مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره اول (پیاپی ۶۸)،بهار ۰۰، ص ص ۳۸-۲۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

حل مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

مصطفی داوطلب علیائی[۱]، فاطمه قندی[۲*]
۱-استادیار، دانشگاه کاشان، گروه ریاضی کاربردی، کاشان، ایران
۲-دانشجوی دکتری، دانشگاه کاشان، گروه ریاضی کاربردی، کاشان، ایران

رسید مقاله: ۱۳ آبان ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۵ مهر ۱۳۹۹

چکیده
در مسایل رایج کوتاه‌ترین مسیر، هر شاخه تنها دارای یک مولفه می‌باشد. اما در بسیاری از مسایل واقعی چندین مولفه هزینه و سود برای هر شاخه در نظر گرفته می‌شود. در چنین مواردی برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه به یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه برخواهیم خورد که می‌توان این مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه را به یک مساله تک هدفه تبدیل نمود. برای انجام این کار در راستای یافتن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه دو روش ارایه می‌نماییم. در روش اول از ارزیابی کارایی متقاطع به منظور یافتن امتیاز کارایی هر شاخه استفاده می‌کنیم. سپس با جایگذاری امتیاز کارایی متقاطع شاخه‌ها در تابع هدف مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه، آن را به یک مساله تک هدفه تبدیل می‌کنیم. تابع هدف مدل پیشنهادی به گونه‌ای طراحی شده که کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی را بین گره اول و آخر شبکه تعیین می‌کند. این مسیر را به عنوان کوتاه‌ترین مسیر کارا معرفی می‌نماییم. روش ما به‌دلیل استفاده از روش ارزیابی کارایی متقاطع، توانایی تمایز بیشترجهت تعیین بهترین مسیر بین دو گره خاص در شبکه را دارد. در روش دوم سعی بر آن داریم که کوتاه‌ترین مسیری با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه بیابیم که مورد قبول تمام شاخه‌ها باشد. برای این منظور با استفاده از تکنیک وزن مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها، بردار وزنی‌ای را می‌یابیم که به کمک آن قادر به تعیین کوتاه‌ترین مسیر پاراتو مورد قبول از نظر تمامی شاخه‌ها باشیم.

کلمات کلیدی: مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه، تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک، ارزیابی کارایی متقاطع.

۱ مقدمه
مساله کوتاه‌ترین مسیر برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین گره اول و آخر در یک شبکه داده شده به کار می‌رود. بسیاری از مسایل پیچیده را می‌توان با استفاده از مساله کوتاه‌ترین مسیر حل نمود. برای مثال [۳-۱] برای حل مسایل مسیریابی شبکه، مسیریابی وسیله نقلیه و برنامه‌ریزی مسیر از مساله کوتاه‌ترین مسیر استفاده نموده‌اند. برای

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: f.ghandi92@gmail.com

حل مساله کوتاه‌ترین مسیر[1] چندین الگوریتم مختلف ارایه گردیده است، به عنوان مثال می‌توان به الگوریتم دیجیسترا، الگوریتم برنامه‌ریزی پویای بلمن، الگوریتم بلمن- فورد، الگوریتم اکتشافی و الگوریتم ژنتیک [۶-۴] اشاره کرد. برای مطالعه بیشتر در زمینه مساله کوتاه‌ترین مسیر می‌توان به [۹-۷] مراجعه نمود.

در مسایل کوتاه‌ترین مسیر به طور معمول هر شاخه تنها دارای یک عنصر (به طور مثال هزینه یا مسافت) است. در حالی‌که در مسایل واقعی دو یا بیشتر از دو عنصر (هزینه سفر، میزان مسافت بین دو شهر، ایمنی جاده و غیره) برای هر شاخه ممکن است وجود داشته باشد. در این‌گونه موارد مساله به مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه[2] تبدیل می‌شود. مساله کوتاه‌ترین مسیر دو هدفه[3] نیز توسیعی از مساله کوتاه‌ترین مسیر است که به دسته مسایل کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه تعلق دارد. برای مطالعه بیشتر در مورد مساله کوتاه‌ترین مسیر دو هدفه و روش‌های حل آن می‌توان به [۱۶-۱۰] مراجعه نمود. همچنین [۱۸،۱۷] شامل مطالعه مروری در این زمینه می‌باشند.

برای حل مسایلی که در آن هر شاخه از شبکه دارای بیشتر از دو مولفه است، چندین الگوریتم و روش مختلف وجود دارد [۱۹،۲۰] که به عنوان مثال می‌توان از روش‌هایی همچون روش برچسب‌گذاری [۲۳-۲۱]، الگوریتم تقریبی [۲۶-۲۴]، الگوریتم ارزیابی[۲۹-۲۷]، روش دوگان لاگرانژی [۳۰] و غیره نام برد. برای مطالعه و مروری بر تئوری‌ها، الگوریتم‌ها و روش‌های موجود در مسایل کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه، می‌توان به [۳۳-۳۱] مراجعه نمود.

برای حل مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه می‌توان از تحلیل پوششی داده‌ها[4] (DEA) به منظور تبدیل مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه به یک مساله بهینه‌سازی تک هدفه استفاده نمود. DEA در ابتدا توسط چارنز و همکارانش [۳۴] معرفی گردید و سپس توسط بنکر و همکارانش [۳۵] توسیع داده شد. امیرتیموری [۳۶] با استفاده از مدل CCR در DEA کارایی مربوط به هر یک از شاخه‌ها در یک شبکه داده شده را محاسبه نمود و سپس با استفاده از یک مدل بهینه‌سازی تک هدفه، مسیر ماکزیمم کارایی را مشخص نمود. روش ارایه شده در [۳۶] دارای چند ضعف می‌باشد. اول آنکه در این روش هر شاخه فقط با شاخه‌هایی مقایسه می‌شود که یک گره مشترک با آن دارند. در حالی‌که در برخی از مسایل، منطقی‌تر این است که برای تخمین امتیاز کارایی شاخه‌ها، هر شاخه با تمامی شاخه‌های موجود در شبکه مقایسه گردد. دوم اینکه به دلیل انعطاف‌پذیری وزن‌ها در DEA روش پیشنهادی امیرتیموری ممکن است چند مسیر مختلف با ماکزیمم کارایی را به عنوان کوتاه‌ترین مسیر کارا معرفی کند. سوم آنکه مسیر تعیین شده در [۳۶] دارای ماکزیمم کارایی است، ولی ممکن است کوتاه‌ترین مسیر نباشد.

در این مقاله برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه، دو روش پیشنهاد می‌گردد. در روش اول با به کاربردن ارزیابی کارایی متقاطع[5] (که برای اولین بار توسط سکستون و همکارانش[۳۷] ارایه گردیده)، امتیاز کارایی را برای هر شاخه محاسبه می‌نماییم و با استفاده از آن مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه را

---

[1] Shortest path problem
[2] Multi-objective shortest path problem
[3] Bio-objective shortest path problem
[4] Data envelopment analysis
[5] Cross-efficiency evaluation

به مساله بهینه‌سازی تک هدفه تبدیل می‌کنیم. مسیری که توسط این تابع تک هدفه تعیین می‌گردد همان کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی است که آن را کوتاه‌ترین مسیر کارا می‌نامیم. استفاده از ارزیابی کارایی متقاطع باعث می‌شود که رتبه‌بندی شاخه‌ها یکتا باشد. بنابراین روش پیشنهادی قدرت تمایز بیشتری در تعیین شاخه‌های کارا و پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر کارا دارد. علاوه بر این، ویژگی دیگر این روش این است که به منظور محاسبه امتیاز کارایی، هر شاخه با تمام شاخه‌های موجود در شبکه مقایسه می‌گردد. در روش دوم با استفاده از مفهوم وزن مشترک در DEA، مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه را به یک مساله تک هدفه تبدیل می‌نماییم. به کمک مدل پیشنهادی، مسیر پاراتو کارایی که مورد قبول برای تمامی شاخه‌ها می‌باشد، مشخص می‌شود.

در بخش ۲ مرور مختصری بر DEA و روش ارزیابی کارایی متقاطع ارایه می‌گردد. در بخش ۳ به شرح مساله رایج کوتاه‌ترین مسیر می‌پردازیم. سپس روش‌های پیشنهادی برای مشخص کردن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی برای حل مساله کوتاه‌ترین مسیر چند هدفه را ارایه می‌دهیم. در بخش ۴ با ارایه یک مثال عددی به شرح بیشتر روش‌های مذکور و مزیت‌هایشان می‌پردازیم.

۲ مقدمه‌ای بر ارزیابی کارایی متقاطع و تکنیک وزن مشترک

۲-۱ مقدمه‌ای بر ارزیابی کارایی متقاطع

مجموعه‌ای از n واحد تصمیم گیرنده[1] (DMU) را در نظر بگیرید که هر یک شامل m ورودی و s خروجی است. i-اُمین ورودی و r-اُمین خروجی برای $DMU_j,\ j=1,\ldots,n$ به ترتیب به صورت $x_{ij}(i=1,\ldots,m)$ و $y_{rj}(r=1,\ldots,s)$ نشان داده می‌شوند. مدل CCR که توسط چارنز، کوپر و رودز ارایه گردید به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } E_{kk}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_{ik}x_{ik}}\\
&\text{s.t.}\quad E_{kj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_{ik}x_{ij}}\le 1,\ j=1,\ldots,n,\\
&\qquad v_{ik}\ge 0,\ i=1,\ldots,m,\\
&\qquad u_{rk}\ge 0,\ r=1,\ldots,s.
\end{aligned}\tag{1}$$

که در آن v_{ik} و u_{rk} به ترتیب i-اُمین وزن ورودی و r-اُمین وزن خروجی برای DMU_k هستند. مدل زیر فرم خطی مدل (۱) می‌باشد.

[1] Decision making unit

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } E_{kk}=\sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rk}\\
&\text{s.t.}\quad \sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_{ik}x_{ij}\le 0,\ j=1,\dots,n,\\
&\qquad v_{ik}\ge 0,\ i=1,\dots,m,\\
&\qquad u_{rk}\ge 0,\ r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

مدل (۲) برای مشخص کردن امتیاز کارایی DMUها، n بار اجرا می‌شود. هر DMU مجموعه $v_i(i=1,\dots,m)$ از وزن‌های ورودی و $u_r(r=1,\dots,s)$ از وزن‌های خروجی را برای ماکزیمم کردن امتیاز کارایی خود می‌پذیرد. امتیاز کارایی بین صفر و یک است. به طور کلی DMU_k کاراست اگر جواب بهینه مدل (۲) برابر یک شود، یعنی $e_k^*=1$ و در غیر این‌صورت ناکارا خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر در زمینه DEA می‌توان به [۳۸] مراجعه نمود.

کارایی متقاطع DMU_j وابسته به وزن‌هایی که توسط مدل (۲) برای DMU_k انتخاب می‌شود، به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$
E_{kj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u^*_{rk}y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v^*_{ik}x_{ik}}\le 1,\ k,j=1,\dots,n,
$$

که (*) بیانگر وزن‌های بهینه حاصل از مدل (۲) است. امتیاز کارایی متقاطع DMU_j به صورت میانگینی از $E_{kj}(k=1,\dots,n)$ تعریف می‌شود.

$$
\overline{E_j}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E_{kj}
$$

از آنجایی‌که مدل (۲) اغلب دارای جواب بهینه چندگانه است، بنابراین کارایی‌های متقاطع غیریکتا هستند. برای حل این مشکل دویل و گرین [۳۹] مدل خوشبینانه (بدبینانه) که به صورت زیر است را تعریف نمودند.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max(Min) } E_{kk}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_{rk}\left(\sum_{j=1,j\ne k}^{n}y_{rj}\right)}{\sum_{i=1}^{m}v_{ik}\left(\sum_{j=1,j\ne k}^{n}x_{ij}\right)}\\
&\text{s.t.}\qquad \sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rk}-E^*_{kk}\sum_{i=1}^{m}v_{ik}x_{ik}=0,\\
&\qquad\qquad \sum_{r=1}^{s}u_{rk}y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_{ik}x_{ij}\le 0,\ j=1,\dots,n,\ j\ne k,\\
&\qquad\qquad v_{ik}\ge 0,\ i=1,\dots,m\\
&\qquad\qquad u_{rk}\ge 0,\ r=1,\dots,s,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

که در آن E^*_{kk} جواب بهینه مدل (۲) برای DMU_k است. مدل (۴) فرم خطی مدل (۳) را نشان می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max(Min) } E_{kk} = \sum_{r=1}^{s} u_{rk} \Big(\sum_{j=1, j\neq k}^{n} y_{rj} \Big) \\
&\text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{m} v_{ik} \Big(\sum_{j=1, j\neq k}^{n} x_{ik} \Big) = 1, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rk} - E^{*}_{kk} \sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ik} = 0, \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{ik} x_{ij} \leq 0, \; j = 1, \ldots, n, \; j \neq k, \\
&\qquad v_{ik} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m, \\
&\qquad u_{rk} \geq 0, \; r = 1, \ldots, s.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

برای رفع مشکل غیریکتایی اندازه‌های کارایی متقاطع، تاکنون هدف‌های ثانویه متفاوتی ارایه شده است. به عنوان مثال لیانگ و همکارانش [۴۰] با معرفی اهداف ثانویه جدید با در نظر گرفتن ۱ به عنوان نقطه ایده‌آل برای هر واحد، مدل دویل و گرین را توسعه دادند. سپس ونگ و چاین [۴۱]، با توسیع مدل‌های لیانگ و همکارانش، مدل‌هایی ارایه نمودند که در آن‌ها نقطه ایده‌آل از ۱ به کارایی CCR تغییر کرد. [۴۲] با گسترش مدل‌های موجود در حوزه‌ی خروجی نامطلوب، چند مدل هدف ثانویه برای ارزیابی کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب ارایه نموده است. همچنین داوطلب علیائی [۴۳] اهداف ثانویه جدیدی بر اساس تعداد واحدهایی که به ماکسیمم میزان کارایی خود می‌رسند، ارایه داد. توجه شود از آنجایی که روش دویل و گرین روش معروف‌تری نسبت به سایر روش‌ها است، در این مقاله برای محاسبه امتیاز کارایی متقاطع شاخه‌ها از مدل (۴) استفاده می‌کنیم، اما این نکته قابل ذکر است که می‌توان هر روش موجود دیگری را برای محاسبه امتیازهای کارایی متقاطع شاخه‌ها به‌کار برد و در واقع روش پیشنهادی در این مقاله، قابل اجرا به کمک سایر مدل‌ها نیز می‌باشد.

دومین مشکل در روش ارزیابی کارایی متقاطع این است که بردار نمرات کارایی متقاطع تولیدشده برای DMUها، ممکن است پاراتو نباشد [۴۴]. برای رفع این مشکل نیز روش‌های گوناگونی پیشنهاد شده است. برای نمونه در دو مقاله [۴۶، ۴۵]. به کمک مفاهیمی از نظریه بازی ها با در نظر گرفتن DMU ها به عنوان بازیکن‌های مدل، برای رفع غیرپاراتو بودن کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیرنده، ارایه شده است. وو و همکارانش [۴۷] الگوریتمی ارایه دادند که با حل چند مدل، نمرات کارایی متقاطع همه DMU ها را بهبود می‌بخشد. اخیرا داوطلب علیائی و اصغریان [۴۸] با ارایه مثالی نشان دادند که الگوریتم وو و همکاران ممکن است در حالت کلی مجموعه‌ای از امتیازهای کارایی متقاطع پاراتو تولید نکند. سپس یک برنامه چندهدفه برای تولید تمامی امتیازهای کارایی متقاطع پاراتو پیشنهاد دادند. آن‌ها در ادامه یک مدل خطی ارایه دادند که با تولید وزن مشترکی از DMU ها، قادر خواهد بود یک بردار از امتیازهای کارایی متقاطع از واحدها را به‌دست آورد.

۲-۲ مقدمه‌ای بر تکنیک وزن مشترک

ایده مجموعه وزن‌های مشترک برای اولین بار توسط کوک و همکاران [۴۹] مطرح و سپس توسط رول و همکاران [۵۰] تکمیل شد. به طور خلاصه، هدف از این تحقیقات ارایه‌ی الگوهایی است که از طریق آن‌ها تنها یک وزن برای هر یک از شاخص‌های ورودی و خروجی به‌دست آید و نسبت به محاسبه و مقایسه کارایی واحدها بر مبنایی مشترک اقدام شود. به این ترتیب که ابتدا واحدهای کارا و ناکارا طبقه‌بندی می‌شوند، سپس به کمک یک مدل مبتنی بر DEA، مجموعه مشترکی از وزن‌ها برای واحدهای کارا به دست می‌آید. به کمک این وزن‌های مشترک برای هر واحد تصمیم‌گیری یک اندازه تعریف می‌شود که بزرگی این اندازه معیاری برای رتبه‌بندی خواهد بود. تحقیق در خصوص موضوع وزن‌های مشترک در سال‌های اخیر توجه بسیاری را جلب کرده و الگوهای گوناگونی با رویکردهای مختلف در این زمینه ارایه شده است. برای مثال، جهانشاهلو و همکاران[۵۱] روشی ارایه دادند که با حل تنها یک الگو، مجموعه وزن‌های مشترک واحدها محاسبه گردد و در نهایت با حل یک الگوی دومرحله‌ای واحدهای کارا رتبه‌بندی می‌شوند. سپس روش کامل‌تری توسط ساعتی و همکاران [۵۲] ارایه شد که با استفاده از این روش، مقدار میانگین بین کران‌ها محاسبه می‌شود. همچنین ماکوئی و همکاران [۵۳] با ذکر این نکته که تحلیل پوششی داده‌ها به واحدهای تصمیم‌گیری امکان اختیار بهترین وزن‌ها برای محاسبه مقادیر کارایی را می‌دهد، برای حل این مساله یک الگوی برنامه‌ریزی با اهداف چندگانه خطی پیشنهاد داده‌اند. امیرتیموری و همکاران [۵۴] ابتدا یک بردار وزنی مشترک برای کلیه واحدهای تصمیم‌گیرنده به دست می‌آورند و با استفاده از این وزن‌های مشترک یک اندازه کارایی جدید برای واحدها تعریف و با این اندازه کارایی واحدها رتبه‌بندی می‌شوند. ساعتی و همکاران [۵۵] به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا چند روش ساده جهت تعیین مجموعه مشترک وزن‌ها ارایه داده‌اند. در این روش‌ها، مجموعه مشترک وزن‌ها با استفاده از نتایج مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها حاصل می‌شود. بر خلاف بسیاری از روش‌ها، بدون حذف و گرد کردن وزن‌ها و دخالت دادن تمام وزن‌ها در محاسبات، مجموعه مشترک وزن‌ها تعیین می‌شود. لیو و پنگ [۵۶] به منظور به‌دست آوردن مجموعه وزن مشترک، مدلی ارایه کردند که با تعیین فاصله از خط الگو، واحدها را از یکدیگر متمایز می‌کند. مدل پیشنهادی آن‌ها به شرح زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \sum_{j\in E}(\Delta_j^o+\Delta_j^I)\\
\text{s.t.}\quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj}u_r+\Delta_j^o}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_i-\Delta_j^I}=1,\quad j\in E,\\
& \Delta_j^o\ge 0,\quad j\in E,\\
& \Delta_j^I\ge 0,\quad j\in E,\\
& v_i\ge \varepsilon>0,\quad i=1,\dots,m,\\
& u_r\ge \varepsilon>0,\quad r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

که در آن Δ_j^o و Δ_j^I به ترتیب فاصله مجازی عمودی و افقی تا خط الگو هستند. همچنین E بیانگر مجموعه همه واحدهای کارای قوی می‌باشد. مدل فوق را با در نظر گرفتن $\Delta_j = \Delta_j^I + \Delta_j^o$ می‌توان به صورت خطی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \Delta^* = \sum_{j\in E} \Delta_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{s} y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_i + \Delta_j = 0, \quad j \in E, \\ &\qquad v_i \ge \varepsilon > 0, \ i = 1,\dots,m, \\ &\qquad u_r \ge \varepsilon > 0, \ r = 1,\dots,s. \end{aligned} \tag{۶}$$

در این مقاله برای ارایه یک روش به منظور یافتن کوتاه‌ترین مسیر با بیشترین کارایی به کمک تکنیک وزن مشترک، از روش لیو و پنگ استفاده می‌نماییم. می‌توان از سایر مدل‌های ارایه شده در زمینه وزن مشترک نیز کمک گرفت.

۳ مقدمه‌ای بر مساله کوتاه‌ترین مسیر

۳-۱ مساله کوتاه‌ترین مسیر

شبکه $G = (N, A, c)$ را در نظر بگیرید که در آن N مجموعه تمام n گره موجود در شبکه، مجموعه A شامل p شاخه (i, j) موجود بین گره‌های شبکه است که گره i را به گره j متصل می‌کند و تابع $c: A \to R$ به هر شاخه (i,j) مقدار c_{ij} را نظیر می‌کند. c_{ij} می‌تواند بیانگر طول مسیر (i, j) باشد و یا هزینه سفر بین گره i و j را نشان دهد. فرض کنید بین گره اول و آخر در یک شبکه چندین مسیر مختلف وجود دارد، هزینه هر مسیر با جمع هزینه‌های شاخه‌هایی که به این مسیر تعلق دارند محاسبه می‌شود. می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر با کم‌ترین هزینه را $\sum_{(i,j)\in A} e_{ij} Z_{ij}$ بین دو گره دلخواه در شبکه به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا برای هر شاخه متغیر Z_{ij} را تعریف می‌کنیم. متغیر Z_{ij} نشان می‌دهد که شاخه (i, j) در مسیر وجود دارد و یا خیر. یعنی اگر $Z_{ij} = 1$، شاخه (i, j) در مسیر وجود دارد و اگر $Z_{ij} = 0$ این شاخه در مسیر نخواهد بود. مدل ریاضی مساله کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ تا n به صورت زیر بیان می گردد.

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{t} v_l c_{ij}^l - \sum_{r=1}^{s} u_r d_{ij}^r\Big) z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (f_{ij}) z_{ij} \\ &\text{s.t.} \sum_{\{j|(i,j)\in A\}} z_{ij} - \sum_{\{k|(k,i)\in A\}} z_{ki} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \notin \{1, n\} \\ -1, & i = n \end{cases} \\ &\qquad z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A. \end{aligned} \tag{۷}$$

۳-۲ مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه

در بسیاری از مسایل واقعی ممکن است برای هر شاخه در یک شبکه چندین ورودی و خروجی وجود داشته باشد. در این‌گونه موارد، مدل (۷) باید به یک مساله چندهدفه تبدیل شود. بدین منظور هر شاخه (i, j) را به عنوان یک DMU در نظر می‌گیریم که دارای t مولفه هزینه (ورودی) و s مولفه سود (خروجی) است، که به ترتیب با $(c^{1}_{ij},...,c^{t}_{ij})$ و $(d^{1}_{ij},...,d^{s}_{ij})$ نشان داده می‌شوند. بنابراین هر شاخه دارای $t+s$ مولفه است. هدف یافتن کوتاه‌ترین مسیر با بیشترین سود و کمترین هزینه از بین گره اول تا گره آخر می‌باشد، به طوری‌که هر گره در این مسیر، فقط یک بار در نظر گرفته شوند. بنابراین باید مدل زیر را که دارای $t+s$ هدف است، برای پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه، حل نمود.

$$\begin{aligned}
&\underset{l,r}{\text{Min}}\ \ Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c^{l}_{ij}z_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}d^{r}_{ij}z_{ij}\\
&\text{s.t.}\sum_{\{j|(i,j)\in A\}}z_{ij}-\sum_{\{k|(k,i)\in A\}}z_{ki}=\begin{cases}1, & i=1\\ 0, & i\notin\{1,n\}\\ -1, & i=n\end{cases}\\
&\qquad z_{ij}\in\{0,1\},\ \ \forall(i,j)\in A.
\end{aligned}\tag{8}$$

در مدل (۸)، $1\le l\le t$ و $1\le r\le s$ است. در ادامه و در بخش بعدی روش‌هایی را برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه در بین گره‌های یک شبکه دلخواه ارایه می‌نماییم.

٤ حل مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه

در این بخش دو روش برای حل مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه با به‌کارگیری مفاهیمی از DEA مطرح می‌شود. در ابتدا روشی را پیشنهاد می‌کنیم که با استفاده از اندازه کارایی متقاطع، کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم میزان کارایی را به‌دست می‌آورد. سپس روشی دیگر با تکیه بر تکنیک وزن‌های مشترک جهت یافتن کوتاه‌ترین مسیر پاراتو کارا در یک شبکه دلخواه، از گره اول به گره آخر ارایه می‌نماییم.

٤-۱ یافتن کوتاه‌ترین مسیر با بیشترین کارایی به کمک کارایی متقاطع

برای مشخص کردن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی، از روش ارزیابی کارایی متقاطع استفاده می‌کنیم. برای محاسبه امتیاز کارایی متقاطع هر شاخه، مدل (۴) را به کار می‌بریم. فرض کنید $\overline{E^{*}_{ij}}$ امتیاز کارایی متقاطع مربوط به شاخه (i, j) باشد، مدل زیر کوتاه‌ترین مسیر کارا بین گره ۱ تا گره n را محاسبه می‌کند.

$$\text{Min } Z=\sum_{(i,j)\in A}\frac{z_{ij}}{E^{*}_{ij}}$$

$$\text{s.t.}\sum_{\{j|(i,j)\in A\}} z_{ij}-\sum_{\{k|(k,i)\in A\}} z_{ki}=\begin{cases}۱, & i=۱\\ ۰, & i\notin\{۱,n\}\\ -۱, & i=n\end{cases}$$

$$z_{ij}\in\{۰,۱\},\ \forall(i,j)\in A. \qquad (۹)$$

توجه شود که می‌توان از E^{*}_{ij} که همان کارایی خودارزیابی برای شاخه (i,j) است، به جای امتیاز کارایی کارایی متقاطع استفاده نمود. با استفاده از امتیازهای خودارزیابی، بسیاری از شاخه‌های شبکه به عنوان DMU های کارا مشخص می‌شوند و در نتیجه به طور دقیق قادر به تعیین شاخه‌های کارای شبکه نخواهیم بود. در چنین حالتی ممکن است چندین مسیر مختلف به عنوان مسیرهای کارا تعیین شوند.

از آنجایی که هدف روش پیشنهادی مینیمم نمودن $z=\sum_{(i,j)\in A}\frac{z_{ij}}{E^{*}_{ij}}$ است، مدل (۹) به دنبال پیداکردن جواب‌هایی با بیشترین $Z_{ij}=۰$ ممکن خواهد بود. بدین معنی که مدل (۹) مسیر بهینه‌ای که شامل کمترین شاخه ممکن باشد را به‌دست خواهد آورد. از طرف دیگر چون در تابع هدف، $\frac{۱}{E^{*}_{ij}}$ ضریب Z_{ij}ها هستند، مدل (۹) کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی ممکن را تعیین خواهد نمود. همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید، روش پیشنهادی در [۳۶] قادر به تعیین کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره داده شده نیست و تنها تمرکز آن بر یافتن مسیری با بیشترین میزان کارایی می‌باشد. این مشکل به این دلیل به وجود می‌آید که روش ارایه شده در [۳۶] به دنبال ماکزیمم نمودن $\sum_{(i,j)\in A} e_{ij}Z_{ij}$ است که در آن $Z_{ij}\in\{۰,۱\}$. بنابراین با استفاده از این روش جواب‌های بهینه با بیشترین $Z_{ij}=۱$ تولید می‌گردد. به همین دلیل، مسیر تعیین شده توسط [۳۶] لزوما کوتاه‌ترین مسیر نمی‌باشد.

لازم به‌ذکر است که در محاسبه کارایی متقاطع هر شاخه بازده به مقیاس ثابت در نظر گرفته شده است. این بدان خاطر است که وقتی بازده به مقیاس متغیر است، مدل‌های محدودیت وزنی DEA معمولا به نتایج نامناسبی مانند امتیاز کارایی متقاطع منفی و یا نشدنی شدن مدل می‌رسد (در مقاله‌های [۵۷، ۵۸] در این مورد توضیح داده شده است). البته در صورت وجود اصل بازده به مقیاس متغیر، برای جلوگیری از بروز مشکلات مذکور، می‌توان از روش موجود در [۵۹] جهت محاسبه اندازه‌های کارایی متقاطع شاخه‌ها استفاده نمود.

٤-۲ یافتن کوتاه‌ترین مسیر کارا به کمک وزن مشترک

مدل (۹) که در(۴–۱) ارایه گردید، قادر است کوتاه‌ترین مسیر با بالاترین کارایی را مشخص کند. اما هیچ تمهیداتی مبنی بر آن‌که مدل (۹) حتما مسیر پاراتو کارا برای مساله کوتاه‌ترین مسیر توسیع‌یافته را به‌دست دهد، اندیشیده نشده است. به همین دلیل در این قسمت به کمک DEA و مفهوم وزن مشترک، روشی پیشنهاد می‌کنیم

که با استفاده از آن کوتاه‌ترین مسیر پاراتو کارا مشخص می‌گردد. همچنین در این روش کوتاه‌ترین مسیری با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه را طوری می‌یابیم که مورد قبول تمامی شاخه‌ها باشد.

به منظور یافتن جواب بهینه پاراتو از مدل (۸) می‌توان از تکنیک‌های اسکالریزیشن[1] استفاده نمود. همان‌طور که می‌دانیم، روش‌های اسکالریزیشن متفاوتی برای به‌دست آوردن جواب بهینه پاراتوی یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه موجود است. یکی از این روش‌ها، تکنیک مجموع وزن‌دار شده[2] می‌باشد که با ترکیب نمودن توابع هدف و در نظر گرفتن یک مجموع وزن‌دار شده از آن‌ها به عنوان تابع هدف، مساله تک هدفه جدیدی را ارایه می‌دهد. در اینجا به کمک این تکنیک، مدل (۸) را به مساله زیر که یک مساله تک هدفه است تبدیل نموده و با حل آن قادر خواهیم بود یک جواب پاراتوکارا برای مدل (۷) پیدا کنیم [۶۰]. در نتیجه با حل مدل زیر می‌توان کوتاه‌ترین مسیر پاراتو کارا برای شبکه را بیابیم.

$$\text{Min } Z=\sum_{l=۱}^{t} v_l\Big(\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} c_{ij}^{l} z_{ij}\Big)-\sum_{r=۱}^{s} u_r\Big(\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} d_{ij}^{r} z_{ij}\Big)$$

$$\text{s.t.} \sum_{\{j|(i,j)\in A\}} z_{ij}-\sum_{\{k|(k,i)\in A\}} z_{ki}=\begin{cases}۱, & i=۱\\ ۰, & i\notin\{۱,n\}\\ -۱, & i=n\end{cases}$$

$$z_{ij}\in\{۰,۱\},\ \forall (i,j)\in A. \qquad (۱۰)$$

مدل فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\text{Min } Z=\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n}\Big(\sum_{l=۱}^{t} v_l c_{ij}^{l}-\sum_{r=۱}^{s} u_r d_{ij}^{r}\Big) z_{ij}=\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n}(f_{ij}) z_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{\{j|(i,j)\in A\}} z_{ij}-\sum_{\{k|(k,i)\in A\}} z_{ki}=\begin{cases}۱, & i=۱\\ ۰, & i\notin\{۱,n\}\\ -۱, & i=n\end{cases}$$

$$z_{ij}\in\{۰,۱\},\ \forall (i,j)\in A. \qquad (۱۱)$$

در صورت وجود $u_r, v_l > ۰$ به عنوان جواب مساله (۱۱)، هر جواب شدنی از مدل (۱۱) یک جواب بهینه پاراتوی مدل (۸) خواهد بود. بنابراین با انتخاب وزن‌های مختلف در مدل (۱۱) می‌توان مسیرهای پاراتوی متفاوتی را به‌دست آورد. در حقیقت وزن‌های u_r و v_l بیانگر میزان درجه اهمیت مولفه‌های هر یک از مسیرها می‌باشند و اگر اطلاعاتی در مورد اهمیت هر یک از مولفه‌ها از منظر تصمیم‌گیرنده (مدیر) در دست باشد، می‌توان آن را در مدل وارد نمود. در غیراین‌صورت به منظور یافتن وزن‌های مورد قبول برای تمام شاخه‌های شبکه، هر شاخه (i, j) را به عنوان یک DMU در نظر می‌گیریم به طوری که ورودی و خروجی‌های آن، به ترتیب مولفه‌های هزینه و سود باشند. سپس با استفاده از تکنیک وزن مشترک در DEA، می‌توان بردار وزنی که مناسب و مورد قبول تمامی شاخه‌ها بوده و کارایی همه را ماکزیمم کند را محاسبه نماییم. در واقع به جای محاسبه بردار وزنی برای تک تک واحدها، از بردار وزنی ای که کارایی

[1] Scalarization techniques
[2] Sum weighted

تمامی شاخه‌ها را همزمان ماکزیمم کند، استفاده می‌شود. برای این کار با استفاده از مدل (۶)، مدل زیر را ارایه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} &\text{Min} \ \sum_{l=1}^{t} v_l C_l - \sum_{r=1}^{s} u_r D_r \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{l=1}^{t} v_l c_{ij}^{l} - \sum_{r=1}^{s} u_r d_{ij}^{r} \leq 0, \ i, \ j = 1, \dots, n, \\ &\qquad u_r \geq \varepsilon, \ r = 1, \dots, s, \\ &\qquad v_l \geq \varepsilon, \ l = 1, \dots, t. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در مدل (۱۲) تمام شاخه‌هایی که در مسیر قرار دارند به عنوان یک واحد گروهی در نظر گرفته می‌شوند و مولفه‌های این واحد گروهی از جمع مولفه‌های تک تک شاخه‌های عضو گروه محاسبه می‌گردد. به عبارت دیگر C_l جمع تک تک مولفه l- ام هزینه تمام شاخه‌ها است یعنی $C_l = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{l}$ و همچنین D_r جمع تک تک مولفه r- ام سود تمام شاخه‌ها است یعنی $D_r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{r}$. در واقع هدف مدل فوق ماکزیمم کردن کارایی واحد گروهی است به نحوی که هر یک از واحدها که در این گروه قرار دارند نتوانند کارایی بیشتر از یک کسب کنند. در نتیجه با حل مدل (۱۲)، بردار وزنی $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t)$ به گونه‌ای محاسبه می‌گردد که به کمک آن کارایی کل مسیر افزایش یابد.

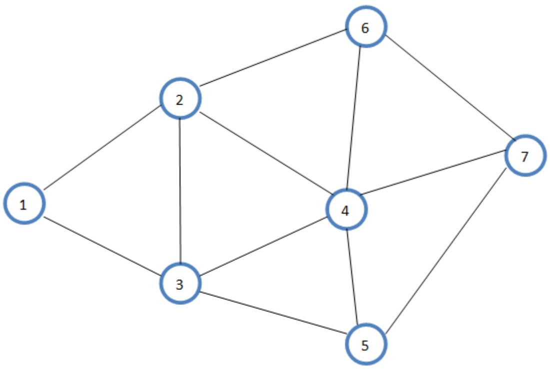
۵ مثال عددی

در این بخش با ارایه و حل دو مثال عددی، به تشریح مدل‌های پیشنهادی و بیان مزیت‌های آن‌ها می‌پردازیم.

مثال ۱. یک آژانس توریستی باید مسافران را از شهر ۱ به شهر ۷ ببرد. بین این دو شهر چندین مسیر مختلف وجود دارد. هر شهر را به عنوان یک گره و مسیر بین هریک از گره‌ها را به عنوان شاخه‌های شبکه در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینیم، در این شبکه ۱۲ شاخه موجود است که هریک دارای سه ورودی (x_1 فاصله بین دو شهر، x_2 هزینه حمل و نقل و x_3 هزینه بنزین) و دو خروجی (y_1 رضایت مسافر و y_2 ایمنی مسیر) هستند. مقدار بیمه تصادفات هر مسیر به عنوان ایمنی مسیر در نظر گرفته می‌شود. چون مقدار هر چه بیشتر بیمه تصادفات نشان‌دهنده آن است که مسیر دارای میزان ایمنی کمتری است. بنابراین معکوس مقدار بیمه به عنوان خروجی y_2 در نظر گرفته می‌شود. همچنین با طرح پرسشنامه‌ای می‌توان میزان رضایت از سفر توسط مسافران تعیین گردد. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این مثال در جدول ۱ آمده است. ستون‌های جدول ۲ نیز به ترتیب بیانگر مقادیر کارایی ارایه شده توسط [۳۶]، کارایی CCR، امتیازهای کارایی متقاطع و مقدار f_{ij}ها (ضرایب تابع هدف مدل (۱۰) به‌دست آمده با کمک تکنیک وزن مشترک) هستند.

جدول ۱. داده‌های مربوط به آژانس توریستی

j	مسیر	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
۱	۱ → ۲	۳۵۰	۳۹	۹	۰/۵۵۸	۰/۵۷۸
۲	۳ → ۴	۲۹۸	۲۶	۸	۰/۶۰۸	۰/۴۷
۳	۱ → ۳	۴۲۲	۳۱	۷	۰/۶۲۵	۰/۴۴۹
۴	۳ → ۵	۲۸۱	۱۶	۹	۰/۵۸۳	۰/۵۱۱
۵	۲ → ۴	۳۰۱	۱۶	۶	۰/۶۲۵	۰/۳۴۲
۶	۲ → ۳	۳۶۰	۲۹	۱۷	۰/۶۹۲	۰/۸۲۳
۷	۲ → ۶	۳۵۰	۱۲	۱۰	۰/۶۸۳	۰/۳۵۱
۸	۴ → ۶	۲۷۶	۳۳	۵	۰/۶۵	۰/۴۵۴
۹	۴ → ۷	۳۲۳	۲۵	۵	۰/۶۲۵	۰/۸۲۶
۱۰	۵ → ۷	۴۴۴	۶۴	۶	۰/۹۱۷	۰/۸۲۵
۱۱	۴ → ۵	۳۲۳	۲۵	۵	۰/۲۰۸	۰/۲۶۹
۱۲	۶ → ۷	۴۴۴	۶۴	۶	۰/۸۶۷	۰/۹۲۲



شکل ۱. مسیرهای بین شهری موجود میان ۷ شهر

با حل مدل (۹) داریم: $x^*_{12}=1$، $x^*_{24}=1$ و $x^*_{47}=1$ و به ازای هر i و j دیگر داریم $x^*_{ij}=0$.

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی به صورت زیر مشخص می‌گردد:

$$1 \to 2 \to 4 \to 7$$

حال روش دوم پیشنهادی را روی همین مثال اجرا می‌کنیم. با حل مدل (۱۲)، دقیقا همین جواب حاصل می‌گردد. در نتیجه مسیر به‌دست آمده از روش اول، علاوه بر آن‌که کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی می‌باشد، یک مسیر پاراتو کارا نیز هست. این بدان معناست که این مسیر کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم سود و مینیمم هزینه است که مورد قبول تمامی شاخه‌ها نیز می‌باشد.

از طرفی اگر از روش ارایه شده در [۳۶] برای حل مثال مذکور استفاده کنیم دو مسیر بهینه مختلف به صورت زیر تولید می‌شود.

$$1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7$$

$$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7$$

در اینجا دو نکته حایز اهمیت است. اول آنکه کارایی تعریف شده در [۳۶] برای شاخه‌ها، قادر نیست به صورت دقیق تمایزی بین شاخه‌ها قایل شود. همان‌طور که از ستون ۳ در جدول ۲ می‌بینیم، ۹ شاخه از ۱۲ شاخه موجود، به عنوان کارا معرفی شده‌اند.

جدول۲. نتایج مربوط به مثال۱

j	مسیر	e_{ij}	E_{ij}	$\overline{E_{ij}^{*}}$	f_{ij}
۱	۱ → ۲	۱	۰/۷۶	۰/۶۹۴۹	۰/۰۰۴۰
۲	۳ → ۴	۰/۹۷	۰/۹۲	۰/۸۶۴۳	۰/۰۰۳۳
۳	۱ → ۳	۱	۰/۷۵	۰/۶۷۰۵	۰/۰۰۴۶
۴	۳ → ۵	۱	۱	۰/۹۱۶۰	۰/۰۰۳۰
۵	۲ → ۴	۱	۱	۰/۹۱۲۷	۰/۰۰۳۲
۶	۲ → ۳	۱	۰/۹۶	۰/۸۳۵۰	۰/۰۰۴۰
۷	۲ → ۶	۰/۹۹	۱	۰/۸۳۶۹	۰/۰۰۳۷
۸	۴ → ۶	۱	۱	۰/۹۸۷۴	۰/۰۰۳۱
۹	۴ → ۷	۱	۱	۰/۹۹۰۶	۰/۰۰۳۵

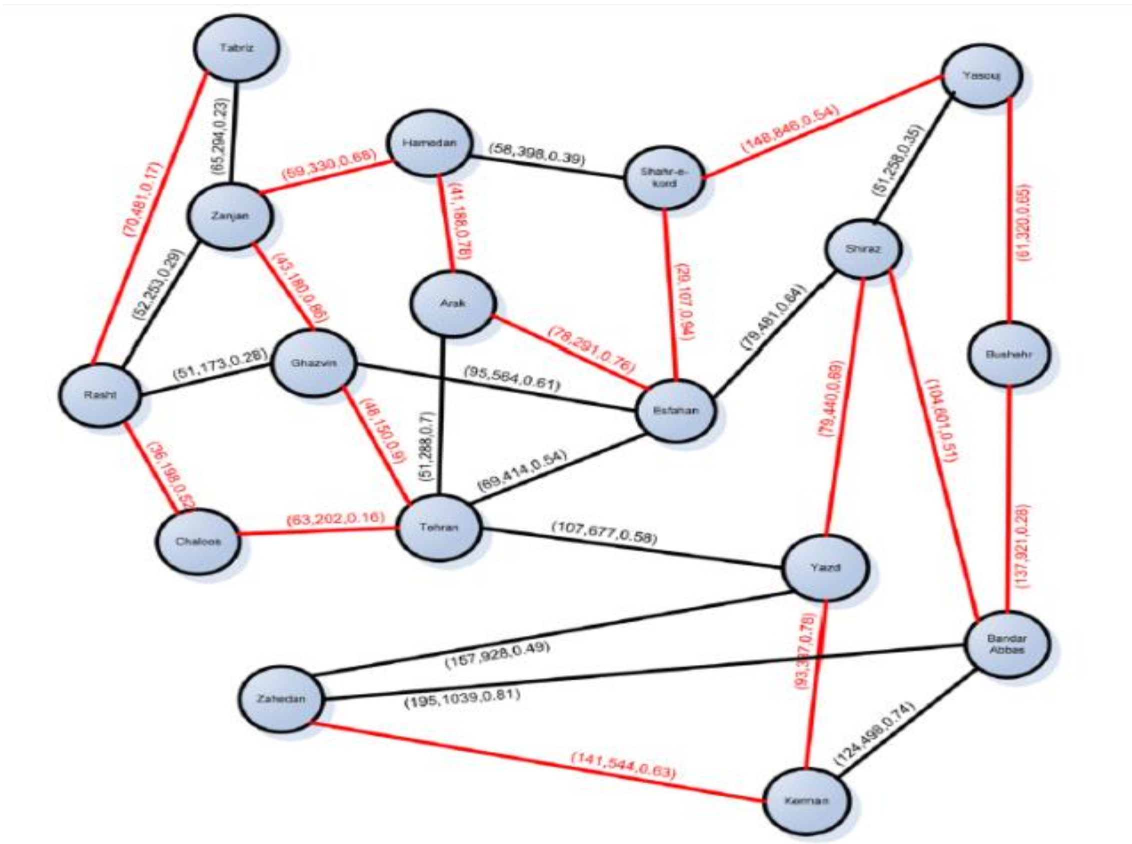
به همین علت است که با استفاده از روش پیشنهادی در [۳۶]، دو مسیر مختلف بین شهرهای ۱ تا ۷ به عنوان مسیر کارا معرفی گردیده است. نکته دوم آن‌که مسیرهای بهینه تولیدشده توسط [۳۶] هر دو دارای ۵ گره هستند. در حالی‌که مسیر بهینه معرفی‌شده توسط مدل (۹) شامل ۴ گره است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش ارایه شده در [۳۶] کوتاه‌ترین مسیر را معرفی نمی‌کند. در حقیقت تمرکز روش مذکور تنها بر روی یافتن یک مسیر با ماکزیمم کارایی است در حالی‌که یافتن کوتاه‌ترین مسیر با ماکزیمم کارایی بین گره‌ها منطقی‌تر است.
از طرفی در مدل (۹) می‌توان E_{ij}^{*} را جایگزین $\overline{E_{ij}^{*}}$ ها نمود. با این جایگزینی همان‌طور که در ستون ۵ از جدول ۲ می‌بینیم، ۷ شاخه از ۱۲ شاخه موجود کارا هستند و بنابراین مدل (۹) دو مسیر بهینه کارای مختلف به صورت زیر تولید می‌نماید.

$$۱ \to ۲ \to ۶ \to ۷$$

$$۱ \to ۲ \to ۴ \to ۷$$

این نتیجه بیانگر نقش موثر ارزیابی کارایی متقاطع در تولید کوتاه‌ترین مسیر کارای یکتا است.

مثال۲. مثالی که در [۳۶] آمده است را در نظر بگیرید. همان‌طور که از شکل ۲ پیدا است، شبکه‌ای با ۱۷ گره (شهر) و ۲۹ شاخه (مسیر) داریم. هدف پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر با بالاترین کارایی ممکن بین شهر تبریز تا زاهدان است. نتایج حاصل از حل این مثال به کمک روش ارایه شده در [۳۶] و دو روش پیشنهادی، در جدول ۳ آمده است. همان‌طور که در [۳۶] می‌توان مشاهده نمود، با حل این مثال مسیری به صورت زیر مشخص می‌گردد.



شکل ۲. مسیرهای موجود بین شهری تبریز–زاهدان

تبریز ← رشت ← چالوس ← تهران ← قزوین ← زنجان ← همدان ← اراک ← اصفهان ← شهرکرد ← یاسوج ← بوشهر ← بندرعباس ← شیراز ← یزد ← کرمان ← زاهدان.

با حل مدل (۹) برای این مثال و در واقع استفاده از روش اول پیشنهادی، مسیر حاصل به صورت زیر خواهد بود.

تبریز ← زنجان ← قزوین ← تهران ← یزد ← زاهدان.

مسیر مشخص‌شده به کمک روش دوم پیشنهادی با حل مدل (۱۲) به صورت زیر است.

تبریز ← زنجان ← قزوین ← تهران ← یزد ← کرمان ← زاهدان.

جدول ۳. نتایج مربوط به مثال ۲

مسیر	e_{ij}	$\overline{E_{ij}^{*}}$	f_{ij}
تبریز–رشت	۰/۰۷	۰/۰۷۱	۰/۰۰۵۳
تبریز–زنجان	۰/۱۱	۰/۱۰۷	۰/۰۰۳۲
زنجان–رشت	۰/۱۷	۰/۱۶۷۵	۰/۰۰۲۶
زنجان–همدان	۰/۳۶	۰/۳۴۲۳	۰/۰۰۲۹
زنجان–قزوین	۰/۶۲	۰/۶۰۹	۰/۰۰۱
قزوین–رشت	۰/۱۸	۰/۱۷۰۷	۰/۰۰۱۸

قزوین–اصفهان	۰/۲	۰/۱۸۹۸	۰/۰۰۵۷
قزوین–تهران	۰/۷۲	۰/۶۲۰۹	۰/۰۰۰۶
یزد–تهران	۰/۱۷	۰/۱۵۹۵	۰/۰۰۷
رشت–چالوس	۰/۴۵	۰/۴۲۹۵	۰.۰۰۱۶
چالوس–تهران	۰/۰۹	۰/۰۷۹۴	۰/۰۰۲۴
تهران–اراک	۰/۴۳	۰/۴۱۳۱	۰/۰۰۲۴
تهران–اصفهان	۰/۲۴	۰/۲۳۱۱	۰/۰۰۴
همدان–اراک	۰/۵۹	۰/۵۷۴۵	۰/۰۰۱۲
همدان–شهرکرد	۰/۲۱	۰/۱۹۶۷	۰/۰۰۴
اراک–اصفهان	۰/۳	۰/۳	۰/۰۰۲۶
اصفهان–شیراز	۰/۲۵	۰/۲۳۹	۰/۰۰۴۷
شیراز–یاسوج	۰/۲۱	۰/۲۰۵۵	۰/۰۰۲۶
شیراز–بندرعباس	۰/۱۵	۰/۱۴۵۲	۰/۰۰۶۳
شیراز–یزد	۰/۲۷	۰/۲۵۹۵	۰/۰۰۴۲
یزد–زاهدان	۰/۱	۰/۰۹۲۳	۰/۰۱۰۱
یزد–کرمان	۰/۲۶	۰/۲۵۵۵	۰/۰۰۳۷
کرمان–زاهدان	۰/۱۴	۰/۱۳۷۱	۰/۰۰۵۹
کرمان–بندرعباس	۰/۱۸	۰/۱۸۲۴	۰/۰۰۵۱
بندرعباس–بوشهر	۰/۰۶	۰/۰۵۹۹	۰/۰۱۰۲
بوشهر–یاسوج	۰/۳۳	۰/۳۱۸۱	۰/۰۰۲۹
یاسوج–شهرکرد	۰/۱۱	۰/۱۰۸۲	۰/۰۰۹۱
اصفهان–شهرکرد	۱	۰/۹۹۹۱	۰
بندرعباس–زاهدان	۰/۱۳	۰/۱۲۳۸	۰/۰۱۱۲

همان‌طور که از نتایج قابل مشاهده است، مسیر حاصل از روش ارایه شده [۳۶]، از ۱۵ شهر می‌گذرد، در حالی‌که مسیرهای به‌دست آمده از هر دو روش پیشنهادی، به ترتیب از ۴ و ۵ شهر می‌گذرند. بنابراین با استفاده از روش‌های پیشنهادی در این مقاله، مسیرهای کوتاه‌تری در مقایسه با روش ارایه شده در [۳۶] به‌دست می‌آید و در واقع این مثال بیانگر آن است که روش پیشنهادی [۳۶] قادر به پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر نیست و تنها تمرکز این روش بر روی پیدا کردن مسیری با ماکزیمم کارایی می‌باشد. در حالی‌که هدف اصلی پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر با بیشترین سود و کمترین هزینه بین دو شهر تبریز و زاهدان می‌باشد. از طرف دیگر همان‌طور که مشاهده می‌شود، مسیر حاصل از روش دوم در مقایسه با روش اول پیشنهادی، یک شهر بیشتر دارد. این بدان علت است که در روش دوم، برای انتخاب بهترین و کوتاه‌ترین مسیر ممکن، به تمامی شاخه‌ها اهمیت داده می‌شود.

۶ نتیجه‌گیری

در مسایل رایج مساله کوتاه‌ترین مسیر هر شاخه از شبکه تنها دارای یک مولفه می‌باشد. در صورتی که در بسیاری از مسایل واقعی چندین مولفه مختلف برای هر شاخه در نظر گرفته می‌شود. در این گونه موارد باید مساله کوتاه‌ترین مسیر به یک مساله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه توسیع داده شود. در این مقاله دو روش ارایه گردید، که در روش اول از ارزیابی کارایی متقاطع به منظور تعیین امتیاز هر شاخه استفاده می‌شود. در حقیقت با جایگذاری امتیاز کارایی متقاطع هر شاخه در تابع هدف، مسأله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه را به یک مساله بهینه‌سازی تک هدفه تبدیل می‌کنیم. با توجه به قدرت ارزیابی کارایی متقاطع، روش ما توانایی بیشتری در تعیین بهترین مسیر بین دو گره خاص در یک شبکه را دارد. به علاوه مدل مذکور، کوتاه‌ترین مسیر با بیشترین کارایی را بین دو گره در شبکه مشخص می‌کند. به منظور تعیین امتیاز شاخه‌ها با استفاده از روش ارزیابی کارایی متقاطع، هر شاخه با تمام شاخه‌های موجود در شبکه مقایسه می‌گردد. در روش دوم از تکنیک وزن مشترک به منظور یافتن بردار وزنی که مناسب تمامی شاخه‌ها باشد و کارایی همه را ماکزیمم کند، استفاده می‌نماییم و به کمک آن کوتاه‌ترین مسیر پاراتو کارای مطلوب را مشخص می‌کنیم. در پژوهش‌های آتی، می‌توان روش پیشنهادی را به طور مشابه در حل مسایل حمل و نقل[1] و یا هزینه جریان[2] شبکه نیز به کار برد.

منابع

[1] Chen, J., Lu, F. (2005). Implementation and evaluation of the shortest path labeling algorithms in transportation networks. Journal of Image and Graphics, 10 (9), 1134-1138.

[2] Van Mieghem, P., Kuipers, F. A. (2004). Concepts of exact QOS routing algorithms. IEEE/ACM Transactions on networking, 12 (5), 851-864.

[3] Gao, Q., Luo, J. Z. (2004). A tabu-search-based fast QOS multicast routing optimal algorithm. Journal of Software, 15 (12), 1877-1884.

[4] Bellman, R. (1958). On a routing problem, Quarterly of Applied Mathematics, 16 (1), 87-90.

[5] Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematic, 1, 269-271.

[6] Dreyfu, S. E. (1969). An appraisal of some shortest-path algorithms. Operations Research, 17, 395-412.

[7] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., Orlin, J. B. (1993). Network flows: theory, algorithms, and applications. New Jersey: Rentice-Hall.

[8] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D. (2011). Linear programming and network flows. John Wiley & Sons.

[9] Magzhan, K., Jani, H. M. (2013). A review and evaluations of shortest path algorithms. International Journal of Scientific & Technology Research, 2 (6), 99-104.

[10] Aneja, Y. P., Nair, K. P. (1979). Bicriteria transportation problem. Management Science, 25(1), 73-78.

[11] Climaco, J. C. N., Martins, E. Q. V. (1982). A bicriterion shortest path algorithm. European Journal of Operational Research, 11 (4), 399-404.

[12] Henig, M. I. (1986). The shortest path problem with two objective functions. European Journal of Operational Research, 25 (2), 281-291.

[13] Chin, S., Cheng, P. (1989). Bicriterion routing scheme for nuclear spent fuel transportation. Transportation Research Record, 1245, 60-64.

[1] Transportation
[2] Cost flow

[14] Current, J. R., Revelle, C. S., Cohon, J. L. (1990). An interactive approach to identify the best compromise solution for two objective shortest path problems. Computers & Operations Research, 17 (2), 187-198.

[15] Goldfarb, D., Jin, Z. (1999). An o (nm)-time network simplex algorithm for the shortest path problem. Operations Research, 47 (3), 445-448.

[16] Gen, M., Lin, L. (2004). Multi-objective genetic algorithm for solving network design problem. In 20th Fuzzy Systems Symposium, Kitakyushu, Japan.

[17] Skriver, A. J. (2000). A classification of bicriterion shortest path (bsp) algorithms. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 17 (2), 199-212.

[18] Raith, A., Ehrgott, M. (2009). A comparison of solution strategies for biobjective shortest path problems. Computers & Operations Research, 36 (4), 1299-1331.

[19] Coutinho-Rodrigues, J. M., Clımaco, J., Current, J. R. (1999). An interactive bi-objective shortest path approach: searching for unsupported nondominated solutions. Computers & Operations Research, 26 (8), 789-798.

[20] Granat, J., Guerriero, F. (2003). The interactive analysis of the multicriteria shortest path problem by the reference point method. European Journal of Operational Research, 151 (1), 103-118.

[21] Guerriero, F., Musmanno, R. (2001). Label correcting methods to solve multicriteria shortest path problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 111 (3), 589-613.

[22] Muller-Hannemann, M., Weihe, K. (2001). Pareto shortest paths is often feasible in practice. In International Workshop on Algorithm Engineering, pp. 185-197, Berlin: Springer.

[23] Gandibleux, X., Beugnies, F., Randriamasy, S. (2006). Martins' algorithm revisited for multi-objective shortest path problems with a max-min cost function. 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research, 4 (1), 47-59.

[24] Hansen, P. (1980). Bi-criterion path problems. In Multiple criteria decision making theory and application, pp. 109-127, Berlin: Springer.

[25] Warburton, A. (1987). Approximation of Pareto optima in multiple-objective, shortest path problems. Operations Research, 35 (1), 70-79.

[26] Tsaggouris, G., Zaroliagis, C. (2009). Multiobjective optimization: Improved FPTAS for shortest paths and non-linear objectives with applications. Theory of Computing Systems, 45 (1), 162-186.

[27] Zitzler, E., Thiele, L. (1999). Multi-objective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 3 (4), 257-271.

[28] Coello, C. A. (2000). An updated survey of GA-based multi-objective optimization techniques. ACM Computing Surveys (CSUR), 32 (2), 109-143.

[29] Deb, K. (2011). Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: an introduction. In Multi-objective evolutionary optimisation for product design and manufacturing, pp. 3-34, London: Springer.

[30] Safari, S., Zaferanieh, M., Abareshi, M., Rahimi, E. I. (2019). The Lagrangian relaxation method for the shortest path problem considering transportation plans and budgetary constraint. Journal of Operational Research and its Applications, 16 (2), 39-57.

[31] Ulungu, E., Teghem, J. (1991). Multi-objective shortest path problem: A survey. In Proceedings of the International Workshop on Multi-criteria Decision Making: Methods Algorithms Applications at Liblice, Czechoslovakia, pp. 176-188.

[32] Current, J., Marsh, M. (1993). Multi-objective transportation network design and routing problems: Taxonomy and annotation. European Journal of Operational Research, 65 (1), 4-19.

[33] Pangilinan, J. M. A., Janssens, G. K. (2007). Evolutionary algorithms for the multiobjective shortest path problem. World Academy of Science, Engineering and Technology, 25, 205-210.

[34] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 2 (6), 429-444.

[35] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30, 1078-1092.

[36] Amirteimoori, A. (2012). An extended shortest path problem: A data envelopment analysis. Applied Mathematics Letters, 25, 1839-1843.

[37] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. New Directions for Program Evaluation, 32, 73-105.

[38] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (2007). Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software (2th Ed.). Berlin: Springer.

[39] Doyle, J. R., Green, R. H. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses. Journal of the Operational Research Society, 45, 567-578.

[40] Liang, L., Wu, J., Cook, W. D., Zhu, J. (2008). Alternative secondary goals in DEA cross-efficiency evaluation. International Journal of Production Economics, 113 (2), 1025-1030.
[41] Wang, Y. M., Chin, K. S. (2010). Some alternative models for DEA cross-efficiency evaluation. International Journal of Production Economics, 128 (1), 332-338.
[42] Karimi, B., Khorram, E. (2016). Presenting a secondary goal to evaluate the cross efficiency DEA with undesirable output. Journal of Operational Research and its Applications, 13 (1), 85-95.
[43] Davtalab-Olyaie, M. (2019). A secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation: A “one home run is much better than two doubles” criterion. Journal of the Operational Research Society, 70 (5), 807-816.
[44] Wu, J., Sun, J., Zha, Y., Liang L. (2011). Ranking approach of cross-efficiency based on improved TOPSIS technique. Journal of Systems Engineering and Electronics, 22 (4), 604-608.
[45] Wu, J., Liang, L., Yang, F. (2009). Determination of weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. Expert Systems with Applications, 36 (1), 872-876.
[46] Liang, L., Wu, J., Cook, W.D., Zhu, J. (2008). The DEA Game Cross-Efficiency Model and Its Nash Equilibrium. Operations Research, 56 (5), 1278-1288.
[47] Wu, J., Chu, J., Sun, J., Zhu, Q. (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. European Journal of Operational Research, 248 (2), 571-579.
[48] Davtalab-Olyaie, M., Asgharian, M. (2021). On Pareto-optimality in the cross-efficiency evaluation. European Journal of Operational Research, 288 (1), 247-257.
[49] Cook, W. D., Roll, Y., Kazakov, A. (1990). A DEA model for measuring the relative efficiency of highway maintenance patrols. INFOR: Information Systems and Operational Research, 28 (2), 113-124.
[50] Roll, Y., Cook, W. D., Golany, B. (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis. IIE Transactions, 23 (1), 2-9.
[51] Jahanshahloo, G. R., Memariani, A., Lotfi, F. H., Rezai, H. Z. (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. Applied Mathematics and Computation, 166 (2), 265-281.
[52] Saati, S. (2008). Determining a common set of weights in DEA by solving a linear programming. Journal of Industrial Engineering, International, 4 (6), 51-56.
[53] Makuei, A., Alinezhad, A., KIANI, M. R., Zohrehbandian, M. (2008). A goal programming method for finding common weights in DEA with an improved discriminating power for efficiency. Journal of Industrial and Systems Engineering, 1 (4), 293-303.
[54] Amir Teymouri, A. R., Kordrostami, S., Masoumzadeh, A. (2010). Ranking of decision making units using a common set of weights. Journal of Operational Research and its Applications, 6 (23), 61-68.
[55] Saati, S., Shayesteh, A. R. (2012). Some methods to rank DMU by CSW in DEA. Journal of Operational Research and its Applications, 9 (1), 107-117.
[56] Lio, F. H. F., Peng, H. H. (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weight. Computers & Operations Research, 35 (5), 1624-1637.
[57] Allen, R. (1997). Incorporating value judgments in data envelopment analysis (Doctoral dissertation, University of Warwick).
[58] Lins, M. E., Da Silva, A. M., Lovell, C. K. (2007). Avoiding infeasibility in DEA models with weight restrictions. European Journal of Operational Research, 181 (2), 956-966.
[59] Thanassoulis, E., Kortelainen, M., Allen, R. (2012). Improving envelopment in data envelopment analysis under variable returns to scale. European Journal of Operational Research, 218 (1), 175-185.
[60] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria optimization. Berlin: Springer-Verlag.