیری مدیران در بخش صنعت: چشم انداز مدیریت صنعتی. ۱۰، ۹-۳۴.
- [۱۰] فرخ، م.، فلاح، م. (۱۳۹۸). توسعه یک مدل برنامه‌ریزی امکانی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۶(۳)، ۲۱-۳۶.
- [۱۴] شاهمرادی، م.، صلاحی، م.، لطفی، س. (۱۳۹۷). مدل میانگین انحراف مطلق با عدم قطعیت روی بازده‌ها برای بهینه‌سازی سبد سهام. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۵(۲)، ۱-۱۷.
- [۳۲] رهنمای رودپشتی، ف.، هبیتی، ف.، موسوی، ر. (۱۳۹۱). بررسی الگوی ریاضی انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری مبتنی بر مالی رفتاری. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۳(۱۲)، ۱۷-۳۷.
- [۳۳] تیموری، ع.، رنایی، م.، معرفی محمدی، ع. (۱۳۹۶). نقد انتخاب عقلانی از منظر رویکردهای رقیب: اقتصاد رفتاری، آزمایشگاهی و علوم مغزی. پژوهش‌های اقتصادی ایران، ۲۲(۷۳)، ۱-۴۳.
- [1] Hanchao Liang, Chunpeng Yang, Rengui Zhang, Chuangqun Cai. (2017). Bounded rationality, anchoring-and-adjustment sentiment, and asset pricing. *International Review of Financial Analysis*, 59, 94-104.
- [2] Jeewon Jang, Jangko, k., (2018). Probability of Price Crashes, Rational Speculative Bubbles, and the Cross-Section of Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, In press, accepted manuscript.
- [4] Thanaset, C, Zhongxian, X, Kai, Y., (2018). *International Review of Economics & Finance*, In press.
- [5] Sibley, S. E., Wang, Y., Xing, Y., & Zhang, X., (2016). The information content of the sentiment index. *Journal of Banking & Finance*, 62, 164-179.
- [6] Saumya, R., Dash, D, M., (2018). Does sentiment matter for stock returns? Evidence from Indian stock market using wavelet approach, *Finance Research Letters*, 26, 32-39.
- [7] Pitcher, A., (2008). Investigation of a Behavioral Model for Financial Decision Making. A dissertation submitted for the degree of MSc Mathematical & Computational Finance, Magdalen College University of Oxford, 1-43
- [10] Siew, L. W., Jaaman, S. H. H., & Ismail, H. bin., (2015). The Impact of Human Behaviour Towards Portfolio Selection in Malaysia. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 674-678
- [11] Boyer, M. M., Cowins, E. P., & Reddic, W. D., (2018). Portfolio rebalancing behavior with operating losses and investment regulation. *International Review of Economics & Finance*.

- [12] Daniel, K. D., Hirshleifer, D., & Siew Hong, T., (2002). Investor psychology in capital markets: Evidence and policy implications. *Journal of Monetary Economics*, 49(1), 139–209.
- [13] Markowitz, H.M., (1952a). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7 (1), 77–91.
- [14] Bi, J., Jin, H., & Meng, Q., (2018). Behavioral mean-variance portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 271(2), 644–663.
- [15] Best, M. J., & Grauer, R. R., (2016). Prospect theory and portfolio selection. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 11, 13–17.
- [16] Friedman, M., and Savage. L., (1948). The Utility Analysis of Choices Involving Risk. *Journal of Political Economy*, 56(4), 279–304.
- [17] Epstein, S., (2003). Cognitive-experiential self-theory of personality. In T. Millon & M. J. Lerner (Eds.), *Comprehensive handbook of psychology*, 5(1). 159-184, Personality and Social Psychology. Hoboken, NJ: Wiley.
- [18] Martin, J. W., & Sloman, S. A., (2013). Refining the dual-system theory of choice. *Journal of Consumer Psychology*, 23(4), 552–555
- [19] Galichon, A., & Henry, M., (2012). Dual theory of choice with multivariate risks. *Journal of Economic Theory*, 147(4), 1501–1516
- [20] Aduda, J., (2012). The Behaviour and Financial Performance of Individual Investors in the Trading Shares of Companies Listed At the Nairobi Stock Exchange, Kenya, *Journal of Finance and Investment Analysis*, 1(3), 33-60.
- [21] Chen, J. M., (2016). The Structure of a Behavioral Revolution. *Finance and the Behavioral Prospect*, 1–28.
- [22] Chen, J. M., (2016), *Postmodern Portfolio Theory*, supra note 1 (Chapter 1), addresses these topics in Chapter 2, at 5–25 (conventional CAPM) and Chapters 10–11, at 189–213 (higher-moment capital asset pricing).
- [23] Chen, J. M., (2016) *Finance and the Behavioral Prospect: Risk, Exuberance, and Abnormal Markets (Quantitative Perspectives on Behavioral Economics and Finance)* 1st ,Publisher: Palgrave Macmillan; 1st ed. 2016 edition.
- [24] Akbar, M., & Nguyen, T. T., (2016). The explanatory power of higher moment capital asset pricing model in the Karachi stock exchange. *Research in International Business and Finance*, 36, 241–253
- [25] Kim, S., & Na, H., (2018). Higher-moment liquidity risks and the cross-section of stock returns. *Journal of Financial Markets*, 38, 39–59
- [26] Yang, C., Xie, J., Yan, W., (2012). Sentiment capital asset pricing model. *International Journal of Digital Content Technology and its Applications* 6 (3), 254–261.
- [27] Yang, C., Xie, J., Yan, W., (2012). Sentiment capital asset pricing model. *International Journal of Digital Content Technology and its Applications* 6 (3), 254–261.
- [28] Yang, C., Zhang, R., (2013b). Dynamic Sentiment asset pricing model. Working Paper.
- [29] Duda, F, De Gennaro, H, & Schubert R. (2006). Gender, financial risk, and probability weights. *Theory and Decision*, 60(2-3), 283-313
- [30] Kahneman, D., & Tversky A., (1992). Advances in Prospect Theory, cumulative representation of uncertainty. *Journal of risk and uncertainty*, 5, 297- 323.
- [31] Daniel, K, Hirshleifer, D. & Subrahmanyam, A., (1998). Investor Psychology and Security Market Under- and Overreactions. *Journal of Finance*, 53, 1839-1885.