مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره اول (پیاپی ۶۴)، بهار ۹۹، ص ص ۱۱۸-۱۰۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه

حسین عزیزی[1*]، حسن حسین‌زاده[2]
۱- گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
۲-گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی، اردبیل، ایران

رسید مقاله: ۲۶ آبان ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۳ آذر ۱۳۹۸

چکیده
تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که ورودی‌های متعدد را مصرف می‌کنند و خروجی‌های متعدد را تولید می‌نمایند. با استفاده از این رویکرد، عملکرد DMUها را از دیدگاه‌های خوشبینانه و بدبینانه اندازه‌گیری می‌کنند. در بسیاری از مواقع نتایج آن‌ها بسیار گمراه‌کننده و حتی متناقض است. لذا این ضرورت انکارناپذیر است که باید اندازه‌های مختلف عملکرد را ادغام کرد، تا یک ارزیابی کلی از عملکرد هر DMU به دست آید. این چیزی است که به آن رویکرد تحلیل مرز دوگانه می‌گویند. در این مقاله یک اندازه‌ی کارایی میانگین توانی را برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد می‌کنیم. کارایی میانگین توانی هر دو اندازه‌ی کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه هر DMU را با هم ادغام می‌کند، و بنابراین، نسبت به هر کدام از این دو اندازه جامع‌تر است. نشان داده می‌شود که اندازه‌ی کارایی میانگین توانی قدرت افتراق بیشتری نسبت به هر کدام از اندازه‌های کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه دارد. کارایی میانگین توانی پیشنهادی با یک مثال عددی، شامل ارزیابی عملکرد ۴۲ گروه آموزشی در یکی از واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی در ایران نشان داده خواهد شد تا مزایا و سودمندی آن را در موقعیت‌های زندگی واقعی نشان دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه، عملکرد کلی.

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند [۱]. این روش، عملکرد DMUها را با بیشینه‌سازی کارایی هر DMU، مشروط به این قید که هیچ‌یک از کارایی‌های DMUهای دیگر بزرگ‌تر از یک نباشد، اندازه‌گیری می‌کند. کارایی‌هایی که به این ترتیب اندازه‌گیری می‌شوند، کارایی خوشبینانه یا بهترین کارایی نسبی نامیده می‌شوند. روش اندازه‌گیری کارایی خوشبینانه‌ی DMUها را خودارزیابی می‌نامند.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: azizhossein@gmail.com

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

در صورتی که نمره‌ی کارایی خودارزیابی یک DMU برابر یک باشد، به آن کارای DEA یا کارای خوشبینانه می‌گویند؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه می‌گویند. معمولاً تصور می‌شود که DMUهای کارای DEA عملکردی بهتر از DMUهای غیرکارای DEA دارند. خودارزیابی مطلوب‌ترین مجموعه‌ی وزن‌های ورودی و خروجی را به هر DMU اختصاص می‌دهد تا کارایی خوشبینانه‌ی آن را بیشینه‌سازی کند، و اغلب منجر به آن می‌شود که بیش از یک DMU به‌عنوان کارای DEA شناسایی شوند و امکان افتراق آن‌ها وجود نداشته باشد.

از طرف دیگر، عملکرد DMUها را از دیدگاه بدبینانه نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. کارایی‌های اندازه‌گیری شده از دیدگاه بدبینانه را می‌توان تحت عنوان بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه نامگذاری کرد، که مقادیر آن شامل مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی یک است. بر عکس DMUهای کارای خوشبینانه که یک مرز کارایی را معین می‌کنند، DMUهای ناکارای بدبینانه یک مرز ناکارایی را مشخص می‌سازند. در صورتی که مقدار بدترین کارایی نسبی یک DMU برابر یک باشد، گفته می‌شود که آن DMU ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به DMUهای غیرناکارای بدبینانه دارند.

کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه دو راس عملکرد هر DMU را اندازه‌گیری می‌کنند. هر روش ارزیابی که فقط یکی از آن‌ها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری است. برای تعیین عملکرد کلی هر DMU باید آن‌ها را هم‌زمان در نظر گرفت.

مساله‌ای که ارتباط نزدیکی با محدودیت‌های مضارب دارد، رتبه‌بندی است. تکنیک DEAی سنتی DMUهای کارای خوشبینانه را شناسایی می‌کند، و معمولاً بیش از یک DMUی کارای خوشبینانه وجود دارد. تمام DMUهای کارای خوشبینانه، نمره‌ی کارایی کامل، یعنی نمره‌ی یک دارند، که این رتبه‌بندی آن‌ها را دشوار می‌سازد. اعمال دامنه‌های تنگ‌تر برای مضارب، ممکن است به افتراق DMUهای کارای خوشبینانه کمک کند. علاوه بر محدودیت‌های وزنی، رویکردهای زیاد دیگری نیز برای رتبه‌بندی وجود دارند [۲].

DMUهای با نمرات کارایی بالاتر معمولاً کاراتر محسوب می‌شوند، و لذا رتبه‌های بهتری دارند. اما برخی از محققان معتقدند که DMUهایی که از وجوه متفاوت مرز برای اندازه‌گیری کارایی استفاده می‌کنند، قابل مقایسه نیستند، و تنها آن‌هایی که از وجه یکسانی از مرز استفاده می‌نمایند، با یکدیگر قابل مقایسه هستند. وجه یکسان مرز به معنای مقادیر یکسان مضارب برای محاسبه‌ی نمرات کارایی است. این سخت‌گیرانه‌ترین حالت ناحیه‌ی اطمینان است، که در آن تنها یک مجموعه از مضارب وجود دارد که می‌توان آن را در منطقه انتخاب کرد. نخستین مقاله‌ای که این ایده را پیشنهاد کرد، رول[1] و همکاران [۳] بود، که در آن از مضارب برای به دست آوردن بزرگ‌ترین نمره‌ی کارایی متوسط از تمام DMUها جهت محاسبه‌ی کارایی هر DMU استفاده شد. بنابراین، نمرات کارایی که به این صورت اندازه‌گیری می‌شوند، مبنای مشترکی برای رتبه‌بندی دارند. مرز وزن

[1] Roll.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

مشترک یک ابرصفحه است که روی تمام DMUها انداخته می‌شود، و همه‌ی DMUها از این مرز برای محاسبه‌ی کارایی استفاده می‌کنند.

کائو[1] و هونگ[2] [۴] این روش را پیشنهاد کردند که از یک راه‌حل مورد توافق جهت تعیین مجموعه‌ی وزن‌های مشترکی استفاده شود که تفاضل کل بین کارایی ایده‌آل (محاسبه شده از مدل‌های CCR یا BCC متعارف) و کارایی واقعی (محاسبه شده از وزن‌های مشترک) از همه‌ی DMUها را کمینه‌سازی می‌کند، جهت تعیین مضارب استفاده شود.

مساله‌ی محدودیت‌های وزنی در مقالات DEA به طور وسیعی مورد بحث قرار گرفته است، و روش‌های مختلفی برای طبقه‌بندی رویکردهای مربوطه وجود دارد. مقالات مربوط به این مبحث در مقالات زیر مورد بحث قرار گرفته‌اند: رول و گولانی[3] [۵]، آلن[4] و همکاران [۶]، آنگولو-مزا[5] و استلیتا لینز[6] [۷]، یورو[7] و ویتالا[8] [۸]، و ساریکو[9] و دایسون[10] [۹]. کارهای پودینوفسکی[11] و تاناسولیس[12] [۱۰]، خلیلی و همکاران [۱۱]، پودینوفسکی و بوزدین-چامیوا[13] [۱۲]، فورسنت[14] [۱۳]، و پودینوفسکی [۱۴] نیز این مساله را مورد بحث قرار داده‌اند.

یک ایده‌ی دیگر در رابطه با وزن مشترک، کارایی متقاطع است [۲۰-۱۵]. این رویکرد از مضارب انتخاب‌شده توسط DMU_j ($j=1,\ldots,n$) برای محاسبه‌ی کارایی همه‌ی DMUهای دیگر، علاوه بر خودش، استفاده می‌کند. بنابراین، هر DMU، n کارایی متقاطع دارد، که با استفاده از n مجموعه‌ی مضرب انتخاب‌شده توسط n DMU محاسبه می‌شود. سپس از متوسط n کارایی متقاطع هر DMU برای رتبه‌بندی استفاده می‌شود. از آنجا که برای استفاده از مدل CCR یا BCC جهت اندازه‌گیری کارایی هر DMU، جواب‌های متعدد وجود دارند، و انتخاب نادرست مضارب می‌تواند منجر به نتایج گمراه‌کننده شود، لذا یک رویکرد آن است که مضاربی انتخاب شوند که بیشینه‌ی کارایی متوسط وزنی را برای همه‌ی DMUها ایجاد می‌کنند.

اکثر روش‌های رتبه‌بندی مبتنی بر ایده‌ی محدودکردن دامنه‌ی مضاربی هستند که برای محاسبه‌ی کارایی‌ها استفاده می‌شوند [۲۱]. بر عکس، آندرسن[15] و پیترسن[16] [۲۲] پیشنهاد کردند که DMUی کانونی حذف شود و مرز از $n-1$ DMUی باقی‌مانده ساخته شود، تا یک شاخص کارایی برای رتبه‌بندی محاسبه شود. اما این روش فقط برای رتبه‌بندی DMUهای کارای خوشبینانه است. از آنجا که DMUهایی که حذف می‌شوند، کارای خوشبینانه هستند، لذا خارج از ناحیه‌ی در برگرفته شده توسط مرز جدید واقع خواهند شد، و نمره‌ی کارایی

[1] Kao.
[2] Hung.
[3] Golany.
[4] Allen.
[5] Angulo-Meza.
[6] Estellita Lins.
[7] Joro.
[8] Viitala.
[9] Sarrico.
[10] Dyson.
[11] Podinovski.
[12] Thanassoulis.
[13] Bouzdine-Chameeva.
[14] Førsund.
[15] Andersen.
[16] Petersen.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

محاسبه شده برای آن‌ها بر اساس مرز جدید بزرگ‌تر از یک خواهد بود. بدین خاطر است که گفته می‌شود که این شاخص کارایی، سوپرکارایی را اندازه‌گیری می‌کند [۲۳].

سلطانی‌فر و حسین‌زاده لطفی [۲۴] درباره‌ی نقاط قوت و ضعف چند روش رتبه‌بندی بحث کردند و روش فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی رأی‌دهی را پیشنهاد کردند. وو[1] و همکاران [۲۵] روش‌های مختلف رتبه‌بندی با کارایی متقاطع را مورد بحث قرار دادند. دیگر مقالات جامعی که به بررسی روش‌های مورد استفاده برای رتبه‌بندی پرداخته‌اند، شامل ادلر[2] و همکاران [۲۶]، سینگ[3] و چاند[4] [۲۷]، یابلونسکی[5] [۲۸]، و حسین‌زاده لطفی و همکاران [۲۹] هستند.

به‌عنوان یک رویکرد مناسب رتبه‌بندی کامل برای DMUها، عزیزی [۳۰] رویکرد DEA با مرز دوگانه را پیشنهاد کرد. DEA با مرز دوگانه دو کارایی را برای تصمیم‌گیری در نظر می‌گیرد: یکی نسبت به مرز تولید کارا اندازه‌گیری می‌شود و بهترین کارایی نسبی یا کارایی خوشبینانه نامیده می‌شود، و دیگری نسبت به مرز تولید ناکارا سنجیده می‌شود و بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه نامیده می‌شود. با ادغام دو کارایی نسبی، عزیزی [۳۰] یک اندازه‌ی عملکرد کلی را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد کرد که قادر به رتبه‌بندی DMUها بود. همچنین، عزیزی و همکاران [۳۱] با استفاده از رویکرد DEA با مرز دوگانه، یک اندازه برای رتبه‌بندی فناوری‌های پیشرفته‌ی تولید پیشنهاد کردند. اندازه‌ی پیشنهادی آن‌ها نسبت به سایر روش‌های DEA، رتبه‌بندی قابل قبولی ارایه می‌داد.

آقایی و همکاران [۳۲] یک مدل DEA برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد کردند که مبتنی بر ابرصفحه‌ی DMUی ایده‌آل (IDMU) است. آن‌ها ادعا کرده‌اند که رویکرد مؤثری جهت رتبه‌بندی DMUها در DEA ارایه داده‌اند که عملکردی بهتر از رویکردهای دیگر رتبه‌بندی در DEA دارد، و تصمیم‌گیری بهتری برای رتبه‌بندی DMUها انجام می‌دهد. این مقاله نقاط ضعف مدل پیشنهادی و بی‌اعتباری ادعای فوق را نشان می‌دهد. در این مقاله، نشان می‌دهیم: (I) مدل پیشنهادی آن‌ها برای برخی مجموعه داده‌ها همواره نشدنی است، (II) نتایج حاصل از رتبه‌بندی برای برخی مجموعه داده‌ها اشتباه است.

در این مقاله رویکرد تحلیل مرز دوگانه را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد می‌کنیم. در رویکرد مرز دوگانه دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه به‌صورت یک کارایی میانگین توانی با هم ادغام می‌شوند، که در اینجا کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه هر کدام با وزن‌های مختلفی اندازه‌گیری می‌شوند. کارایی میانگین توانی را می‌توان به‌عنوان یک اندازه‌ی عملکرد کلی هر DMU تلقی کرد. بر خلاف سایر رویکردها که فقط برای رتبه‌بندی هستند و یک اندازه‌ی عملکرد به شمار نمی‌روند، کارایی میانگین توانی هم یک اندازه‌ی عملکرد است و هم یک شاخص رتبه‌بندی.

[1] Wu.
[2] Adler.
[3] Singh.
[4] Chand.
[5] Jablonsky.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

ادامه‌ی این مقاله به‌صورت زیر تقسیم‌بندی شده است. در قسمت ۲، مدل‌های اساسی DEAی خوشبینانه و بدبینانه و رویکرد آقایی و همکاران [۳۲] برای رتبه‌بندی DMUها را ارایه می‌کنیم. در قسمت ۳، با استفاده از رویکرد تحلیل مرز دوگانه، کارایی میانگین توانی را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد می‌کنیم. در قسمت ۴، یک مثال کاربردی برای کارایی میانگین توانی ارایه می‌دهیم، تا کاربردهای بالقوه‌ی آن برای اندازه‌گیری عملکرد مشخص شود. قسمت ۵ نتیجه‌گیری مقاله را ارایه می‌کند.

۲ مدل‌های اساسی DEAی خوشبینانه و بدبینانه و رویکرد آقایی و همکاران برای رتبه‌بندی DMUها

۲-۱ کارایی خوشبینانه— بهترین کارایی نسبی

فرض کنید n DMU را می‌خواهیم ارزیابی کنیم که هر کدام m ورودی و s خروجی دارند. نمادهای x_{ij} $(i=1,\dots,m)$ و y_{rj} ($r=1,\dots,s$) نشان دهنده‌ی مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها DMU_j ($j=1,\dots,n$) هستند که معلوم و مثبت هستند. برای تعیین کارایی DMU_j ($j=1,\dots,n$) نسبت به DMUهای دیگر، چارنز[1] و همکاران [۱] مدل CCR مشهور زیر را ابداع کردند که بهترین کارایی نسبی DMUها را اندازه‌گیری می‌کند:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}}\\
\text{s.t.} \quad & \theta_j=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}}\le 1, \quad j=1,\dots,n,\\
& u_r, v_i\ge\varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m,
\end{aligned} \tag{1}
$$

که در اینجا اندیس پایین « o» نشان دهنده‌ی DMUی مورد ارزیابی، u_r ($r=1,\dots,s$) و v_i ($i=1,\dots,m$) متغیرهای تصمیم، و ε بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی است. با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر[2] [۳۳]، مدل برنامه‌ریزی کسری (۱) را می‌توان به مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) معادل زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \theta_o=\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}\le 0, \quad j=1,\dots,n,\\
& \sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}=1,\\
& u_r, v_i\ge\varepsilon, \quad r=1,\dots,s; \quad i=1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{2}
$$

در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\theta_o^*=1$ باشد، آنگاه گفته می‌شود که DMU_o کارای DEA یا کارای خوشبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرکارای خوشبینانه است. برای n DMUی مختلف، جمعاً n مدل LP را باید حل کرد. بر این اساس، n مجموعه‌ی وزن‌ها وجود دارند که مبنای محاسبه‌ی ماتریس کارایی متقاطع هستند [۲۰-۱۵].

[1] Charnes.
[2] Cooper.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

۲-۲ کارایی بدبینانه— بدترین کارایی نسبی

کارایی یک اندازه‌ی نسبی است و آن را در محدوده‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. مدل CCR کارایی خوشبینانه‌ی هر DMU را با ماکزیمم‌سازی در محدوده‌ی کمتر یا مساوی یک اندازه‌گیری می‌کند. در صورتی که کارایی یک DMU با مینیمم‌سازی در محدوده‌ی بزرگ‌تر یا مساوی یک محاسبه شود، به آن اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارایی نسبی می‌گویند [۳۶-۳۴]. کارایی بدبینانه‌ی DMU_o را می‌توان با مدل DEA بدبینانه‌ی زیر اندازه‌گیری کرد [۳۹-۳۷]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\ \text{s.t.} \quad & \psi_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{۳}$$

که باز می‌توان آن را به مدل LP معادل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{۴}$$

در صورتی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\psi_o^* = 1$ باشد، آنگاه گفته می‌شود که DMU_o ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرکارای خوشبینانه لزوماً به معنای ناکارای بدبینانه نیست. و به همین ترتیب، غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. بر خلاف مدل‌های CCR (۱) و (۲)، که می‌توان به آن‌ها مدل‌های خوشبینانه گفت، مدل‌های بدبینانه‌ی (۳) و (۴) در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر DMU هستند.

به نوشته‌ی وانگ[۱] و همکاران [۳۶] کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه عملکرد n DMU را در دو حالت انتهایی اندازه‌گیری می‌کنند، که بهترین یا بدترین حالت هستند. از نظر تئوری، این دو کارایی را باید به طور همزمان در نظر گرفت، تا یک سنجش کلی از عملکرد هر یک از n DMU به دست آید. این چیزی است که به آن تحلیل مرز دوگانه می‌گویند. برای این منظور، وانگ و همکاران [۳۶] یک شاخص کارایی میانگین هندسی را پیشنهاد کردند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_j^{\text{Geometric}} = \sqrt{\theta_j^{\text{best}} \times \psi_j^{\text{worst}}}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{۵}$$

که تصور بر این است که عملکرد کلی DMU_j را اندازه‌گیری می‌کند. اولاً، $\theta_j^{\text{Geometric}}$ میانگین هندسی دو

---

[1] Wang.

کارایی است و لذا، درست مانند کارایی متقاطع متوسط، به معنای کارایی است. ثانیاً، $\theta_j^{\text{Geometric}}$ تلفیق کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه است، و لذا از هر یک از آن‌ها جامع‌تر است. لازم به ذکر است که میانگین هندسی دو عدد همواره نمی‌تواند نتایج رضایت‌بخشی ارایه دهد. مثلاً فرض کنید x یک عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد ($x \geq ۱$)، برای زوج داده‌های $(۱/x, x)$ شاخص میانگین هندسی همواره برابر ۱ می‌باشد، روشن است که این می‌تواند یک نقطه‌ی ضعف میانگین هندسی در رتبه‌بندی DMUها در DEA باشد. در این مقاله، میانگین توانی را برای اندازه‌گیری عملکرد کلی n DMU مورد استفاده قرار خواهیم داد.

۲-۳ رویکرد پیشنهادی آقایی و همکاران برای رتبه‌بندی DMUها

آقایی و همکاران [۳۲] یک مدل DEA برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد کردند که مبتنی بر ابرصفحه‌ی DMUی ایده‌آل (IDMU) است. تعریف IDMU در ادامه ارایه شده است.

تعریف ۱: IDMU یک DMUی مجازی است که می‌تواند از کمترین ورودی‌ها استفاده کند و بیشترین خروجی‌ها را تولید کند.

بر اساس تعریف ۱، ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را با $x_i^{\min}$ ($i = ۱,\ldots,m$) و $y_r^{\max}$ ($r = ۱,\ldots,s$) نشان می‌دهیم، که در اینجا $x_i^{\min}$ کمینه ورودی i، و $y_r^{\max}$ بیشینه‌ی خروجی r هستند. این‌ها با فرمول‌های زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\min} = \min_{\mathrm{j}}\{\mathrm{x}_{\mathrm{ij}}\} \quad \mathrm{i} = ۱,\ldots,\mathrm{m}, \\ & \mathrm{y}_{\mathrm{r}}^{\max} = \max_{\mathrm{j}}\{\mathrm{y}_{\mathrm{rj}}\} \quad \mathrm{r} = ۱,\ldots,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{۶}$$

گرچه IDMU یک DMUی مجازی است، ولی رفتار تولیدی آن باید مورد تعقیب همه‌ی DMUها باشد. آقایی و همکاران [۳۲] مدل MOLP زیر را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد کردند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \{s_۱, s_۲, \ldots, s_n\} \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{r=۱}^{s} u_r y_r^{\max} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_i^{\min} = ۰, \\ & \textstyle\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} + s_j = ۰, \quad j = ۱,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = ۱,\ldots,s; \quad i = ۱,\ldots,m. \end{aligned} \tag{۷}$$

آقایی و همکاران [۳۲] بیان کرده‌اند که مدل (۷) کمترین فاصله‌ی ابرصفحه‌ی متناظر هر DMU تا ابرصفحه‌ی IDMU را نشان می‌دهد و هر چه قدر s_j ($j = ۱,\ldots,n$) کمتر باشد DMU_j ($j = ۱,\ldots,n$) از رتبه‌ی بهتری برخوردار خواهد بود. آقایی و همکاران [۳۲] مدل LP زیر را جایگزین مدل (۷) کردند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{j=۱}^{n} s_j \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{r=۱}^{s} u_r y_r^{\max} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_i^{\min} = ۰, \\ & \textstyle\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} + s_j = ۰, \quad j = ۱,\ldots,n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = ۱,\ldots,s; \quad i = ۱,\ldots,m. \end{aligned} \tag{۸}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

۲-۳-۱ نشدنی بودن مدل‌های (۷) و (۸) برای برخی مجموعه داده‌ها

اگر مجموعه داده‌های DMUها طوری باشند که برای برخی از DMUها مقدار صفر در بعضی از ورودی‌های متفاوت وجود داشته باشد، در این صورت تمامی ورودی‌های IDMU برابر صفر خواهد بود و مدل‌های (۷) و (۸) نشدنی خواهند بود (به‌عنوان مثال، رک. مثال ۲). بنابراین، با توجه به تعریف IDMU برای محدودیت اول در مدل‌های (۷) و (۸) داریم:

$$\sum\nolimits_{r=1}^{s} u_r y_r^{\max} - \sum\nolimits_{i=1}^{m} v_i x_i^{\min} = 0 \rightarrow \sum\nolimits_{r=1}^{s} u_r y_r^{\max} = 0 \qquad (۹)$$

از آنجایی که ε عدد مثبتی می‌باشد، و مضارب هم محدود به ε هستند، بنابراین، مدل‌های (۷) و (۸) نشدنی می‌باشند و ادعای مؤلفان مبنی بر شدنی بودن مدل بی‌اساس می‌باشد.

دقت شود که در مدل‌های (۷) و (۸)، اگر مضارب را به نامنفی بودن محدود کنیم، در این صورت می‌بایستی تمامی مضارب صفر شوند، و در این حالت همه‌ی s_jها برابر صفر خواهند بود و مدل‌های (۷) و (۸) قادر به افتراق DMUها نخواهند بود.

۲-۳-۲ رتبه‌بندی نادرست مدل (۸) برای برخی مجموعه داده‌ها

با یک مثال نشان می‌دهیم که نتایج حاصل از رتبه‌بندی برای برخی مجموعه داده‌ها، اشتباه است. سه DMU از نظر یک ورودی و یک خروجی که داده‌های ورودی و خروجی آن‌ها در جدول ۱ نشان داده شده است، را در نظر بگیرید. IDMU نیز در سطر آخر جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱. مجموعه داده‌ها و رتبه‌بندی سه DMU.

DMU	ورودی	خروجی	رتبه
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
IDMU	۱	۳	–

مدل (۸) برای مجموعه داده‌های جدول ۱، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & s_1 + s_2 + s_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3u - v = 0, \\ & u - v + s_1 = 0, \\ & 2u - 2v + s_2 = 0, \\ & 3u - 3v + s_3 = 0, \\ & u, v \geq \varepsilon, \quad s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

یک جواب بهینه‌ی مدل (۱۰)، $\left(v^* = \varepsilon, u^* = \varepsilon/3, s_1^* = 2\varepsilon/3, s_2^* = 4\varepsilon/3, s_3^* = 2\varepsilon\right)$ می‌باشد. با توجه به جواب بهینه، رتبه‌بندی این سه DMU در ستون آخر جدول ۱ گزارش شده است. روشن است که این

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

رتبه‌بندی با تعریف غالب بودن در تناقض است.

۳ کارایی میانگین توانی— ادغام کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه

از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند. برای این منظور، کارایی‌های بدبینانه را باید تعدیل کرد. فرض کنید α ضریب تعدیل باشد ($1 > \alpha > 0$). آنگاه کارایی بدبینانه‌ی تعدیل شده را می‌توان به‌صورت $\tilde{\psi}_j^* = \alpha\psi_j^*$ ($j = 1,\ldots,n$) نوشت، که باید شرط $\tilde{\psi}_j^* = \alpha\psi_j^* < \theta_j^*$ ($j = 1,\ldots,n$) را تأمین کند. یعنی $\alpha < \min_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\theta_j^*/\psi_j^*\}$. بر این اساس، بازه‌ی کارایی مربوط به DMU_j ($j = 1,\ldots,n$) را می‌توان به‌صورت $[\alpha\psi_j^*, \theta_j^*]$ ($j = 1,\ldots,n$) بیان کرد. این مطلب شناخته شده است که برای مقایسه‌ی اعداد بازه‌ای غالباً باید نقطه‌ی وسط آن‌ها را با هم مقایسه کرد. نقطه‌ی وسط بازه‌های کارایی فوق با عبارت $(\alpha\psi_j^* + \theta_j^*)/2$ ($j = 1,\ldots,n$) به دست می‌آید. به خاطر وجود پارامتر α، رتبه‌بندی در میان n DMU تحت تأثیر مقدار α قرار می‌گیرد. برای حذف تأثیر α روی رتبه‌بندی DMUها و اجتناب از دشواری تعیین پارامتر α، ما میانگین توانی کارایی‌های به‌دست آمده از مدل‌های (۲) و (۴) را برای رتبه‌بندی DMUها پیشنهاد می‌کنیم.

فرض کنید $a_1,\ldots,a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $r \neq 0$. در این صورت

$$M_n^r(a_1,\ldots,a_n) = \left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{۱۱}$$

را میانگین توانی می‌نامند. برای رتبه‌بندی DMUها، می‌توان رابطه‌ی (۱۱) را به‌صورت زیر تغییر داد:

$$\phi_j = \sqrt[3]{\frac{\theta_j^{*3} + \psi_j^{*3}}{2}}, \quad j = 1,\ldots,n \tag{۱۲}$$

عموماً هر چه کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه بزرگ‌تر باشند، DMU بهتر ارزیابی می‌شود. بنابراین، با توجه به رابطه‌ی (۱۲) می‌توان از میانگین توانی به‌عنوان اندازه‌ی عملکرد کلی، برای رتبه‌بندی DMUها استفاده کرد. از آنجا که مقدار $1/\sqrt[3]{2}$ تأثیری در رتبه‌بندی DMUها ندارد، لذا شاخص زیر را به‌عنوان اندازه‌ی جدید عملکرد کلی هر DMU در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_j = \sqrt[3]{\theta_j^{*3} + \psi_j^{*3}}, \quad j = 1,\ldots,n \tag{۱۳}$$

ما φ_j ($j = 1,\ldots,n$) را کارایی میانگین توانی DMU_j ($j = 1,\ldots,n$) می‌نامیم. رابطه‌ی (۱۳)، عملکرد کلی DMU_j ($j = 1,\ldots,n$) را نشان می‌دهد. زیرا، رابطه‌ی (۱۳) تلفیق کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه است، و لذا از هر یک از آن‌ها جامع‌تر است.

٤ مثال کاربردی

در این قسمت، با یک مثال کاربردی نارسایی مدل DEAی آقایی و همکاران [۳۲] را نشان می‌دهیم و نقطه‌ی قوت رویکرد تحلیل مرز دوگانه در اندازه‌گیری عملکرد کلی هر DMU را نشان می‌دهیم. برای این مثال مقدار

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\varepsilon = ۱۰^{-۵}$ منظور شده است.

اکنون رویکرد تحلیل مرز دوگانه و مدل‌های آن را با اعمال بر داده‌های واقعی ۴۲ گروه آموزشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، به نمایش می‌گذاریم. این داده‌ها برای سنجش عملکرد داخلی توسط دانشگاه استفاده می‌شوند. متغیرهای ورودی شامل تعداد دانشجویان تخصصی ($x_۱$)، تعداد دانشجویان کارشناسی ($x_۲$)، و تعداد دانشجویان کارشناسی ارشد ($x_۳$) هستند. متغیرهای خروجی تعداد فارغ‌التحصیلان ($y_۱$)، تعداد بورسیه‌ها ($y_۲$)، تعداد محصولات پژوهشی ($y_۳$)، و سطح رضایت مدیران ($y_۴$) هستند. مجموعه داده‌ها از مقاله‌ی کوسمانن[1] و کاظمی متین [۴۰] گرفته شده است، و در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲. مجموعه داده‌های ورودی و خروجی برای ۴۲ گروه آموزشی.

DMU	ورودی‌ها			خروجی‌ها			
	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	$y_۴$
۱	۰	۲۶۱	۰	۲۲۵	۱	۱	۳
۲	۰	۱۷۰	۵۶	۲۱۳	۲	۰	۳
۳	۰	۲۸۱	۷۰	۳۲۶	۲	۰	۳
۴	۰	۱۳۸	۳۳	۱۵۹	۱	۰	۲
۵	۱۶۴	۰	۰	۵۲	۱	۰	۳
۶	۲۹۱	۸۱۵	۰	۱۰۱۴	۲	۲	۲
۷	۰	۰	۶۱	۵۰	۰	۰	۴
۸	۱۱۳	۹۵	۰	۷۳	۰	۰	۲
۹	۰	۷۲۷	۰	۶۷۵	۳	۰	۳
۱۰	۰	۷۷۳	۰	۶۹۷	۲	۰	۳
۱۱	۰	۰	۶۶	۴۶	۰	۰	۳
۱۲	۳۴۶	۱۹۷	۰	۱۳۲	۰	۰	۱
۱۳	۰	۹۸۸	۰	۸۱۲	۸	۱۰	۲
۱۴	۰	۰	۳۴	۳۲	۰	۰	۲
۱۵	۰	۷۹۵	۰	۶۰۱	۶	۲	۲
۱۶	۰	۶۷۲	۰	۵۹۱	۶	۱۲	۲
۱۷	۰	۱۶۶	۰	۱۶۶	۷	۰	۴
۱۸	۰	۷۶۱	۰	۷۶۱	۰	۳	۲
۱۹	۱۹۳	۱۲۴	۰	۲۹۳	۰	۰	۳
۲۰	۴۸۴	۰	۰	۳۶۱	۰	۰	۱
۲۱	۰	۵۱۷	۰	۴۳۴	۰	۴	۲
۲۲	۰	۵۸۴	۰	۴۹۲	۱	۴	۲
۲۳	۰	۶۸۲	۰	۵۶۵	۲	۳	۲
۲۴	۰	۵۶۵	۰	۴۲۳	۱	۲	۲
۲۵	۰	۶۰۳	۰	۴۳۳	۱	۳	۲

[1] Kuosmanen.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

۲۶	۰	۳۷۳	۰	۳۳۲	۱	۱	۱
۲۷	۰	۳۴۷	۰	۳۲۸	۲	۳	۳
۲۸	۰	۰	۷۰	۵۱	۰	۳	۴
۲۹	۰	۳۲۸	۰	۱۷۰	۰	۱	۳
۳۰	۰	۲۶۷	۰	۱۲۳	۰	۰	۳
۳۱	۲۶۲	۰	۰	۲۱۹	۳	۰	۳
۳۲	۰	۱۰۲۳	۰	۷۹۴	۲	۰	۴
۳۳	۳۶۶	۹۹۵	۰	۱۱۱۱	۲	۲	۳
۳۴	۰	۲۶۶	۱۵	۲۳۸	۳	۴	۳
۳۵	۱۷۲	۳۷۵	۰	۵۴۷	۴	۳	۳
۳۶	۰	۴۶۰	۰	۳۸۵	۴	۸	۳
۳۷	۲۲۳	۰	۵۳۵	۲۳۲	۱۴	۶	۴
۳۸	۰	۱۲۰۲	۵۸	۱۱۵۸	۱۲	۰	۳
۳۹	۰	۱۰۲۵	۶۱	۳۹۴	۴	۱	۳
۴۰	۰	۰	۶۹	۵۰	۰	۲	۴
۴۱	۳۱۴	۰	۰	۲۰۴	۰	۰	۱
۴۲	۳۷۱	۰	۰	۲۲۶	۰	۰	۱
IDMU	۰	۰	۰	۱۱۵۸	۱۴	۱۲	۴

با توجه به جدول ۲، مشخص است که هر سه ورودی IDMU صفر می‌باشند، در نتیجه مدل پیشنهادی آقایی و همکاران [۳۲] را نمی‌توان برای ارزیابی این ۴۲ گروه آموزشی به کار برد. برای اندازه‌گیری عملکرد کلی ۴۲ گروه آموزشی، ما از رویکرد تحلیل مرز دوگانه استفاده می‌کنیم.

زمانی که گروه‌های آموزشی با استفاده از مدل (۲) ارزیابی می‌شوند، ۱۲ گروه آموزشی یعنی DMUهای شماره‌ی ۵، ۷، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۸، ۳۱، ۳۵، ۳۶ و ۳۷ به‌عنوان کارای خوشبینانه شناسایی می‌شوند. همچنین، با استفاده از مدل (۴)، ۱۵ گروه آموزشی یعنی DMUهای شماره‌ی ۳، ۵، ۶، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۹، ۳۰، ۳۲، ۳۷، ۳۸ و ۳۹ به‌عنوان ناکارای بدبینانه شناسایی می‌شوند که در جدول ۳ گزارش شده‌اند. مدل (۲) نمی‌تواند بین DMUهای کارای خوشبینانه بیشتر افتراق دهد. تصمیم‌گیرنده از این نتیجه زیاد راضی نیست، چون تعداد زیادی از DMUها نمره‌ی کارایی کامل گرفته‌اند. مدل (۴) نیز نمی‌تواند بین DMUهای ناکارای بدبینانه بیشتر افتراق دهد.

مقادیر کارایی بدبینانه در ستون سوم جدول ۳ از دیدگاه بدبینانه اندازه‌گیری شده و کاملاً با مقادیر ستون دوم جدول ۳ متفاوت است. از ۱۲ DMU کارای خوشبینانه، تنها DMU_{19} بزرگ‌ترین کارایی بدبینانه را دارد، که مقدار آن ۳/۶۵۶ است، در حالی که کارایی بدبینانه‌ی دیگر DMUها همگی کمتر از آن را تجربه کرده‌اند. بنابراین DMU_{19} در بین DMUهای کارای خوشبینانه بهترین عملکرد را دارد. مثلاً DMU_{28} را در نظر بگیرید، که کارای خوشبینانه است و کارایی بدبینانه‌ی آن در جدول ۳ به میزان ۱/۰۴۵ گزارش شده است، و در بین DMUهای کارا، در رتبه‌ی نهم قرار می‌گیرد. این دو عدد هر دو منعکس کننده‌ی کارایی DMU_{28}، ولی

از دیدگاه‌های متفاوت، هستند. نمی‌توان هیچ‌یک از آن‌ها را درست یا غلط دانست، بلکه آن‌ها مکمل یکدیگر هستند. از هیچ‌کدام از آن‌ها نمی‌توان غفلت کرد. لذا اندازه‌گیری کارایی از دیدگاه بدبینانه ضروری است، ولی هنوز در مقالات توجه کمی نسبت به آن ابراز شده است.

برای سنجش بهتر عملکرد و رتبه‌بندی قابل اعتماد ۴۲ DMU، کارایی میانگین توانی برای ارزیابی عملکرد ۴۲ DMU مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار کارایی میانگین توانی هر DMU در ستون چهارم جدول ۳ درج شده است. از جدول ۳ روشن است که کارایی میانگین توانی، DMU_{19} را به‌عنوان بهترین DMU شناسایی می‌کند، و همه‌ی ۴۱ DMUی دیگر پس از آن در رتبه‌ی پایین‌تر قرار می‌گیرند و DMU_{12} بدترین عملکرد را دارد. ترتیب رتبه‌بندی کلی همه‌ی ۴۲ DMU در ستون آخر جدول ۳ ارایه شده است، که بر اساس آن می‌توان فهمید که همه‌ی ۴۲ DMU بر اساس عملکرد کلی خود افتراق داده شده و رتبه‌بندی شده‌اند. یک چنین نتیجه‌ی ارزیابی، از دیدگاه ما، واقع‌گرایانه‌تر و جامع‌تر از نتیجه‌گیری به دست آمده از مقادیر کارایی خوشبینانه مبتنی بر DEAی خوشبینانه در جدول ۳ است. این مزیت مهم رویکرد تحلیل مرز دوگانه نسبت به روش‌های دیگر DEA است.

جدول ۳. کارایی‌های خوشبینانه، بدبینانه و میانگین توانی و رتبه‌بندی ۴۲ گروه آموزشی.

DMU	کارایی خوشبینانه	کارایی بدبینانه	کارایی میانگین توانی	رتبه
۱	۰/۸۸۰	۱/۹۲۰	۱/۹۷۹	۸
۲	۰/۹۵۶	۱/۱۱۲	۱/۳۱۰	۱۵
۳	۰/۹۴۰	۱/۰۰۰	۱/۲۲۳	۲۴
۴	۰/۹۴۰	۱/۱۳۹	۱/۳۲۲	۱۳
۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۲۶۰	۲۰
۶	۰/۹۱۷	۱/۰۰۰	۱/۲۱۰	۲۷
۷	۱/۰۰۰	۱/۱۷۶	۱/۳۸۰	۱۱
۸	۰/۴۸۷	۱/۲۷۵	۱/۲۹۹	۱۶
۹	۰/۹۲۸	۱/۱۴۰	۱/۳۱۶	۱۴
۱۰	۰/۹۰۱	۱/۰۲۰	۱/۲۱۵	۲۵
۱۱	۰/۷۵۸	۱/۰۰۰	۱/۱۲۸	۳۷
۱۲	۰/۲۶۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۶	۴۲
۱۳	۰/۸۸۲	۱/۰۰۰	۱/۱۹۰	۳۲
۱۴	۱/۰۰۰	۱/۲۹۴	۱/۴۶۹	۹
۱۵	۰/۷۵۸	۱/۰۰۰	۱/۱۲۸	۳۷
۱۶	۱/۰۰۰	۱/۲۸۸	۱/۴۶۴	۱۰
۱۷	۱/۰۰۰	۲/۱۵۹	۲/۲۲۸	۶
۱۸	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۲۶۰	۲۰
۱۹	۱/۰۰۰	۳/۶۵۶	۳/۶۸۱	۱
۲۰	۰/۸۹۲	۱/۰۰۰	۱/۱۹۶	۳۰
۲۱	۰/۸۷۹	۱/۰۰۹	۱/۱۹۵	۳۱

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

۲۲	۰/۸۷۴	۱/۱۵۱	۱/۲۹۹	۱۶
۲۳	۰/۸۴۰	۱/۱۰۸	۱/۲۵۰	۲۳
۲۴	۰/۷۵۶	۱/۱۰۰	۱/۲۰۸	۲۸
۲۵	۰/۷۳۸	۱/۰۴۳	۱/۱۵۴	۳۵
۲۶	۰/۸۹۰	۱/۰۱۸	۱/۲۰۷	۲۹
۲۷	۰/۹۹۵	۲/۱۰۶	۲/۱۷۸	۷
۲۸	۱/۰۰۰	۱/۰۴۵	۱/۲۸۹	۱۸
۲۹	۰/۵۳۸	۱/۰۰۰	۱/۰۵۰	۳۹
۳۰	۰/۴۶۶	۱/۰۰۰	۱/۰۳۳	۴۰
۳۱	۱/۰۰۰	۲/۲۴۸	۲/۳۱۲	۴
۳۲	۰/۷۷۶	۱/۰۰۰	۱/۱۳۶	۳۶
۳۳	۰/۸۱۶	۱/۰۲۷	۱/۱۷۶	۳۴
۳۴	۰/۹۴۸	۲/۳۲۸	۲/۳۷۹	۳
۳۵	۱/۰۰۰	۲/۴۷۷	۲/۵۳۰	۲
۳۶	۱/۰۰۰	۲/۱۷۸	۲/۲۴۶	۵
۳۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۲۶۰	۲۰
۳۸	۰/۹۲۱	۱/۰۰۰	۱/۲۱۲	۲۶
۳۹	۰/۳۶۴	۱/۰۰۰	۱/۰۱۶	۴۱
۴۰	۰/۹۷۱	۱/۰۴۰	۱/۲۶۸	۱۹
۴۱	۰/۷۷۷	۱/۲۴۱	۱/۳۳۶	۱۲
۴۲	۰/۷۲۹	۱/۰۸۶	۱/۱۸۶	۳۳

این نکته نیز شایان توجه است که همیشه نمی‌توان همه‌ی واحدهای کارای خوشبینانه را بالاتر از واحدهای غیرکارای خوشبینانه رتبه‌بندی کرد. وقتی که کارایی بدبینانه در نظر گرفته می‌شود، برخی از واحدهای کارای خوشبینانه ممکن است نمره‌ی کارایی پایین‌تری نسبت به واحدهای غیرکارای خوشبینانه دریافت کنند. در این مثال، DMU_1، DMU_{27}، DMU_{34} و DMU_{41} غیرکارای خوشبینانه هستند ولی رتبه‌ی بهتری نسبت به سایر DMUهای کارای خوشبینانه دارند. این امر بر اساس تحقیقات قبلی صحیح است [۴۴-۴۱].

DMU_5، DMU_{18} و DMU_{37} هم روی مرز کارایی و هم روی مرز ناکارایی هستند؛ در واقع آن‌ها هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه هستند. به عبارت دیگر، دو مرز هم‌زمان از این سه واحد عبور می‌کنند. می‌توان آن را به این صورت تفسیر کرد: گرچه واحدهای کارای خوشبینانه عملکرد خوبی دارند، ولی برخی واحدهای کارای خوشبینانه عملکردی بدتر از سایرین دارند. به همین ترتیب، با آنکه انتظار داریم که واحدهای ناکارای بدبینانه عملکرد ضعیفی داشته باشند، ولی برخی واحدهای ناکارای بدبینانه بهتر از بقیه عمل می‌کنند. لذا اگر یک واحد هم کارای خوشبینانه و هم ناکارای بدبینانه باشد، معنایش این است که عملکرد آن نه بهترین است، و نه بدترین، مانند DMU_5، DMU_{18} و DMU_{37} در این مثال.

۵ نتیجه‌گیری

اندازه‌گیری کارایی روشی مهم و عملی برای مقایسه و رتبه‌بندی DMUها است. عدم توانایی افتراق یکی از معایب DEA است، که علاقه‌ی پژوهشی زیادی را در مقالات DEA موجب شده است. در این مقاله یک روش رتبه‌بندی پیشنهاد کردیم که مبتنی بر رویکرد تحلیل مرز دوگانه است. کارایی میانگین توانی پیشنهادی برای رتبه‌بندی DMUها استفاده شد. همچنین، به ایرادات مقاله‌ی آقایی و همکاران [۳۲] اشاره کردیم. نشان دادیم که مدل پیشنهادی آن‌ها برای رتبه‌بندی DMUها می‌تواند مشکل‌ساز باشد. مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت تا مشکلات و ضعف مدل آن‌ها را در افتراق میان DMUها نشان دهد.

سپاس‌گزاری

مؤلفان از نظرات و پیشنهادات سه بررسی‌کننده‌ی ناشناس در مورد نسخه‌ی قبلی این مقاله تشکر می‌کنند.

منابع

[۳۰] عزیزی، ح.، (۱۳۹۷). یک رویکرد جدید مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه برای رتبه‌بندی قواعد کشف شده از داده‌کاوی. پژوهش‌های نوین در ریاضی،۴، ۳۰–۱۷.

[۳۱] عزیزی، ح.، بهاری، ع.، جاهد، ر.، (۱۳۹۲). یک رویکرد جدید برای انتخاب فناوری‌های پیشرفته‌ی تولید: تحلیل پوششی داده‌ها با مرز دوگانه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰، ۱۱۷–۹۹.

[۳۲] آقایی، ن.، حسین‌زاده لطفی، ف.، غلامی، ک.، قلیچ بیگی، ز.، (۱۳۹۷). رتبه‌بندی و تحلیل حساسیت رتبه‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای ابرصفحه ایده‌آل. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن،۱۵، ۱۳۳–۱۲۵.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., (1978). Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429–444.

[2] Liu, W., Wang, Y.-M., (2018). Ranking DMUs by using the upper and lower bounds of the normalized efficiency in data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering, 125, 135–143.

[3] Roll, Y., Cook, W. D., (1991). Golany, B. Controlling factor weights in data envelopment analysis. IIE Transactions, 23, 2–9.

[4] Kao, C., Hung, H. T., (2005), Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach. Journal of the Operational Research Society, 56, 1196–1203.

[5] Roll, Y., Golany, B., (1993). Alternate methods of treating factor weights in DEA. Omega, 21, 99–109.

[6] Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., (1997). Thanassoulis, E. Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: evolution development and future directions. Annals of Operations Research, 73, 13–34.

[7] Angulo-Meza, L., Estellita Lins, M. P., (2002). Review of methods for increasing discrimination in data envelopment analysis. Annals of Operations Research, 116, 225–242.

[8] Joro, T., Viitala, E. J., (2004). Weight-restricted DEA in action: from expert opinions to mathematical models. Journal of the Operations Research Society, 55, 814–821.

[9] Sarrico, C. S., Dyson, R. G., (2004). Restricting virtual weights in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 159, 17–34.

[10] Podinovski, V. V., Thanassoulis, E., (2007). Improving discrimination in data envelopment analysis: some practical suggestions. Journal of Productivity Analysis, 28, 117–126.

[11] Khalili, M., Camanho, A. S., Portela, M. C. A. S., (2010). Alirezaee, M. R. The measurement of relative efficiency using data envelopment analysis with assurance regions that link inputs and outputs. European Journal of Operational Research, 203, 761–770.

[12] Podinovski, V. V., Bouzdine-Chameeva, T., (2013). Weight restrictions and free production in data

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

envelopment analysis. Operations Research, 61, 426–437.
[13] Førsund, F. R., (2013). Weight restrictions in DEA: misplaced emphasis? Journal of Productivity Analysis, 40, 271–283.
[14] Podinovski, V. V., (2016), Optimal weights in DEA models with weight restrictions. European Journal of Operational Research, 254(3), 916–924.
[15] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. Journal of the Operations Research Society, 45, 567–578.
[16] Doyle, J. R., Green, R. H., (1995). Cross-evaluation in DEA: Improving discrimination among DMUs. INFOR, 33, 205–222.
[17] Green, R. H., Doyle, J. R., Cook, W. D., (1996). Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. European Journal of Operational Research, 90, 461–472.
[18] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In R. H. Silkman (Ed.), Measuring efficiency: An assessment of data envelopment analysis. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
[19] Liu, H.-H., Song, Y.-Y., Yang, G.-L., (2019). Cross-efficiency evaluation in data envelopment analysis based on prospect theory. European Journal of Operational Research, 273(1), 364–375.
[20] Oukil, A., (2018). Ranking via composite weighting schemes under a DEA cross-evaluation Framework. Computers & Industrial Engineering, 117, 217–224.
[21] Rezaeiani, M. J., Foroughi, A. A., (2018). Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share. European Journal of Operational Research, 264(2), 665–674.
[22] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, 39, 1261–1264.
[23] Li, Y., Xie, J., Wang, M., Liang, L., (2016). Super efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. European Journal of Operational Research, 255(3), 884–892.
[24] Soltanifar, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., (2011). The voting analytic hierarchy process method for discriminating among efficient decision making units in data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering, 60, 585–592.
[25] Wu, J., Sun, J., Liang, L., (2012). Cross efficiency evaluation method based on weight-balanced data envelopment analysis. Computers & Industrial Engineering, 63, 513–519.
[26] Adler, N., Friedman, L., Sinuany-Stern, Z., (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. European Journal of Operational Research, 140, 249–265.
[27] Singh, O., Chand, S., (2007), Ranking of decision making units: a review and development of new model using data envelopment analysis approach. OPSEARCH, 44, 185–201.
[28] Jablonsky, J., (2012). Multicriteria approaches for ranking of efficient units in DEA models. Central European Journal of Operations Research, 20, 435–449.
[29] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Khodabakhshi, M., Rostamy-Malkhlifeh, M., Moghaddas, Z., Vaez-Ghasemi, M., (2013). A review of ranking models in data envelopment analysis. Journal of Applied Mathematics, 1–20.
[33] Charnes, A., Cooper, W. W., (1962). Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9(3-4), 181–186.
[34] Azizi, H., (2011). The interval efficiency based on the optimistic and pessimistic points of view. Applied Mathematical Modelling, 35(5), 2384–2393.
[35] Azizi, H., Wang, Y.-M., (2013). Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision-making units. Measurement, 46(3), 1325–1332.
[36] Wang, Y.-M., Chin, K.-S., Yang, J.-B., (2007). Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency. Journal of the Operational Research Society, 58(7), 929–937.
[37] Amirteimoori, A., (2007). DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier. Applied Mathematics and Computation, 186(1), 10–16.
[38] Azizi, H., (2014). DEA efficiency analysis: A DEA approach with double frontiers. International Journal of Systems Science, 45(11), 2289–2300.
[39] Wang, Y.-M., Yang, J.-B., (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. Journal of Computational and Applied Mathematics, 198(1), 253–267.
[40] Kuosmanen, T., Kazemi Matin, R., (2009). Theory of integer-valued data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 192, 658–667.
[41] Friedman, L., Sinuany-Stern, Z., (1997). Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context. European Journal of Operational Research, 100(3), 629–637.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]

[42] Sinuany-Stern, Z., Friedman, L., (1998). DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units. European Journal of Operational Research, 111(3), 470–478.
[43] Liu, F. H. F., Peng, H. H., (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weights. Computers & Operations Research, 35(5), 1624–1637.
[44] Wang, Y.-M., Luo, Y., Liang, L., (2009). Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis. Journal of Computational and Applied Mathematics, 223(1), 469–484.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.1.5.1]