مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۵)، تابستان ۹۹، ص ص ۱۲۵-۱۰۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

دیدگاه جدیدی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد

بهرام فرهادی نیا[1]*
۱- دانشیار، دانشگاه صنعتی قوچان، گروه ریاضی، قوچان، ایران

رسید مقاله: ۲۵ دی ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۷ اردیبهشت ۱۳۹۹

چکیده
در این مقاله به‌دنبال آن هستیم تا دیدگاه جدیدی را در مورد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد مطرح نماییم. در قیاس با تحقیقات انگشت شماری که در مورد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد صورت گرفته است، نه تنها مفهوم جدید درگیر پیچیدگی‌هایی همچون وابستگی به پارامترهای اضافی مانند تنها تعریف موجود نمی‌باشد بلکه از یک سو با اصول پذیرفته‌شده برای سایر توسیع‌های مجموعه‌های فازی سازگار است و از سویی دیگر تحدید آن به مجموعه‌های خاص‌تر همچون مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار و مجموعه‌های فازی سه بعدی نتایج کاملا قابل انتظاری را به‌همراه دارد. در ادامه، بر پایه مفهوم ارایه شده از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد، قضایای تجزیه و قضایای نمایش مربوطه ارایه می‌گردد که خود آنها می‌تواند مبنای کارهای آتی جهت کاربرد مجموعه‌های برشی در تصمیم‌گیری چند معیاره در مسایل مبتنی بر مجموعه‌های فازی مردد باشد.

کلمات کلیدی: مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه برشی، قضایای تجزیه و نمایش.

۱ مقدمه و پیشینه تحقیق
مجموعه برشی تعریف شده بر روی مجموعه‌های فازی نقش مهمی در موضوعات مرتبط با نظریه مجموعه‌های فازی مخصوصا جبر فازی [۱]، تصمیم‌گیری فازی [۴-۲] و علت یابی فازی [۵] دارد. از نقطه نظر بنیادین، مفهوم مجموعه برشی پلی ما بین مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های کلاسیک می‌باشد. بر این اساس، تاکنون تعداد قابل توجهی از تحقیقات پایه‌گذاری و مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله آنها می‌توان به تحقیقات یوان و همکاران [۶] اشاره نمود که در آن ویژگی‌های سه نوع مجموعه برشی براساس مفاهیم همسایگی و Q-همسایگی در توپولوژی فازی توضیح داده و بررسی شده است. سپس مفاهیم قضیه تجزیه، قضیه نمایش و اصول توسیع را براساس مجموعه‌های برشی تعریف کرده‌اند. در ادامه، یوان و همکاران [۸،۷] نوعی مجموعه برشی را

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: bfarhadinia@qiet.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

برای مجموعه فازی شهودی (IFS[1]) به عنوان تعمیم مواردی برای مجموعه‌های فازی ارایه داده است و علاوه براین مفاهیمی از قضیه‌های نمایش، تجزیه و مجموعه برشی از مجموعه‌های فازی بازه ای-مقدار (IVFS[2]) ارایه کرده‌اند. مارتینیتی و همکاران [۹] با ارایه مفهوم مجموعه برشی برای مجموعه فازی شهودی، ویژگی‌های آنها را از دیدگاه عطفی و روابط نقیض توصیف کرده‌اند. وانگ [۱۰] روابط بین چهار نوع مجموعه برشی تعریف شده بر روی مجموعه‌های نرم مبهم (VSS[3]) را بحث کرده و علاوه براین قضایای تجزیه و نمایش از مجموعه‌های نرم مبهم را مورد بررسی قرار داده است. چن و چن [۱۱] قضیه تجزیه را برای تانسورهای فازی و چن [۱۲] قضیه تجزیه را برای تانسورهای فازی شهودی مطرح نمودند.

با این حال موضوع مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد (HFS[4]) به‌ندرت در مقالات بررسی شده است و از محدود کارهای ارایه شده می‌توان به مقاله الکانتوود و تورا [۱۳] اشاره نمود. در این مقاله، قضیه تجزیه برای مجموعه‌های فازی مردد معمولی (THFS[5]) بیان می شود و علاوه براین، تعدادی از ویژگی‌های مجموعه برشی به مفهوم یکنواختی مجموعه‌های فازی مردد معمولی اثبات شده است.

چیزی که باید به آن توجه داشت این است که مفهوم مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد ارایه شده توسط الکانتوود و تورا [۱۳] بر این مبناست که تمامی عنصرهای فازی مردد (HFEs[6]) از مجموعه‌های فازی مردد باید دارای تعداد یکسانی باشند (چه در حالت خوشبینانه و چه در حالت بدبینانه) و این در حالی است که چنین محدودیتی در ارایه مفهوم مجموعه برشی در این مقاله لازم نیست. از طرفی دیگر، در این مقاله، به‌جای فرایند محاسباتی پیچیده ارایه شده توسط الکانتوود و تورا [۱۳] فرایندی محاسباتی بسیار آسان و به‌کار برده شده برای سایر مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی شهودی مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار و مجموعه‌های فازی سه بعدی مورد باز تعریف قرار گرفته است.

در این مقاله نیت بر این است تا چهار نوع از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد را تعریف نماییم که البته هر نوع مجموعه برشی دارای ویژگی‌های مشابه‌ای با مابقی مجموعه‌های برشی دیگر می‌باشد. علاوه براین، قضیه‌های تجزیه و نمایش براساس هر نوع مجموعه برشی ارایه می گردد. موضوع مورد توجه در این مقاله این است که مجموعه‌های برشی پیشنهادی و قضیه‌های تجزیه و نمایش برای مجموعه‌های فازی مردد تعمیم‌هایی از مجموعه برشی برای مجموعه فازی [۶]، مجموعه‌های فازی بازه‌ای-مقدار [۸]، مجموعه‌های فازی شهودی [۸]، مجموعه‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار [۱۴] و مجموعه‌های فازی سه بعدی [۷] هستند.

قابل به ذکر است که مفهوم مجموعه برشی ارایه شده در این مقاله به سادگی قابلیت توسیع به سایر مجموعه‌های گسترش‌یافته از مجموعه‌های فازی مردد مانند مجموعه‌های فازی مردد دوگان [۱۵] ، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته [۱۶]، مجموعه‌های فازی مردد زبانی [۱۸،۱۷] را دارد.

[1] Intuitionistic Fuzzy Set
[2] Interval-valued Fuzzy Set
[3] Vague Soft Set
[4] Hesitant Fuzzy Set
[5] Typical Hesitant Fuzzy Set
[6] Hesitant Fuzzy Element

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

ساختار این مقاله به صورت زیر می‌باشد: در بخش۲ پس از بررسی برخی تعاریف اولیه، مجموعه برشی برای مجموعه‌های فازی مردد تعریف شده و ویژگی های آن مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش۳ قضیه تجزیه برای مجموعه‌های فازی مردد ارایه گردیده است. بخش۴ نیز به ارایه قضیه نمایش برای مجموعه‌های فازی مردد اختصاص یافته است. در نهایت، این مقاله در بخش۵ نتیجه‌گیری‌های لازم را بیان نموده است.

۲ بیان مساله

در این قسمت، ابتدا به توصیف تعاریف اولیه مربوط به مجموعه‌های فازی خواهیم پرداخت و سپس تعمیم آن‌ها را برروی مجموعه‌های فازی مردد [۲۱-۱۹] بیان می‌سازیم.

قبل از پرداختن به هر مبحثی لازم است تا در اینجا مفهوم مجموعه‌های فازی را ارایه و تعریف نماییم. به طور کلی، مجموعه فازی معمولی [۲۲] مانند H بر روی X به صورت $H=\{x,H(x):x\in X\}$ تعریف می‌شود که $H:X\to[۰,۱]$ می‌باشد و علاوه براین مقدار حقیقی $H(x)$ درجه عضویت x در H را مشخص می کند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید که H یک مجموعه فازی بر روی X باشد و علاوه براین $\theta\in[۰,۱]$ را در نظر می گیریم. سپس تعریف می کنیم

$$H_\theta=\{x|x\in X,H(x)\geq\theta\},\ \ (\text{مجموعه برشی } \theta- \text{ بالایی از } H) \tag{۱}$$

$$H_{\underline{\theta}}=\{x|x\in X,H(x)>\theta\},\ \ (\text{مجموعه برشی } \theta- \text{ بالایی قوی از } H) \tag{۲}$$

$$H^\theta=\{x|x\in X,H(x)\leq\theta\},\ \ (\text{مجموعه برشی } \theta- \text{ پایینی از } H) \tag{۳}$$

$$H^{\underline{\theta}}=\{x|x\in X,H(x)<\theta\},\ \ (\text{مجموعه برشی } \theta- \text{ پایینی قوی از } H) \tag{۴}$$

$$H_{[\theta]}=\{x|x\in X,\theta+H(x)\geq ۱\},\ \ (\text{مجموعه برشی شبه } \theta- \text{ بالایی از } H) \tag{۵}$$

$$H_{[\underline{\theta}]}=\{x|\ x\in X,\theta+H(x)>۱\},\ \ (\text{مجموعه برشی شبه } \theta- \text{ بالایی قوی از } H) \tag{۶}$$

$$H^{[\theta]}=\{\mathrm{x}\ |\ \mathrm{x}\in \mathrm{X},\theta+\mathrm{H}(\mathrm{x})\leq ۱\},\ \ (\text{مجموعه برشی شبه } \theta- \text{ پایینی از } H) \tag{۷}$$

$$H^{[\underline{\theta}]}=\{x|\ x\in X,\theta+H(x)<۱\},\ \ (\text{مجموعه برشی شبه } \theta- \text{ پایینی قوی از } H) \tag{۸}$$

تعریف ۲.۲ . یک لاتیس کاملا توزیع‌پذیر L یک F لاتیس گفته می‌شود اگر یک نگاشت $*:\mathrm{L}\to\mathrm{L}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\mathrm{a}\leq\mathrm{b}\Rightarrow *(\mathrm{a})\geq *(\mathrm{b})$ و $*(*(\mathrm{a}))=\mathrm{a}$ برقرار باشد.

تعریف ۳.۲. یک مجموعه فازی مردد H_A در X عبارت‌است از

$$H_A=\{(x,h_A(x))|x\in X\} \tag{۹}$$

که در آن $h_A(x)\in[۰,۱]$ نشان‌دهنده درجه عضویت ممکن $x\in X$ به H_A می‌باشد.

از این پس، از نماد $h_A(x)$ به عنوان عنصر فازی مردد نام می‌بریم و در این حالت واضح است که هر مجموعه فازی مردد H_A یک فرم کلی از مجموعه‌های فازی است و وقتی تنها شامل یک عضو باشد به مجموعه فازی تقلیل می‌یابد. این موضوع ثابت می کند که نظریه مجموعه‌های فازی مردد شکل کلی نظریه مجموعه‌های فازی است.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

با توجه به گوناگونی عنصرهای فازی مردد، فرض می‌کنیم که تمامی اعضا در هر عنصر فازی مردد به‌صورت افزایشی مرتب شده باشد و علاوه براین، برای حالتی که دو عنصر فازی مردد $h_A(x)$ و $h_B(x)$ دارای طول مشابه‌ای نیستند، توسیع عنصر فازی مردد کوتاه‌تر را با تکرار عضو ماکزیمم آن تا رسیدن به طول یکسان برای عنصرهای فازی مردد در نظر می‌گیریم. بر اساس این فرایند مشابه‌سازی تعداد مقادیر در عنصرهای فازی مردد، مجموعه تمام مجموعه‌های فازی مردد تعریف شده روی X را با $HFS(X,N)$ مشخص می‌کنیم که در آن‌ها عنصرهای فازی مردد طول یکسان N را دارند. بنابراین، تمامی مجموعه‌های فازی مردد در $HFS(X,N)$ می‌توانند با رابطه زیر نشان داده شوند

$$H_A = \langle X, h_A \rangle \tag{۱۰}$$

که برای هر $x \in X$ به صورت زیر قابل نمایش است

$$H_A(x) = \langle h_A^{\sigma(1)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \rangle. \tag{۱۱}$$

حال برای هر $H_A = x, h_A \in HFS(X,N), H_B = x, h_B \in HFS(X,N), H_{A_i} = x, h_{A_i} \in HFS(X,N)$ با $i \in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است، مجموعه عملگرهای زیر بیان می‌شوند:

$$H_A \subseteq H_B \Rightarrow h_A^{\sigma(j)}(x) \le h_B^{\sigma(j)}(x), j = ۱, \dots, N, \forall x \in X;$$

$$H_{A^c} = \langle X, h_{A^c} \rangle \Leftrightarrow H_{A^c}(x) = \langle ۱ - h_A^{\sigma(N)}(x), \dots, ۱ - h_A^{\sigma(۱)}(x) \rangle;$$

$$H_A \cup H_B = \langle X, h_{A\cup B} \rangle \Leftrightarrow H_A \cup H_B(x) = h_A^{\sigma(۱)}(x) \vee h_B^{\sigma(۱)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \vee h_B^{\sigma(N)}(x);$$

$$H_A \cap H_B = \langle X, h_{A\cap B} \rangle \Leftrightarrow H_B \cap H_B(x) = \langle h_A^{\sigma(۱)}(x) \wedge h_B^{\sigma(۱)}(x), \dots, h_A^{\sigma(N)}(x) \wedge h_B^{\sigma(N)}(x) \rangle;$$

$$H_A = \cup_{i\in I} H_{A_i} \Leftarrow H_A(x) = \vee_{i\in I} h_{A_i}^{\sigma(۱)}(x), \dots, \vee_{i\in I} h_{A_i}^{\sigma(N)}(x);$$

$$H_A = \cap_{i\in I} H_{A_i} \Leftarrow H_A(x) = \langle \wedge_{i\in I} h_{A_i}^{\sigma(۱)}(x), \dots, \wedge_{i\in I} h_{A_i}^{\sigma(N)}(x) \rangle;$$

با مشخص کردن $۰_X = ۰, ۱_X = ۱$ ، به آسانی از تعریف ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که

$(HFS(X,N), \cup, \cap, c, \langle ۱ \rangle, \langle ۰ \rangle)$ یک F لاتیس است.

فرض کنید $\{(N+۱)^X = \{H \mid H : X \to \left\{۰, \dots, \left(۱ - \frac{j}{N}\right), \dots, ۱\right\}_{j=۰}^{N}$ بیانگر گردایه‌ای از مجموعه‌های فازی $N+۱$-مقداره در X برقرار باشد. آنگاه می‌توان ثابت کرد که $\left((N+۱)^X, \cup, \cap, \bar{۱}, \bar{۰}\right)$ یک F لاتیس مطابق با عملگرهای مجموعه‌های فازی است که برای هر $H, H_i \in (N+۱)^X$ به‌صورت زیر داده شده است

$$(H_۱ \cup H_۲)(x) = H_۱(x) \vee H_۲(x);$$

$$(H_۱ \cap H_۲)(x) = H_۱(x) \wedge H_۲(x);$$

$$H^c(x) = ۱ - H(x);$$

$$\bar{۰}(x) = ۰, \bar{۱}(x) = ۱;$$

$$(\cap_{i\in I} H_i)(x) = \cap_{i\in I} H_i(x);$$

$$(\cup_{i\in I} H_i)(x) = \cup_{i\in I} H_i(x);$$

برای هر $x \in X$.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

فرض کنید که $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS(X,N)$ یک مجموعه فازی مردد و $\theta\in[\circ,\text{١}]$ باشد.

مبتنی برقرارداد لحاظ شده در این مقاله، مقادیر یک عنصر فازی مردد $H_A(x)=\left\{h_A^{\sigma(\text{١})}(x),\ldots,h_A^{\sigma(N)}\right\}$ به صورت افزایشی مرتب شده‌اند و لذا می‌توان افراز $\left[\circ,h_A^{\sigma(\text{١})}(x)\right],\ldots,\left[h_A^{\sigma(N)}(x),\text{١}\right]$ را در نظر گرفت. بر این اساس، نتیجه می گیریم که:

- اگر $\theta\in\left[\circ,h_A^{\sigma(\text{١})}(x)\right]$، آنگاه x باید در H_A باشد به این مفهوم که $x\in H_A$ باید دارای درجه عضویت ۱ باشد؛

- اگر $\theta\in\left(h_A^{\sigma(j)}(x),h_A^{\sigma(j+\text{١})}(x)\right]$ برای $j=\text{١},\text{٢},\ldots,N-\text{١}$ برقرار باشد. آنگاه $x\in H_A$ دارای درجه عضویت $\left(\text{١}-\dfrac{j}{N}\right)$ است.

- اگر $\theta\in\left(h_A^{\sigma(N)}(x),\text{١}\right]$ آنگاه x باید در H_a نباشد. بنابراین درجه عضویت $x\in H_A$ باید ۰ باشد.

مباحث بعدی مواردی خواهند بود که برای تعریف مجموعه برشی مجموعه فازی مردد کمک‌کننده است.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS(X,N)$ یک مجموعه فازی مردد در X و $\theta\in[\circ,\text{١}]$ باشد. آنگاه تعریف می کنیم

$$H_{A\theta}=\begin{cases}\text{١} & h_A^{\sigma(\text{١})}(x)\geq\theta\\ \left(\text{١}-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x)<\theta\leq h_A^{\sigma(j+\text{١})}(x),\ j=\text{١},\ldots,N-\text{١}\\ \circ & h_A^{\sigma(N)}(x)<\theta\end{cases}$$

$$H_{A\underline{\theta}}=\begin{cases}\text{١} & h_A^{\sigma(\text{١})}(x)>\theta\\ \left(\text{١}-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x)\leq\theta<h_A^{\sigma(j+\text{١})}(x),\ j=\text{١},\ldots,N-\text{١}\\ \circ & h_A^{\sigma(N)}(x)\leq\theta\end{cases}$$

$$H_{A^{\theta}}=\begin{cases}\text{١} & h_A^{\sigma(N)}(x)\leq\theta\\ \left(\text{١}-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x)\leq\theta<h_A^{\sigma(N-j+\text{١})}(x),\ j=\text{١},\ldots,N-\text{١}\\ \circ & h_A^{\sigma(\text{١})}(x)>\theta\end{cases}$$

$$H_{A^{\underline{\theta}}}=\begin{cases}\text{١} & h_A^{\sigma(N)}(x)<\theta\\ \left(\text{١}-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x)<\theta\leq h_A^{\sigma(N-j+\text{١})}(x),\ j=\text{١},\ldots,N-\text{١}\\ \circ & h_A^{\sigma(\text{١})}(x)\geq\theta\end{cases}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$H_{A[\theta]}=\begin{cases} 1 & \theta+h_A^{\sigma(1)}(x)\geq 1; \\ \left(1-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x)<1-\theta\leq h_A^{\sigma(j+1)}(x),\ j=1,\ldots,N-1 \\ 0 & \theta+h_A^{\sigma(N)}(x)<1, \end{cases}$$

$$H_{A\underline{[\theta]}}=\begin{cases} 1 & \theta+h_A^{\sigma(1)}(x)>1; \\ \left(1-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(j)}(x)\leq 1-\theta<h_A^{\sigma(j+1)}(x),\ j=1,\ldots,N-1 \\ 0 & \theta+h_A^{\sigma(N)}(x)\leq 1, \end{cases}$$

$$H_A^{[\theta]}=\begin{cases} 1 & \theta+h_A^{\sigma(N)}(x)\leq 1, \\ \left(1-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x)\leq 1-\theta<h_A^{\sigma(N-j+1)}(x),\ j=1,\ldots,N-1, \\ 0 & \theta+h_A^{\sigma(1)}(x)>1 \end{cases}$$

$$H_{A^{\underline{[\theta]}}}=\begin{cases} 1 & \theta+h_A^{\sigma(N)}(x)<1, \\ \left(1-\dfrac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j)}(x)<1-\theta\leq h_A^{\sigma(N-j+1)}(x),\ j=1,\ldots,N-1, \\ 0 & \theta+h_A^{\sigma(1)}(x)\geq 1 \end{cases}$$

قابل توجه است که

- اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $h_A^{\sigma(1)}(x)=\ldots=h_A^{\sigma(N)}(x)$. آنگاه مجموعه فازی مردد H_A به مجموعه فازی تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۶] می‌باشد.

- اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $H_x(x)=\left\langle h_A^{\sigma(1)}(x),h_A^{\sigma(2)}(x)\right\rangle$ که $h_A^{\sigma(1)}(x)=\mu(x)$ و $h_A^{\sigma(2)}(x)=1-\nu(x)$. آنگاه مجموعه فازی مردد H_A به مجموعه فازی شهودی آتاناسو تبدیل می‌گردد و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۸] می‌باشد.

- اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $H_A(x)=\left\langle h_A^{\sigma(1)}(x),h_A^{\sigma(2)}(x)\right\rangle$ که $h_A^{\sigma(1)}(x)=H_A^-(x)=max_j\left\{h_A^{\sigma(j)}(x)\right\}$ و $h_A^{\sigma(2)}(x)=H_A^+(x)=min_j\left\{h_A^{\sigma(j)}(x)\right\}$. آنگاه مجموعه فازی مردد H_A به مجموعه فازی بازه‌ای مقدار تبدیل‌شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۸] می‌باشد.

- اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم $H_A(x)=\left\langle h_A^{\sigma(1)}(x),h_A^{\sigma(2)}(x),h_A^{\sigma(3)}(x)\right\rangle$. آنگاه مجموعه فازی مردد H_A به مجموعه فازی سه بعدی تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۷] می‌باشد.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

- اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم، $H_A(x) = \left\langle h_A^{\sigma(1)}(x), h_A^{\sigma(2)}(x), h_A^{\sigma(3)}(x), h_A^{\sigma(4)}(x) \right\rangle$ که $h_A^{\sigma(1)}(x) = \mu^-(x)$ و $h_A^{\sigma(2)}(x) = \mu^+(x)$ و $h_A^{\sigma(3)}(x) = 1 - \nu^-(x)$ و $h_A^{\sigma(4)}(x) = 1 - \nu^+(x)$ می‌باشد به طوری که مجموعه فازی مردد H_A به مجموعه فازی شهودی بازه مقدار تبدیل شده و در این حالت تعریف ۴.۲ منطبق بر تعریف ارایه شده در مرجع [۱۴] می‌باشد.

به عنوان نتیجه‌ای از موارد بالا، مشاهده می‌گردد که تعریف مجموعه برشی برای مجموعه فازی مردد، شکل تعمیم یافته‌ای از مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای- مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای- مقدار هستند.

اکنون به بررسی تعدادی از ویژگی‌های مرتبط با مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد خواهیم پرداخت.

گزاره ۵.۲. فرض کنید که $H_A = \langle X, h_A \rangle \in HFS(X,N)$ ، $H_B = X, h_B \in HFS(X,N)$ و $H_{A_i} = x, h_{A_i} \in HFS(X,N)$ با $i \in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است. آنگاه

$$H_A^{\theta} = \left(H_{A\underline{\theta}}\right)^c, H_A^{\underline{\theta}} = \left(H_{A\theta}\right)^c, H_{A[\theta]} = H_{A(1-\theta)}, \tag{۱۲}$$

$$H_{A[\underline{\theta}]} = H_{A(1-\theta)}; H_A^{[\theta]} = \left(H_{A\underline{(1-\theta)}}\right)^c, H_A^{[\underline{\theta}]} = (H_{A(1-\theta)})^c, \tag{۱۳}$$

$$H_{A[\underline{\theta}]} \subset H_{A\theta}; \tag{۱۴}$$

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow H_{A\theta_1} \supset H_{A\theta_2}, H_{A\underline{\theta_1}} \supset H_{A\underline{\theta_2}}, H_{A\underline{\theta_1}} \supset H_{A\theta_2}; \tag{۱۵}$$

$$H_A \subset H_B \Rightarrow H_{A\theta} \subset H_{B\theta}, H_{A\underline{\theta}} \subset H_{B\underline{\theta}}; \tag{۱۶}$$

$$\left(H_A^c\right)_{\theta} = \left(H_{A\underline{(1-\theta)}}\right)^c, \quad (H_A^c)_{\underline{\theta}} = \left(H_{A(1-\theta)}\right)^c; \tag{۱۷}$$

$$\begin{gathered} \left(H_A \cup H_B\right)_{\theta} = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}, \left(H_A \cup H_B\right)_{\underline{\theta}} = H_{A\underline{\theta}} \cup H_{B\underline{\theta}} \\ \left(H_A \cap H_B\right)_{\theta} = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}, \left(H_A \cap H_B\right)_{\underline{\theta}} = H_{A\underline{\theta}} \cap H_{B\underline{\theta}}; \end{gathered} \tag{۱۸}$$

$$\begin{gathered} \left(\bigcup_{i\in I} H_{A_i}\right)_{\theta} \supset \bigcup_{i\in I} (H_{A_i})_{\theta}, \left(\bigcup_{i\in I} H_{A_i}\right)_{\theta} = \bigcup_{i\in I} (H_{A_i})_{\theta}, \\ (\bigcap_{i\in I} H_{A_i})_{\theta} = \bigcap_{i\in I} \left(H_{A_i}\right)_{\theta}, \left(\bigcap_{i\in I} H_{A_i}\right)_{\underline{\theta}} \subset \bigcap_{i\in I} (H_{A_i})_{\underline{\theta}} \quad ; \end{gathered} \tag{۱۹}$$

$$\begin{gathered} H_{A(\theta_1 \wedge \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cup H_{A\theta_2}, H_{A\underline{(\theta_1 \wedge \theta_2)}} = H_{A\underline{\theta_1}} \cup H_{A\underline{\theta_2}}, \\ H_{A(\theta_1 \vee \theta_2)} = H_{A\theta_1} \cap H_{A\theta_2}, H_{A\underline{(\theta_1 \vee \theta_2)}} = H_{A\underline{\theta_1}} \cap H_{A\underline{\theta_2}}, \end{gathered} \tag{۲۰}$$

$$\begin{gathered} \theta_i \in [0,1] \quad , \ i \in I, \alpha = \bigwedge_{i\in I} \theta_i, \beta = \bigvee_{i\in I} \theta_i \Rightarrow \\ \bigcup_{i\in I} H_{A\theta_i} \subset H_{A\alpha}, \bigcap_{i\in I} H_{A\theta_i} = H_{A\beta}, \bigcup_{i\in I} H_{A\underline{\theta_i}} = H_{A\alpha}, \bigcap_{i\in I} H_{A\underline{\theta_i}} \supset H_{A\underline{\beta}} \end{gathered} \tag{۲۱}$$

$$H_{A\underline{1}} = 0, H_{A0} = X. \tag{۲۲}$$

اثبات: بخش‌های (۱۵)-(۱۲) و (۲۲) می‌توانند به طور مستقیم اثبات شوند.

اثبات (۱۶): با توجه به تعریف ۴.۲ برای $j = 1, 2, \ldots, N-1$ داریم

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\left(H_A^c\right)_\theta=\begin{cases}1 & h_{A^c}^{\sigma(1)}(x)\geq\theta;\\ \left(1-\frac{j}{N}\right) & h_{A^c}^{\sigma(j)}(x)<\theta\leq h_{A^c}^{\sigma(j+1)}(x);\\ 0 & h_{A^c}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & 1-h_A^{\sigma(N)}(x)\geq\theta;\\ \left(1-\frac{j}{N}\right) & 1-h_A^{\sigma(N-j+1)}(x)<\theta\leq 1-h_A^{\sigma(N-(j+1)+1)}(x);\\ 0 & 1-h_A^{\sigma(1)}(x)<\theta,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & 1-\theta\geq h_A^{\sigma(N)}(x);\\ \left(1-\frac{j}{N}\right) & h_A^{\sigma(N-j+1)}(x)>1-\theta\geq h_A^{\sigma(N-(j+1)+1)}(x);\\ 0 & 1-\theta<h_A^{\sigma(1)}(x),\end{cases}$$

حال با قرار دادن $\hat{j}=N-j$ نتیجه می گیریم که

$$\left(H_A^c\right)_\theta=\begin{cases}1 & 1-\theta\geq h_A^{\sigma(N)}(x);\\ \left(1-\frac{N-\hat{j}}{N}\right) & h_A^{\sigma(\hat{j}+1)}(x)>1-\theta\geq h_A^{\sigma(\hat{j})}(x);\\ 0 & 1-\theta<h_A^{\sigma(1)}(x),\end{cases}$$

$$=1-\begin{cases}0 & 1-\theta\geq h_A^{\sigma(N)}(x);\\ 1-\left(1-\frac{N-\hat{j}}{N}\right) & h_A^{\sigma(\hat{j}+1)}(x)>1-\theta\geq h_A^{\sigma(\hat{j})}(x);\\ 1 & 1-\theta<h_A^{\sigma(1)}(x),\end{cases}$$

$$=1-H_{A(\underline{1-\theta})}.$$

آنگاه از واقعیت $H_A^C=1-H_A$ داریم

$$(H_A^c)_\theta=1-H_{A(1-\theta)}=(H_{A(1-\theta)})^c\ ;$$

نتایج بالا و این حقیقت که $\left(H_A^C\right)_\theta,\left(H_{A(\underline{1-\theta})}\right)^C\in(N+1)^X$ نتیجه می‌دهد که $\left(H_A^C\right)_\theta=\left(H_{A(\underline{1-\theta})}\right)^C$. با روشی مشابه می‌توان نشان داد که $\left(H_A^C\right)_{\underline{\theta}}=\left(H_{A(1-\theta)}\right)^C$.

اثبات رابطه (۱۷): می‌دانیم

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\left(H_A \cup H_B\right)_\theta = \begin{cases} ۱ & h^{\sigma(۱)}_{(A\cup B)}(x) \geq \theta; \\ \left(۱-\dfrac{j}{N}\right) & h^{\sigma(j)}_{(A\cup B)}(x) < \theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{(A\cup B)}(x); \\ ۰ & h^{\sigma(N)}_{(A\cup B)}(x) < \theta, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & h^{\sigma(۱)}_{A}(x) \vee h^{\sigma(۱)}_{B}(x) \geq \theta; \\ \left(۱-\dfrac{j}{N}\right) & h^{\sigma(j)}_{A}(x) \vee h^{\sigma(j)}_{B}(x) < \theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{A}(x) \vee h^{\sigma(j+۱)}_{B}(x); \\ ۰ & h^{\sigma(N)}_{A}(x) \vee h^{\sigma(N)}_{B}(x) < \theta, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & h^{\sigma(۱)}_{A}(x) \geq \theta \vee h^{\sigma(۱)}_{B}(x) \geq \theta; \\ \left(۱-\dfrac{j}{N}\right) & h^{\sigma(j)}_{A}(x)\theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{A}(x) \vee h^{\sigma(j)}_{B}(x) < \theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{B}(x); \\ ۰ & h^{\sigma(N)}_{A}(x) < \theta \vee h^{\sigma(N)}_{B}(x) < \theta, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & h^{\sigma(۱)}_{A}(x) \geq \theta; \\ \left(۱-\dfrac{j}{N}\right) & h^{\sigma(j)}_{A}(x)\theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{A}(x) \\ ۰ & h^{\sigma(N)}_{A}(x) < \theta, \end{cases} \vee \begin{cases} ۱ & h^{\sigma(۱)}_{B}(x) \geq \theta; \\ \left(۱-\dfrac{j}{N}\right) & h^{\sigma(j)}_{B}(x) < \theta \leq h^{\sigma(j+۱)}_{B}(x) \\ ۰ & h^{\sigma(N)}_{A}(x) < \theta, \end{cases}$$

$$= H_{A\theta} \cup H_{B\theta}$$

نتایج بالا و این حقیقت که $(N+۱)^X \ni \left(H_A \cup H_B\right)_\theta, \left(H_{A\theta} \cup H_{B\theta}\right)$ نتیجه می‌دهد که $\left(H_A \cup H_B\right)_\theta = H_{A\theta} \cup H_{B\theta}$.

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که $\left(H_A \cup H_B\right)_{\underline{\theta}} = H_{A\underline{\theta}} \cup H_{B\underline{\theta}}$, و $\left(H_A \cap H_B\right)_\theta = H_{A\theta} \cap H_{B\theta}$ و $\left(H_A \cap H_B\right)_{\underline{\theta}} = H_{A\underline{\theta}} \cap H_{B\underline{\theta}}$ برقرار است.

اثبات رابطه (۱۸): می‌دانیم

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\bigcup_{i\in I}(H_{A_i})_\theta = \vee_{i\in I}\begin{cases} ۱ & h_{A_i}^{\sigma(۱)}(x)\ge\theta;\\ \left(۱-\frac{j}{N}\right) & h_{A_i}^{\sigma(j)}(x)<\theta\le h_{A_i}^{\sigma(j+۱)}(x)\\ ۰ & h_{A_i}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۱ & h_{A_۱}^{\sigma(۱)}(x)\ge\theta;\\ \left(۱-\frac{j}{N}\right) & h_{A_۱}^{\sigma(j)}(x)<\theta\le h_{A_۱}^{\sigma(j+۱)}(x)\\ ۰ & h_{A_۱}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}\vee\begin{cases} ۱ & h_{A_۲}^{\sigma(۱)}(x)\ge\theta;\\ \left(۱-\frac{j}{N}\right) & h_{A_۲}^{\sigma(j)}(x)<\theta\le h_{A_۲}^{\sigma(j+۱)}(x)\\ ۰ & h_{A_۲}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}\vee\ldots$$

$$\subseteq\begin{cases} ۱ & \vee_{i\in I}h_{A_i}^{\sigma(۱)}(x)\ge\theta;\\ \left(۱-\frac{j}{N}\right) & \vee_{i\in I}h_{A_i}^{\sigma(j)}(x)<\theta\le\vee_{i\in I}h_{A_i}^{\sigma(j+۱)}(x);\\ ۰ & \vee_{i\in I}h_{A_i}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۱ & h_{(\bigcup_{i\in I}(A_i)}^{\sigma(۱)}(x)\ge\theta;\\ \left(۱-\frac{j}{N}\right) & h_{(\bigcup_{i\in I}(A_i))}^{\sigma(j)}(x)<\theta\le h_{(\bigcup_{i\in I}(A_i))}^{\sigma(j+۱)}(x);\\ ۰ & h_{(\bigcup_{i\in I}(A_i))}^{\sigma(N)}(x)<\theta,\end{cases}$$

$$==\left(\bigcup_{i\in I}\left(H_{A_i}\right)\right)_\theta .$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})_{\underline{\theta}}=\bigcup_{i\in I}\left(H_{A_i}\right)_{\underline{\theta}},\ \ (\bigcap_{i\in I}H_{A_i})_\theta=\bigcap_{i\in I}\left(H_{A_i}\right)_\theta,$$

و

$$(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})_{\underline{\theta}}\subset\bigcap_{i\in I}\left(H_{A_i}\right)_{\underline{\theta}}.$$

سایر رابطه‌های باقیمانده (۲۲)-(۲۰) به طریق مشابه ثابت می‌شوند.

همان‌گونه که در ادامه مشاهده می‌شود، چهار نوع مجموعه برشی مجموعه‌های فازی مردد دارای ویژگی‌های مشابهی هستند.

گزاره ۶.۲. فرض کنید که $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS(X,N)$ ، $H_B=X,h_B\in HFS(X,N)$ و $H_{A_i}=x,h_{A_i}\in HFS(X,N)$ با $i\in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است. آنگاه

$$H_A^{\underline{\theta}}\subset H_A^{\theta};$$

$$\theta_۱<\theta_۲\Rightarrow H_A^{\theta_۱}\subset H_A^{\theta_۲},H_A^{\underline{\theta_۱}}\subset H_A^{\underline{\theta_۲}},H_A^{\theta_۱}\subset H_A^{\theta_۲};$$

$$H_A\subset H_B\Rightarrow H_A^{\theta}\supset H_B^{\theta},H_A^{\underline{\theta}}\supset H_B^{\underline{\theta}};$$

$$\left(H_A^c\right)^\theta=\left(H_A^{\underline{۱-\theta}}\right)^c,\ \ (H_A^c)^{\underline{\theta}}=\left(H_A^{۱-\theta}\right)^c;$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\left(H_A\cup H_B\right)^{\theta}=H_A^{\theta}\cap H_B^{\theta},\ \ (H_A\cup H_B)^{\underline{\theta}}=H_A^{\underline{\theta}}\cup H_B^{\underline{\theta}};$$

$$\left(H_A\cap H_B\right)^{\theta}=H_A^{\theta}\cup H_B^{\theta},\ \ (H_A\cap H_B)^{\underline{\theta}}=H_A^{\underline{\theta}}\cap H_B^{\underline{\theta}};$$

$$(\bigcup_{i\in I} H_{A_i})^{\theta}=\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{\theta},(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})^{\underline{\theta}}\subset\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{\underline{\theta}},\ (\bigcap_{i\in I}H_{A_i})^{\theta}\supset\bigcup_{i\in I}(H_{A_i})^{\theta},(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})^{\underline{\theta}}=\bigcup_{i\in I}(H_{A_i})^{\underline{\theta}};$$

$$H_A^{\theta_۱\wedge\theta_۲}=H_A^{\theta_۱}\cap H_A^{\theta_۲},H_A^{\underline{\theta_۱\wedge\theta_۲}}=H_A^{\underline{\theta_۱}}\cap H_A^{\underline{\theta_۲}},H_A^{\theta_۱\vee\theta_۲}=H_A^{\theta_۱}\cup H_A^{\theta_۲},H_A^{\underline{\theta_۱\vee\theta_۲}}=H_A^{\underline{\theta_۱}}\cup H_A^{\underline{\theta_۲}};$$

$$\theta_i\in[۰,۱]\quad ,i\in I,\quad \alpha=\bigwedge_{i\in I}\theta_i,\beta=\bigvee_{i\in I}\theta_i\Rightarrow$$

$$\bigcap_{i\in I}H_A^{\theta_i}=H_A^{\alpha},\bigcup_{i\in I}H_A^{\theta_i}\subset H_A^{\beta},\bigcap_{i\in I}H_A^{\underline{\theta_i}}\supset H_A^{\underline{\alpha}},\bigcup_{i\in I}H_A^{\underline{\theta_i}}\subset H_A^{\underline{\beta}};$$

$$H_A^{۱}=X,H_A^{\underline{۰}}=۰.$$

گزاره ۷.۲. فرض کنید که $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS(X,N)$ ، $H_B=X,h_B\in HFS(X,N)$ و $H_{A_i}=x,h_{A_i}\in HFS(X,N)$ با $i\in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است. آنگاه

$$H_{A[\underline{\theta}]}\subset H_{A[\theta]};$$

$$\theta_۱<\theta_۲\Rightarrow H_{A[\theta_۱]}\subset H_{A[\theta_۲]},H_{A[\underline{\theta_۱}]}\subset H_{A[\underline{\theta_۲}]},H_{A[\underline{\theta_۱}]}\subset H_{A[\theta_۲]};$$

$$H_A\subset H_B\Rightarrow H_{A[\theta]}\subset H_{B[\theta]},H_{A[\underline{\theta}]}\subset H_{B[\underline{\theta}]};$$

$$\left(H_A^c\right)_{[\theta]}=\left(H_{A[\underline{1-\theta}]}\right)^c,\ \left(H_A^c\right)_{[\underline{\theta}]}=\left(H_{A[1-\theta]}\right)^c;$$

$$\left(H_A\cup H_B\right)_{[\theta]}=H_{A[\theta]}\cup H_{B[\theta]},\ \left(H_A\cup H_B\right)_{[\underline{\theta}]}=H_{A[\underline{\theta}]}\cup H_{B[\underline{\theta}]};$$

$$\left(H_A\cap H_B\right)_{[\theta]}=H_{A[\theta]}\cap H_{B[\theta]},\ \left(H_A\cap H_B\right)_{[\underline{\theta}]}=H_{A[\underline{\theta}]}\cap H_{B[\underline{\theta}]};$$

$$(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})_{[\theta]}\supset\bigcup_{i\in I}(H_{A_i})_{[\theta]}\quad ,(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})_{[\underline{\theta}]}=\bigcup_{i\in I}(H_{A_i})_{[\underline{\theta}]},$$

$$(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})_{[\theta]}=\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})_{[\theta]}\quad ,(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})_{[\underline{\theta}]}\subset\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})_{[\underline{\theta}]}\quad ;$$

$$H_{A[\theta_۱\wedge\theta_۲]}=H_{A[\theta_۱]}\cap H_{A[\theta_۲]},H_{A[\underline{\theta_۱\wedge\theta_۲}]}=H_{A[\underline{\theta_۱}]}\cap H_{A[\underline{\theta_۲}]},$$

$$H_{A[\theta_۱\vee\theta_۲]}=H_{A[\theta_۱]}\cup H_{A[\theta_۲]},H_{A[\underline{\theta_۱\vee\theta_۲}]}=H_{A[\underline{\theta_۱}]}\cup H_{A[\underline{\theta_۲}]};$$

.

$$\bigcap_{i\in I}H_{A[\theta_i]}\supset H_{A[\alpha]},\bigcup_{i\in I}H_{A[\theta_i]}\subset H_{A[\beta]},\bigcap_{i\in I}H_{A[\underline{\theta_i}]}\supset H_{A[\underline{\alpha}]},\bigcup_{i\in I}H_{A[\underline{\theta_i}]}\subset H_{A[\underline{\beta}]};$$

$$H_{A[۱]}=X,H_{A[\underline{۰}]}=۰.$$

گزاره ۸.۲. فرض کنید که $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS(X,N)$ ، $H_B=X,h_B\in HFS(X,N)$ و $H_{A_i}=x,h_{A_i}\in HFS(X,N)$ با $i\in I$ که I مجموعه اندیس‌ها است. آنگاه

$$H_A^{[\underline{\theta}]}\subset H_A^{[\theta]};$$

$$\theta_۱<\theta_۲\Rightarrow H_A^{[\theta_۱]}\supset H_A^{[\theta_۲]},H_A^{[\underline{\theta_۱}]}\supset H_A^{[\underline{\theta_۲}]},H_A^{[\underline{\theta_۱}]}\supset H_A^{[\theta_۲]};$$

$$H_A\subset H_B\Rightarrow H_A^{[\theta]}\supset H_B^{[\theta]},H_A^{[\underline{\theta}]}\supset H_B^{[\underline{\theta}]};$$

$$\left(H_A^c\right)^{[\theta]}=\left(H_A^{[\underline{۱-\theta}]}\right)^c,\ \left(H_A^c\right)^{[\underline{\theta}]}=\left(H_A^{[۱-\theta]}\right)^c;$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\begin{gathered}
\left(H_A\cup H_B\right)^{[\theta]}=H_A^{[\theta]}\cap H_B^{[\theta]},\ \left(H_A\cup H_B\right)^{\underline{[\theta]}}=H_A^{\underline{[\theta]}}\cap H_B^{\underline{[\theta]}};\\
\left(H_A\cap H_B\right)^{[\theta]}=H_A^{[\theta]}\cup H_B^{[\theta]},\ \left(H_A\cap H_B\right)^{\underline{[\theta]}}=H_A^{\underline{[\theta]}}\cup H_B^{\underline{[\theta]}};\\
(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})^{[\theta]}=\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{[\theta]}\quad,(\bigcup_{i\in I}H_{A_i})^{\underline{[\theta]}}\subset\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{\underline{[\theta]}}\ ,\\
(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})^{[\theta]}\supset\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{[\theta]}\quad,(\bigcap_{i\in I}H_{A_i})^{\underline{[\theta]}}\supset\bigcap_{i\in I}(H_{A_i})^{\underline{[\theta]}}\ ;\\
H_A^{[\theta_1\wedge\theta_2]}=H_A^{[\theta_1]}\cup H_A^{[\theta_2]},H_A^{\underline{[\theta_1\wedge\theta_2]}}=H_A^{\underline{[\theta_1]}}\cup H_A^{\underline{[\theta_2]}},\\
H_A^{[\theta_1\vee\theta_2]}=H_A^{[\theta_1]}\cap H_A^{[\theta_2]},H_A^{\underline{[\theta_1\vee\theta_2]}}=H_A^{\underline{[\theta_1]}}\cap H_A^{\underline{[\theta_2]}};\\
\theta_i\in[0,1]\quad,i\in I,\quad\alpha=\bigwedge_{i\in I}\theta_i,\beta=\bigvee_{i\in I}\theta_i\Rightarrow\\
\bigcap_{i\in I}H_A^{[\theta_i]}\subset H_A^{[\alpha]},\bigcup_{i\in I}H_A^{[\theta_i]}=H_A^{[\beta]},\bigcap_{i\in I}H_A^{\underline{[\theta_i]}}=H_A^{\underline{[\alpha]}},\bigcup_{i\in I}H_A^{\underline{[\theta_i]}}\supset H_A^{\underline{[\beta]}};\\
H_A^{[1]}=0,H_A^{\underline{[0]}}=X.
\end{gathered}$$

برطبق گزاره‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که مفاهیم مجموعه برشی مجموعه‌های فازی مردد ویژگی‌های مشابهی همانند آنچه برای مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار بیان می‌گردند می‌باشند و این امر کاملا طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

۳ قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد

قبل از پرداختن به قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد، ابتدا برخی از مفاهیم لازم را توضیح می‌دهیم.

فرض کنید $I=\{1,2,\dots,N\}$ و $I_{\underline{j}}=\{1,2,\dots,j\}$ و $I_{\bar{j}}=\{j+1,j+2,\dots,N\}$ باشند و $E_i=\{0,\dots,1,\dots,1\}\,(i=1,\dots,N)$ به مجموعه فازی مردد همانی با $h_{E_i}^{\sigma(i)}(x)=1$ اشاره داشته باشد. واضح است که $\vee_{i\in I_{\bar{0}}}E_i=\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i=\{0,\dots,0,\dots,0\}$ و $\vee_{i\in\bar{0}}E_i=\vee_{i\in I_{\underline{N}}}E_i=\{1,\dots,1,\dots,1\}$ که به ترتیب به عنوان مجموعه‌های فازی مردد کامل و پوچ می‌باشند. مجموعه‌های فازی مردد کامل و پوچ را از این پس به ترتیب با ۱ و ۰ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳ فرض کنید $H_A\in(N+1)^X$ و $\theta\in[0,1]$ و $f_{k\,(k=1,\dots,8)}:[0,1]\times(N+1)^X\to N^X$ نگاشت‌های زیر باشند:

$$f_1(\theta,H_A)=\begin{cases}\theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{0}}}E_i\right) & H_A(x)=1;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A(x)=\left(1-\dfrac{j}{N}\right),\ j=1,\dots,N-1;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A(x)=0,\end{cases}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$f_{۲}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\theta\left(\vee_{i\in I_{۰}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\underline{j}}}E_i\right)\vee(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\underline{N}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

$$f_{۳}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

$$f_{۴}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\theta\left(\vee_{i\in I_{N}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{j}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱;\\ \theta\left(\vee_{i\in I_{\underline{۰}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

$$f_{۵}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱;\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱;\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

$$f_{۶}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{۰}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱;\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{j}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱;\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{N}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

$$f_{۷}\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۱;\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(۱-\frac{j}{N}\right),\ j=۱,\dots,N-۱\\ \left(۱-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\bar{۰}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=۰,\end{cases}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$f_8\left(\theta,H_A\right)=\begin{cases}\left(1-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{N}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{N}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=1;\\ \left(1-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{j}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{j}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=\left(1-\dfrac{j}{N}\right), j=1,\dots,N-1;\\ \left(1-\theta\right)\left(\vee_{i\in I_{\underline{0}}}E_i\right)\vee\left(\vee_{i\in I_{\bar{0}}}E_i\right) & H_A\left(x\right)=0,\end{cases}$$

با استفاده از تعاریف بالا، قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی مردد می‌تواند به‌صورت زیر بیان گردند.

قضیه ۲.۳ فرض کنید $H_A=\langle X,h_A\rangle\in HFS\left(X,N\right)$. آنگاه

$$H_A=\bigcup_{\theta\in[0,1]}f_1\left(\theta,H_{A\theta}\right)=\bigcap_{\theta\in[0,1]}f_2\left(\theta,H_{A\theta}\right);$$
$$H_A=\bigcup_{\theta\in[0,1]}f_1\left(\theta,H_{A\underline{\theta}}\right)=\bigcap_{\theta\in[0,1]}f_2\left(\theta,H_{A\underline{\theta}}\right).$$

علاوه براین، اگر نگاشت $H:[0,1]\to\left(N+1\right)^X$ با ویژگی $H_{A\underline{\theta}}\subset\mathcal{H}(\theta)\subset H_{A\theta}$ درنظر بگیریم آنگاه نتیجه می‌شود که

$$H_A=\bigcup_{\theta\in[0,1]}f_1\left(\theta,\mathcal{H}(\theta)\right)=\bigcap_{\theta\in[0,1]}f_2\left(\theta,\mathcal{H}(\theta)\right);$$
$$\theta_1<\theta_2\Rightarrow\mathcal{H}(\theta_1)\supset\mathcal{H}(\theta_2);$$
$$H_{A\theta}=\bigcap_{\alpha<\theta}\mathcal{H}(\alpha),H_{A\underline{\theta}}=\bigcup_{\alpha>\theta}\mathcal{H}(\alpha).$$

به طریق مشابه، به آسانی می‌توان نشان داد که اگر نگاشت $H:[0,1]\to\left(N+1\right)^X$ با ویژگی‌های

$$H_A^{[\underline{\theta}]}\subset\mathcal{H}(\theta)\subset H_A^{[\theta]}$$
$$H_{A[\underline{\theta}]}\subset\mathcal{H}(\theta)\subset H_{A[\theta]}$$
$$H_A^{\underline{\theta}}\subset\mathcal{H}(\theta)\subset H_A^{\theta}$$

را درنظر بگیریم آنگاه نتایج قضیه ۳.۲. به‌راحتی قابل استنباط هستند.

قابل توجه است که اگر $H_A=X,h_A\in HFS\left(X,N\right)$ به ترتیب مجموعه‌ای فازی مردد به با $N=1,N=2,N=3,N=4$ در نظر گرفته شوند، آنگاه همه قضیه‌های تجزیه مجموعه‌های فازی مردد بالا دقیقا متناظر با قضایای تجزیه مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه ای-مقدار بیان می‌گردند. و این امر کاملا طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

٤ قضایای نمایش مجموعه‌های فازی مردد

برای بیان نتایج اصلی این بخش، نیاز به تعاریف زیر می‌باشد.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\mathcal{H}:[0,1]\to\left(N+1\right)^X$ یک نگاشت باشد. اگر گزاره زیر برقرار باشد

$$\theta_{۱} < \theta_{۲} \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_{۱}) \supset \mathcal{H}(\theta_{۲})$$

آنگاه نگاشت $N+۱$ -مقداره $\mathcal{H}$ را به عنوان مجموعه مرتب مرتبه معکوس روی X می‌نامیم.

در مباحث بعدی، از نماد $\mathbb{H}^{\triangleleft}(X)$ برای بیان خانواده تمام مجموعه‌های مرتب مرتبه معکوس روی X استفاده شده است.

براساس ساختاربندی ذیل، عملگرهای روی $\mathbb{H}^{\triangleleft}(X)$ برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H}_{۱} \subset \mathcal{H}_{۲} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{۱}(\alpha) \subset \mathcal{H}_{۲}(\alpha);$$
$$\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcup_{i\in I}\mathcal{H}_i(\alpha);$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \bigcap_{i\in I}\mathcal{H}_i(\alpha);$$
$$\mathcal{H}^c(\alpha) = \left(\mathcal{H}(۱-\alpha)\right)^c;$$
$$\bar{X}(\alpha) = X, \bar{\circ}(\alpha) = \circ .$$

با درنظرگرفتن ساختاربندی بالا، فضای $\left(\mathbb{H}^{\triangleleft}(X), \cup, \cap, X, \bar{\circ}\right)$ یک F لاتیس نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $\Gamma_{i_{(i=۱,۲)}} : \mathbb{H}^{\triangleleft}(X) \to N^X$ به‌صورت نگاشت زیر باشد

$$\Gamma_{۱}(\mathcal{H}) = \bigcup_{\theta\in[۰,۱]} f_{۱}\left(\theta, \mathcal{H}(\theta)\right), \Gamma_{۲}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\theta\in[۰,۱]} f_{۲}(\theta, \mathcal{H}(\theta)).$$

آنگاه

$$\Gamma_{۱}(\mathcal{H}) = \Gamma_{۲}(\mathcal{H});$$
$$\Gamma_{۱}(\mathcal{H})_{\theta} = \bigcap_{\alpha<\theta}\mathcal{H}(\alpha), \Gamma_{۱}(\mathcal{H})_{\underline{\theta}} = \bigcup_{\alpha>\theta}\mathcal{H}(\alpha);$$

$\Gamma_{۱}(\Gamma_{۲})$ پوشا است و

$$\Gamma_{۱}\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{H}_i\right) = \bigcup_{i\in I}\Gamma_{۱}(\mathcal{H}_i), \Gamma_{۱}\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{H}_i\right) = \bigcap_{i\in I}\Gamma_{۱}(\mathcal{H}_i), \Gamma_{۱}(\mathcal{H}^c) = \left(\Gamma_{۱}(\mathcal{H})\right)^c.$$

لازم به‌ذکر است که روابط فوق به‌طور مشابه‌ای برای حالت $\Gamma_{i_{(i=۷,۸)}} : \mathbb{H}^{\triangleleft}(X) \to N^X$ می‌توانند ارایه گردد.

تعریف ۳.۴. فرض کنید $\mathcal{H} : [۰,۱] \to (N+۱)^X$ یک نگاشت باشد. اگر گزاره زیر برقرار باشد

$$\theta_{۱} < \theta_{۲} \Rightarrow \mathcal{H}(\theta_{۱}) \subset \mathcal{H}(\theta_{۲})$$

آنگاه نگاشت $N+۱$ -مقداره $\mathcal{H}$ را به عنوان مجموعه مرتب روی X می‌نامیم.

در مباحث بعدی، از نماد $\mathbb{H}^{\triangleright}(X)$ برای بیان خانواده تمام مجموعه‌های مرتب روی X استفاده شده است.

براساس ساختاربندی ذیل، عملگرهای روی $\mathbb{H}^{\triangleright}(X)$ برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H}_{۱} \subset \mathcal{H}_{۲} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{۱}(\alpha) \supset \mathcal{H}_{۲}(\alpha);$$
$$\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \cap_{i\in I}\mathcal{H}_i(\alpha);$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{H}_i\right)(\alpha) = \cup_{i\in I}\mathcal{H}_i(\alpha);$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]

$$\mathcal{H}^{c}(\alpha)=\left(\mathcal{H}(۱-\alpha)\right)^{c};$$
$$\underline{X}(\alpha)=۰,\underline{۰}(\alpha)=X.$$

با درنظرگرفتن ساختاربندی بالا، فضای $\left(\mathbb{H}^{\triangleright}(X),\cup,\cap,X,\bar{۰}\right)$ یک F لاتیس نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $\Gamma_{i_{(i=۳,۴)}}:\mathbb{H}^{\triangleright}(X)\to N^{X}$ به‌صورت نگاشت زیر باشد

$$\Gamma_{۳}(\mathcal{H})=\bigcup_{\theta\in[۰,۱]} f_{۳}\left(\theta,\mathcal{H}(\theta)\right),\Gamma_{۴}(\mathcal{H})=\bigcap_{\theta\in[۰,۱]} f_{۴}(\theta,\mathcal{H}(\theta)).$$

آنگاه

$$\Gamma_{۳}(\mathcal{H})=\Gamma_{۴}(\mathcal{H});$$
$$\Gamma_{۳}(\mathcal{H})^{[\theta]}=\bigcap_{\alpha>\theta}\mathcal{H}(\alpha),\Gamma_{۳}(\mathcal{H})^{\underline{[\theta]}}=\bigcup_{\alpha<\theta}\mathcal{H}(\alpha);$$

$\Gamma_{۳}\left(\Gamma_{۴}\right)$ پوشا است و

$$\Gamma_{۳}\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{H}_{i}\right)=\bigcup_{i\in I}\Gamma_{۳}(\mathcal{H}_{i}),\Gamma_{۳}\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{H}_{i}\right)=\bigcap_{i\in I}\Gamma_{۳}(\mathcal{H}_{i}),\Gamma_{۳}\left(\mathcal{H}^{c}\right)=\left(\Gamma_{۳}(\mathcal{H})\right)^{c}.$$

لازم به‌ذکر است که روابط فوق به‌طور مشابه‌ای برای حالت $\Gamma_{i_{(i=۵,۶)}}:\mathbb{H}^{\triangleleft}(X)\to N^{X}$ می‌توانند ارایه گردد.

قابل توجه است که اگر $H_{A}=X,h_{A}\in HFS(X,N)$ به‌ترتیب مجموعه‌ای فازی مردد به با $N=۱,N=۲,N=۳,N=۴$ در نظر گرفته شوند، آنگاه همه قضیه‌های نمایش مجموعه‌های فازی مردد بالا دقیقا متناظر با قضایای نمایش مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار بیان می‌گردند. و این امر کاملا طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، ابتدا دیدگاه جدیدی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد مطرح نمودیم که متفاوت با تعریف موجود در این زمینه می‌باشد. مبتنی بر مفهوم ارایه شده‌ی از مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد، قضایای تجزیه و قضایای نمایش مربوطه اثبات و ارایه گردید. آنچه که ارزشمند می‌نماید آن‌است که قضایای تجزیه و قضایای نمایش مجموعه‌های فازی مردد بیان شده دقیقا متناظر با قضایای تجزیه و قضایای نمایش مجموعه‌های فازی، فازی شهودی، فازی بازه‌ای-مقدار، مجموعه‌های فازی سه بعدی و فازی شهودی بازه‌ای-مقدار است. این انتظار کاملا طبیعی است چرا که همه این مجموعه‌ها حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی مردد هستند. به هر حال، آنچه که می‌تواند به عنوان کارهای آتی در نظر گرفته شود بررسی کاربرد مجموعه‌های برشی برای مجموعه‌های فازی مردد در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره است به‌خصوص ارایه راهکارهایی مبتنی بر اندازه‌های اطلاعات مانند اندازه‌های فاصله، اندازه‌های شباهت و اندازه‌های آنتروپی.

منابع

[۲] برزگری نژاد، ع.، حسین زاده لطفی، ف.، رستمی مال خلیفه، م.، (۱۳۹۵). مدلی غیرشعاعی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳(۳)، ۱۱۱-۱۲۱.

[۳] کردرستمی، س.، امیر تیموری، ع.، فاضلی سندیانی، س.، (۱۳۹۰). تخصیص مجدد منابع با حفظ پایداری مرزهای کارآ در مناطق. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۸(۴)، ۹۳-۱۰۵.

[1] Mordeson J.N., Bhutani K.R., Rosenfeld A., (2005). Fuzzy Group Theory, Springer, New York.
[4] Lai Y.J., Hwang C.L. (1992), Fuzzy mathematical programming-methods and applications, Springerverlag, Berlin.
[5] Luo C.Z., Wang P.Z., (1990). Representation of compositional relations in fuzzy reasoning, Fuzzy Sets and Systems, 36, 327-337.
[6] Yuan X.H., Li H.X., Stanley Lee E., (2009). Three new cut sets of fuzzy sets and new theories of fuzzy sets, Computer and Mathematics with Applications, 57, 691-701.
[7] H.X. Li, X.H. Yuan, E.S. Lee, (2009). The three-dimensional fuzzy sets and their cut sets, Computers and Mathematics with Applications 58 1349-1359.
[8] Yuan X.H., Li H.X Sun., K.B., (2011). The cut sets, decomposition theorems and representation theorems on intuitionistic fuzzy sets and interval valued fuzzy sets, Science China (Information Sciences) 54 (1) 91-110.
[9] Martinetti D., Janis V., Montes S., (2013). Cuts of intuitionistic fuzzy sets respecting fuzzy connectives, Information Sciences, 232, 267-275.
[10] Wang Ch., (2017). Decomposition theorems and representation theorems of vague soft sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 32, 85-95.
[11] Chen L, Chen Z., (2019). Decomposition theorem of fuzzy tensors and its applications. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 36, 575-581.
[12] Chen L., (2020). Decomposition theorem of intuitionistic fuzzy tensors, Computational and Applied Mathematics, 39, https://doi.org/10.1007/s40314-019-1000-8.
[13] Alcantud J.C.R, Torra V., (2018). Decomposition theorems and extension principles for hesitant fuzzy sets, Information Fusion, 41, 48-56.
[14] Yuan X.H., Li H.X., (2009). Cut sets on interval-valued intuitionistic fuzzy sets, Sixth Int. Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 167-171.
[15] Zhu B., Xu Z.S., Xia M.M., (2012). Dual hesitant fuzzy sets, Journal of Applied Mathematics Article ID879629.
[16] Qian G., Wang H., Feng X., (2013). Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system, Knowledge-Based Systems, 37, 357-365.
[17] Liao H., Xu Z., Herrera-Viedma E., Herrera F., (2018), Hesitant fuzzy linguistic term set and its application in decision making: A state-of-the-art survey, Int. J. Fuzzy Systems 20, 2084-2110.
[18] Rodriguez R.M., Martinez L., Herrera F., (2012). Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 20, 109-119.
[19] Farhadinia B., (2013). A novel method of ranking hesitant fuzzy values for multiple attribute decision- making problems, International Journal of Intelligent Systems, 28, 752–767.
[20] Farhadinia B., (2013). Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets, Information Sciences, 240, 129-144.
[21] Torra V., (2010). Hesitant fuzzy sets, International Journal of Intelligent Systems, 25, 529-539.
[22] Zadeh L.A., (1965). Fuzzy sets, Information and Computation, 8, 338-353.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.2.2.0]