مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره اول (پیاپی ۶۴)، بهار ۹۹، ص ص ۱۵۵-۱۳۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر

قربانعلی رمضان‌نیا کشتلی[1*]، سید هادی ناصری [2]
۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، مازندران، ایران

رسید مقاله: ۱۷ اسفند ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۲۵ شهریور ۱۳۹۷

چکیده
برنامه‌ریزی آرمانی خطی یکی از تکنیک‌های مهم برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌باشد که برای هر هدف (آرمان) یک سطح آرزو توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود. در برنامه‌ریزی آرمانی اگر چند سطح آرزوی گسسته، برای آرمان‌ها درنظر گرفته شود، بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مطرح می‌شود که اولین بار توسط چانگ در سال (۲۰۰۷) ارایه شد. چانگ در سال (۲۰۰۸) نوعی دیگر از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به نام برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده که سطح آرزوی آرمان‌های آن، یک بازه بسته می‌باشد را مطرح نمود که ممکن است ابتدای بازه یا انتهای بازه از اهمیت خاصی برخوردار باشند. اولین مقاله چندانتخابی فازی باسطح آرزوی فازی مثلثی توسط بانکیان و همکاران در سال (۲۰۱۲) ارایه شد. در این مقاله مدل‌هایی جدید ازمسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده (برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با قیود فازی انعطاف‌پذیرو برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای حل آن‌ها با استفاده از روش α- برش و در نظر گرفتن حداقل درجه عضویت‌های متفاوت برای آرمان‌ها یا قیدهای فازی انعطاف‌پذیر، آن‌ها را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌کنیم. برای درک بیشتر مثال‌هایی عددی مطرح می‌کنیم و با روش‌های فوق آن‌ها را حل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی چندهدفه خطی، برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر.

۱ مقدمه
در ادبیات موضوع، ملاحظه می‌شود چنانچه پاره‌ای از فعالیت‌ها منوط به بهره‌گیری مشارکتی از منابع محدود باشند مطالعه تخصیص منابع و در نتیجه تعیین حجم فعالیت‌ها مطرح می‌شود. این مسایل را می‌توان با برنامه‌ریزی ریاضی مدل‌بندی کرد. اگر در مدل ریاضی مربوطه تمام روابط ریاضی از نوع توابع خطی باشند برنامه‌ریزی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Ramzannia52@yahoo.com

مربوطه را یک برنامه‌ریزی خطی گویند. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی عمدتا دارای چارچوبی هستند که در آن‌ها اهداف موردنظر در قالب یک هدف عمده مثلا حداکثرکردن سود یا حداقل‌کردن کل هزینه‌ها خلاصه می‌شود. با توجه به محدودیت‌های موجود در برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه مطرح گردید که در این برنامه‌ریزی می‌توان چند هدف را مورد بررسی قرار داد [۱،۲]. یکی از این تکنیک‌های کارآمد برای حل تصمیم‌گیری چندهدفه، برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشد. این برنامه‌ریزی اولین بار توسط چارنز و کوپر ارایه شد **[۳]** و توسط لی **[۴]**، ایگنیزیو [۵]، تامیز و همکاران [۶]، رومرو [۷]، و دیگران [۸-۱۰] توسعه داده شد. در مدل برنامه‌ریزی آرمانی(GP) انحراف بین دستیابی آرمان‌ها و سطوح آرزوی آن‌ها را مینیمم می‌کنیم. در این روش، تصمیم‌گیرنده مقدار مورد انتظار هر هدف را در نظر می‌گیرد و در مورد نحوه مینیمم‌کردن متغیر انحراف مثبت از هدف یا متغیر انحراف منفی از هدف تصمیم‌گیری می‌کند. اغلب، در مسایل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده قادر نیست برای هدفی مشخص در تخصیص آن (سطح آرزو) مقداری معین در نظر بگیرد. به خاطر چنین مسایلی چارنز و کلمبو [۱۱] روش برنامه‌ریزی آرمانی بازه‌ای را مطرح کردند که این مدل توسط جونز و تامیز [۱۲]، ویتوریا و همکاران [۱۳] و چانگ[۱۴]، توسعه داده شد. در شرایطی ممکن است هدف‌ها دارای سطح آرزوی مبهم باشند که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی فازی مطرح می‌شود [۱۴، ۱۵]. همچنین اگر با مسایلی روبه‌رو شویم که هدف‌ها دارای چند سطح آرزوی مشخص باشند، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را خواهیم داشت که برای اولین بار توسط چانگ معرفی شد [۱۶]. در مدل معرفی شده چندسطح آرزوی گسسته برای آرمان‌ها در نظر گرفته می‌شود. نامبرده یک سال بعد مدل اصلاحی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با سطوح آرزوی پیوسته ارایه نمود [۱۷]. مطالعات و تحقیق‌های ارزشمندی در حوزه نظری و کاربردی انجام گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به نحوه تبدیل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به مسایل برنامه‌ریزی آرمانی صحیح [۱۸]، مدل‌بندی برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۱۹]، حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب [۲۰]، برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با توابع کارآمد (سودمند) [۱۹]، برنامه‌ریزی آرمانی چندضرابیی در مجموعه قیود [۲۲]، اصلاح برنامه‌ریزی آرمانی چندبخشی [۲۳]، و غیره [۲۴-۲۸]، اشاره کرد. اولین پژوهش مربوط به برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی توسط بانکیان تبریزی و همکاران [۲۹] ارایه شد که سطح آرزوی چندگانه آرمان‌ها را اعداد فازی مثلثی در نظر گرفتند و با استفاده از روش زیمرمن [۱۵] و چانگ [۱۶] آن را حل نمودند. پژوهشی دیگر توسط گاپاتا و همکاران در بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای ارایه گردید که با استفاده از تابع رتبه‌بندی مدل فازی به مدل قطعی تبدیل شد[۳۰].

در این مقاله مدل‌هایی جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر معرفی می‌کنیم و با استفاده از روش α-برش و درنظرگرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیدها یا آرمان‌ها آن‌ها را به حالت قطعی تبدیل می‌کنیم و باتشکیل مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری متناظر با آن‌ها و حل آن، جواب بهینه (درصورت وجود) را به‌دست می‌آوریم. از کاربردهای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده

فازی انعطاف‌پذیر می‌توان در بحث تحلیل و حساسیت مسایل برنامه‌ریزی آرمانی، مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی با سطح آرزوی فازی ذوزنقه‌ای و برنامه‌ریزی کشاورزی را نام برد.

در این مقاله ابتدا دربخش ۲ به بررسی مدل‌هایی از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی می‌پردازیم. در بخش ۳ و ۴ به ترتیب مدل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با قیودفازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر را معرفی می‌کنیم و نحوه قطعی‌سازی و تشکیل مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری را ارایه می‌کنیم و برای بیان کارامدی و تفهیم روش‌های بیان‌شده مثال‌هایی عددی مطرح می‌کنیم و آن‌ها را حل می‌کنیم . دربخش آخر نتیجه‌گیری و پیشنهادات را بیان می‌کنیم.

۲ بررسی مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی

شکل کلی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی به صورت زیر می‌باشد [۱۶]

$$\begin{aligned} & G_k(x) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} (g_{k1}\ or\ g_{k2}\ or ... or\ g_{kT}), k=1,...,K \\ & s.t.\quad AX=b, A=\left[a_{ij}\right]_{mn}, b=(b_1,...,b_m)^t, \\ & X=(x_1,...,x_n)^t, x_j \geq 0, j=1,...,n \end{aligned} \tag{۱}$$

که برای هدف i-ام چند سطح آرزوی مشخص، مانند $g_{k1}, g_{k2},..., g_{kT}$ در نظر گرفته می‌شود و ما می‌خواهیم انحراف مقدارهدف و سطح آرزوی آن در هدف k-ام را مینیمم کنیم.

$$\begin{aligned} & min \sum_{k=1}^{K} \left| G_k(x) - (g_{k1}\ or\ g_{k2}\ or ... or\ g_{kT}) \right| \\ & s.t.\ AX=b, A=\left[a_{ij}\right]_{mn}, b=(b_1,...,b_m)^t, \\ & X=(x_1,...,x_n)^t, x_j \geq 0, j=1,...,n \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $A=\left[a_{ij}\right]$، $(i=1,...,m)$، $X=(x_1,...,x_n),\ x_j \geq 0, (j=1,...,n)$. با توجه به این‌که برای هر هدف چند سطح آرزو وجود دارد، مدل فوق به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{k=1}^{K} w_k(d_k^- + d_k^+) \\ & s.t.\quad G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = \sum_{t=1}^{T} g_{kt} S_{kt}(B), \\ & AX=b,\ A=\left[a_{ij}\right]_{mn}, b=(b_1,...,b_m)^t, \\ & d_k^-, d_k^+ \geq 0, x_j \geq 0, k=1,....K, j=1,...,n, B \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{۳}$$

که B یک متغیردودویی و $S_{kt}(B)$ بیان‌گر تابع ضربی از متغیرهای دودویی می‌باشد که مشخص می‌کند کدام سطح آرزو برای آرمان $i-$ ام انتخاب شود.

۲-۱ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده [۱۷]

در روند حل مدل اولیه برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی که برای سطوح آرزوی آرمان‌های آن چندانتخاب گسسته مشخص وجود دارد، جملات ضربی از متغیرهای دودویی به‌وجود می‌آید که این در عمل مشکلاتی را برای تصمیم‌گیرنده به همراه خواهد داشت، لذا برای برطرف کردن این مشکل، از مدل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده استفاده می‌شود. یکی از مزایای روش فوق این است که شامل جملات ضربی از متغیرهای دودویی نیست و به آسانی با استفاده از نرم افزارهای موجود قابل حل است.

مدل کلی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} & G_k(X) \geq g_{k,\min} and \leq g_{k,\max}, \ \ k=1,\dots,K, \\ & AX=b,\ A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, b=(b_1,\dots,b_m)^t, \\ & X=(x_1,\dots,x_n)^t, x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n,\ \ i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۴}$$

در واقع سطح آرزوی این برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده بازه بسته $\left[g_{k,\min}, g_{k,\max}\right]$ می‌باشد.

تذکر ۱– برای حل مساله (۴) نیاز هست که مشخص شود که ابتدای بازه اهمیت یا اولویت بیشتری دارد یا ا نتهای بازه، سپس آن را به برنامه‌ریزی آرمانی خطی تبدیل می‌کنند.

تذکر ۲–اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، مینیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی اصلاح‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{k=1}^{K}[w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ s.t. \quad & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k=1,\dots,K, \\ & y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min},\ \ g_{k,\min} \leq y_k \leq g_{k,\max} \\ & AX=b,\ b=(b_1,\dots,b_m)^t, A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \\ & X=(x_1,\dots,x_n)^t, x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n,\ \ i=1,\dots,m \\ & d_k^-, d_k^+ \geq 0, X \geq 0, k=1,\dots K. \end{aligned} \tag{۵}$$

در مدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظرگرفته شده برای آرمان k–ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند

تذکر ۳–اگر بخواهیم از سطح آرزوی در نظر گرفته شده از یک آرمان، ماکزیمم‌ترین آن‌ها را انتخاب کنیم مدل برنامه‌ریزی اصلاح‌شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{k=1}^{K}[w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ & s.t. \quad G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k, \quad k = 1,...,K, \\ & \quad y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \; g_{k,\min} \le y_k \le g_{k,\max}, \\ & \quad AX = b, \; b = (b_1,...,b_m)^t, \; A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \\ & \quad X = (x_1,...,x_n)^t, x_j \ge 0, \; j = 1,...,n, \quad i = 1,...,m, \\ & \quad d_k^-, d_k^+ \ge 0, X \ge 0, \; k = 1,....K. \end{aligned} \tag{۶}$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظرگرفته شده برای آرمان k–ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله می‌باشند.

تذکر٤– دردنیای واقعی ممکن است بعضی از آرمان‌ها به هم وابسته باشند لذا در چنین مسایلی، از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده محدود استفاده می‌کنند که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

تذکر٥–مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده محدود در حالتی که مینیمم‌ترین سطح آرزو مدنظر باشد به صورت زیراست.

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{k=1}^{K}[w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ & s.t. \quad (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, k = 1,...,K, \\ & \quad y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \; g_{k,\min} \le y_k \le g_{k,\max} \\ & \quad AX = b, A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, b = (b_1,...,b_m)^t, X = (x_1,...,x_n), x_j \ge 0, \\ & \quad B_k \in \{0,1\}, d_k^-, d_k^+ \ge 0, X \ge 0, k = 1,....K, \; j = 1,...,n \end{aligned} \tag{۷}$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظرگرفته شده برای آرمان k–ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیردودویی می‌باشند

تذکر٦–مدل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده محدود در حالتی که ماکزیمم‌ترین سطح آرزو مدنظر هست به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & min \sum_{k=1}^{K}[w_k(d_k^- + d_k^+) + \alpha_k(e_k^- + e_k^+)] \\ & s.t. \quad (G_k(X))B_k - d_k^+ + d_k^- = B_k y_k, k = 1,...,K, \\ & \quad y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\max}, \; g_{k,\min} \le y_k \le g_{k,\max} \\ & \quad AX = b, A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, b = (b_1,...,b_m)^t, \\ & \quad B_k \in \{0,1\}, d_k^-, d_k^+ \ge 0, X \ge 0, k = 1,....K \end{aligned} \tag{۸}$$

درمدل بالا $G_k(x)$ آرمان مساله، y_k سطح آرزوی درنظرگرفته شده برای آرمان k–ام، $d_k^+, d_k^-, e_k^+, e_k^-$ متغیرهای انحراف از آرمان مساله و B_k متغیردودویی می‌باشند.

۲-۲ برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی

در برخی از مسایل، ما با چند سطح آرزوی مبهم یا نامشخص برای آرمان‌ها یا متغیرها یا ضرایب مواجه می‌شویم که در این صورت برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی فازی مطرح می‌شود که می‌توان آن را به دسته‌های زیر تقسیم کرد.

یک دسته از چنین برنامه‌ریزی‌هایی، مدل‌هایی هستند که سطوح آرزوی آن‌ها فازی مثلثی می‌باشد که این دسته از مدل‌ها توسط بانکیان تبریزی و همکاران مطرح شد[۲۹].

اگر برای آرمان k-ام (G_k)، سطوح آرزو $\tilde{g}_{k1}\ or\ \tilde{g}_{k2}\ or ... or\ \tilde{g}_{kT}$ باشند. مدل برنامه‌ریزی آرمانی چند انتخابی فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & min \sum_{k=1}^{K} \left| G_k(x) - (\tilde{g}_{k1}\ or\ \tilde{g}_{k2}\ or ... or\ \tilde{g}_{kT}) \right| \\ & s.t.\quad AX = b,\ A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, ..., b_m)^t, \\ & \qquad X = (x_1, ..., x_n)^t, x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n \end{aligned} \tag{۹}$$

که مدل اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & max\ f(\mu) = \sum_{k=1}^{K} w_k \mu_k \\ & s.t.\ \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{G_k(x) - \tilde{g}_{kt}}{p_{kt}^{+}} \right) S_{kt}(B), k = 1, ..., K, \\ & \qquad \mu_k \leq 1 - \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{\tilde{g}_{kt} - G_k(x)}{p_{kt}^{-}} \right) S_{kt}(B), k = 1, ..., K, \\ & \qquad AX = b, A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, ..., b_m), X = (x_1, ..., x_n) \\ & \qquad \mu_k \geq 0, B \in \{0, 1\}, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

تذکر۷- p_{kt}^{-}, p_{kt}^{+} به ترتیب بیشترین مقدار تخطی $G_k(x)$از g_{kt} از سمت راست (بزرگ‌ترشدن) و سمت چپ (کوچک‌تر شدن)و $S_{kt}(B)$ تابع ضربی از متغیرهای دودویی می‌باشد.

در بعضی از مدل‌ها متغیرها و ضرایب آن‌ها در آرمان‌ها فازی می‌باشد که مدل آن به صورت زیر بیان می‌شود [۳۰].

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_k(\tilde{x}) \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} (g_{k1}\ or\ g_{k2}\ or ... or\ g_{kT}), k = 1, ..., K \\ & s.t. \qquad A\tilde{X} \precsim \approx \succsim b, A = \left[a_{ij} \right]_{mn}, b = (b_1, ..., b_m) \\ & \qquad\qquad \tilde{X} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n). \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که برای حل آن‌ها از تابع رتبه‌بندی استفاده می‌کنیم و به صورت زیر آن‌را تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{k=1}^{K} w_k (d_k^- + d_k^+) \\ & s.t. \quad \Re(\tilde{G}_k(\tilde{X})) - d_k^+ + d_k^- = \sum_{t=1}^{T} g_{kt} S_{kt}(B), \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Re(\tilde{x}_j) = b_i, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \\ & \qquad \Re(\tilde{x}_j) \geq 0, d_k^-, d_k^+ \geq 0, k = 1,\dots K,\ j = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{12}$$

۳ مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر

فازی انعطاف‌پذیر از بحث‌های بسیار ارزشمند درنظریه فازی می‌باشد اگر درمسایل برنامه‌ریزی ریاضی، تصمیم‌گیرنده بخواهد میزان تخطی را درمنابع سمت راست قیدها درنظربگیرد، دراین صورت بحث مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر مطرح می‌شود که شکل کلی مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & G_K(X) \geq g_{k,\min}\ and \leq g_{k,\max},\ k = 1,\dots,K, \\ & G_v(X) \geq g_{v,\min}\ and\ \leq g_{v,\max},\ v = K+1,\dots,V, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \precsim b_{l_1}, l_1 = 1,\dots,r, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j \succsim b_{l_2}, l_2 = r+1,\dots,m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{13}$$

تذکر۸- $(v = K+1,\dots,V)G_v(X), (k = 1,\dots,K)G_k(X)$ آرمان‌های دسته اول و دسته دوم می‌باشند و $\left[g_{k,\min}, g_{k,\max}\right]$ و $\left[g_{v,\min}, g_{v,\max}\right]$ سطح آرزوی پیوسته آن‌ها می‌باشند.

تذکر۹- در آرمان‌های دسته اول ($(k = 1,\dots,K)G_k(X)$) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و درآرمان‌های دسته دوم ($(v = K+1,\dots,V)G_v(X)$) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکر۱۰- P_i $(i = 1,\dots,m)$ میزان تخطی مقدار سمت راست قید i-ام می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرنده به عنوان داده‌های مساله مشخص می‌شود و r قید اول که از نوع "$\precsim$" می‌باشند را قیود نوع اول ($l_1 = 1,\dots,r$) و مابقی که از نوع "$\succsim$" را قیود نوع دوم ($l_2 = r+1,\dots,m$) می‌نامیم.

تذکر۱۱- انعطاف‌پذیری در r- قیداول ($\precsim$) باعث می‌شودکه منابع سمت راست از b_{l_1} تا $b_{l_1} + p_{l_1}$ قابل افزایش باشد و در بقیه قیدها ($\succsim$) منابع سمت راست b_{l_2} تا $b_{l_2} - p_{l_2}$ قابل کاهش خواهدبود.

تذکر۱۲- برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر بالا (۱۳) نیاز است که ابتدا آن‌را به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم

سپس با استفاده از روش α- برش و درنظرگرفتن حداقل درجه عضویت متفاوت برای قیود فازی انعطاف‌پذیر، آن را به یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

۳-۱ تبدیل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر به برنامه‌ریزی خطی فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به بخش ۲-۱ برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده بالا (۱۳) نیاز هست که ابتدا آن‌را به یک برنامه‌ریزی آرمانی خطی با قیود فازی انعطاف‌پذیر تبدیل کنیم. از طرفی می‌دانیم درآرمان‌های دسته اول ($(k=1,\dots,K)G_k(X)$) رسیدن به کمترین مقدارسطح آرزو ($g_{k,\min}$) و درآرمان‌های دسته دوم ($(v=K+1,\dots,V)G_v(X)$) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد. بنابراین باتوجه به مدل (۷) و (۸) مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر متناظر با مساله (۱۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
& min\ \left(\sum_{k=1}^{K}[w_k(d_k^-+d_k^+)+\alpha_k(e_k^-+e_k^+)]+\sum_{v=K+1}^{V}[w_v(d_v^-+d_v^+)+\alpha_v(e_v^-+e_v^+)]\right)\\
& s.t \qquad G_k(X)-d_k^++d_k^-=y_k,\, g_{k,\min}\le y_k\le g_{k,\max}\\
& \qquad y_k-e_k^++e_k^-=g_{k,\min},\, k=1,\dots,K,\\
& \qquad G_v(X)-d_v^++d_v^-=y_v,\ g_{v,\min}\le y_v\le g_{v,\max},\\
& \qquad y_v-e_v^++e_v^-=g_{v,\max},\, v=K+1,\dots,V,\\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}a_{l_1 j}x_j \precsim^F b_{l_1},\, l_1=1,\dots,r,\ \ \sum_{j=1}^{n}a_{l_2 j}x_j \succsim^F b_{l_2},\, l_2=r+1,\dots,m,\\
& \qquad X=(x_1,\dots,x_n),\, x_j\ge 0,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

تذکر۱۳-درمدل متغیرها به صورت زیر معرفی می‌شوند

۱- d_k^-,d_k^+,e_k^-,e_k^+ متغیرهای انحراف از آرمان، آرمان‌های دسته اول و d_v^-,d_v^+,e_v^-,e_v^+ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشدو $w_k,\alpha_k,w_v,\alpha_v$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۱۴) می‌باشد.

۲- $g_{k,\min},g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min},g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- y_k,y_v مقدارسطح آرزویی هستند که بعد ازحل مساله برای آرمان‌های مساله درنظرگرفته می‌شود.

در مدل مساله (۱۴) قیود ازنوع فازی انعطاف‌پذیرخواهند بودکه نیازاست به حالت قطعی تبدیل شوند.

۳-۲ تابع عضویت قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (١٤)

با توجه به نوع قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تخطی مربوط به هر قید، تابع عضویت قیدها به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu(\sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \precsim b_{l_1}) = \frac{b_{l_1} - \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j}{P_{l_1}} + 1, l_1 = 1, \dots, r$$
$$\mu(\sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j \succsim b_{l_2}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j - b_{l_2}}{p_{l_2}} + 1, \quad l_2 = r+1, \dots, m \qquad (۱۵)$$

۳-۳ تبدیل قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱٤) به حالت قطعی

اگر روش α-برش را برای قطعی‌سازی قیود فازی انعطاف‌پذیر درنظر بگیریم و حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول را α_{l_1}و قیود نوع دوم را α_{l_2}درنظر بگیریم آنگاه قیود فازی انعطاف‌پذیر مساله (۱۳) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می‌شود

$$\mu(\sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \precsim b_{l_1}) = \frac{b_{l_1} - \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j}{P_{l_1}} + 1 \ge \alpha_{l_1}, \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \le b_{l_1} + p_{l_1}(1-\alpha_{l_1}), l_1 = 1, \dots, r,$$
$$\mu(\sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j \succsim b_{l_2}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j - b_{l_2}}{p_{l_2}} + 1 \ge \alpha_{l_2} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \le b_{l_1} + p_{l_2}(1-\alpha_{l_2}), l_2 = r+1, \dots, m \qquad (۱۶)$$

۳-٤ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر (۱٤) به یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی قطعی

با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶) مدل قطعی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف پذیر (۱۳) به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
min\ \ & (\sum_{k=1}^{K} [w_k(d_k^- + d_k^+) + w_k'(e_k^- + e_k^+)] + \sum_{v=K+1}^{V} [w_v(d_v^- + d_v^+) + w_v'(e_v^- + e_v^+)] - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i) \\
s.t\ \ & G_k(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k,\ g_{k,\min} \le y_k \le g_{k,\max} \\
& y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min}, \quad k = 1, \dots, K, \\
& G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v, g_{v,\min} \le y_v \le g_{v,\max} \\
& y_v - e_v^+ + e_v^- = g_{v,\max},, v = K+1, \dots, V, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \le b_{l_1} + p_{l_1}(1-\alpha_{l_1}), \quad l_1 = 1, \dots, r, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{l_2 j} x_j \ge b_{l_2} - p_{l_2}(1-\alpha_{l_2}),\ l_2 = r+1, \dots, m, \\
& 0 \le \alpha_{l_1} \le 1, \quad l_1 = 1, \dots, r, \\
& 0 \le \alpha_{l_2} \le 1, \quad l_2 = r+1, \dots, m, \\
& X = (x_1, \dots. x_n), x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

تذکر ۱۴–ملاحظه می‌شود که مدل (۱۷) یک نوع مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چند پارامتری قطعی می‌باشد که متغیرهای آن به صورت زیرمعرفی می‌شوند

۱- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشد و $w_k, \alpha_k, w_v, \alpha_v$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۱۴) می‌باشد.

۲- $g_{k,\min}, g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- y_k, y_v مقدار سطح آرزویی که بعد ازحل مساله برای آرمان‌های مساله درنظرگرفته می‌شود.

۴- α_{l_1} حداقل مقدار عضویت قیود نوع اول و α_{l_2} حداقل مقدار عضویت قیود نوع دوم می‌باشد

۳-۵ مثال عددی

اگر در مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده زیر، در هدف اول رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو و درهدف دوم رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو مدنظر تصمیم‌گیرنده باشد و میزان تخطی قیود مساله از مقادیر سمت راستشان به ترتیب $p_۳ = ۷, p_۲ = ۲, p_۱ = ۸$ باشد جواب بهینه مساله در صورت وجود تخمین‌زده می‌شود.

$$\begin{aligned}
&G_۱ : ۳x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \geq ۱۰۰ \ and \ \leq ۱۲۰ \\
&G_۲ : ۴x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ \geq ۹۰ \ and \ \leq ۱۰۰ \\
&\quad x_۳ - ۲x_۲ + x \gtrsim^F ۱۵ \\
&\quad ۲x_۱ - x_۳ \lesssim^F ۴ \\
&\quad x_۱ + x_۲ + x_۳ \lesssim^F ۲۵ \\
&\quad x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰, x_۳ \geq ۰
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

قدم اول: با استفاده از مدل (۱۷)، مدل قطعی مساله (۱۸) که یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری است به صورت زیرخواهد بود

$$\begin{aligned}
\min\ Z = {} & d_۱^+ + d_۱^- + e_۱^+ + e_۱^- + d_۲^+ + d_۲^- + e_۲^+ + e_۲^- - (\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳) \\
s.t. \quad & ۳x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ - d_۱^+ + d_۱^- = y_۱, \\
& ۱۰۰ \leq y_۱ \leq ۱۲۰, y_۱ - e_۱^+ + e_۱^- = ۱۲۰ \\
& ۴x_۱ + ۳x_۲ + ۲x_۳ - d_۲^+ + d_۲^- = y_۲ \\
& ۹۰ \leq y_۲ \leq ۱۰۰, y_۲ - e_۲^+ + e_۲^- = ۹۰ \\
& x_۳ - ۲x_۲ + x \geq ۱۵ - ۸(۱ - \alpha_۱) \\
& ۲x_۱ - x_۳ \leq ۴ + ۲(۱ - \alpha_۲) \\
& x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۲۵ + ۷(۱ - \alpha_۳) \\
& x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰, x_۳ \geq ۰, ۰ \leq \alpha_۱ \leq ۱, ۰ \leq \alpha_۲ \leq ۱, ۰ \leq \alpha_۳ \leq ۱ \\
& d_۱^+ \geq ۰, d_۱^- \geq ۰, e_۱^+ \geq ۰, e_۱^- \geq ۰, d_۲^+ \geq ۰, d_۲^- \geq ۰, e_۲^+ \geq ۰, e_۲^- \geq ۰,
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

قدم دوم: با حل مساله با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$d_1^+ = 0, d_1^- = 42, e_1^+ = 0, e_1^- = 20, d_2^+ = 0, d_2^- = 0, e_2^+ = 0, e_2^- = 0, y_1 = 100, y_2 = 90$$
$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0/9166667, \alpha_3 = 0, x_1 = 10/6667, x_2 = 5/666667, x_3 = 16/1667 \qquad (20)$$

تذکر۱۵-ازجواب به‌دست آمده نتایج زیر به‌دست می‌آید

۱-برای آرمان اول، مقدارسطح آرزو برابر با۱۰۰و برای آرمان دوم، مقدارسطح آرزو برابر با۹۰ درنظرگرفته شده است.

۲-مقدارآرمان اول برابر با ۵۸ و مقدارآرمان دوم برابر با۹۰ به‌دست آمده است.

۳-هیچ گونه تخطی برای قید اول انجام نگرفته است ولی برای قیدسوم تمام تخطی مجاز، درنظرگرفته شد.

٤- مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر

در مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده، آرمان‌ها بازه بسته خواهند بود. حال اگر براساس نظرتصمیم‌گیرنده ابتدای بازه تا اندازه‌ای قابل کاهش و انتهای بازه تا اندازه‌ای قابل افزایش باشد بحث برنامه‌ریزی آرمانی با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیرمطرح می‌شودکه شکل کلی این نوع مسایل به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & G_K(X) \succsim^F g_{k,\min} \; and \precsim^F g_{k,\max}, \; k = 1,\dots,K, \\ & G_v(X) \succsim^F g_{v,\min} \; and \precsim^F g_{v,\max}, v = K+1,\dots,V, \qquad (21) \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \le or \ge b_i, i = 1,\dots,m, \\ & X = (x_1,\dots,x_n), x_j \ge 0, \; j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

تذکر۱٦- $(v = K+1,\dots,V)G_v(X), (k = 1,\dots,K)G_k(X)$ آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول و دسته دوم می‌باشند و $\left[g_{k,\min}, g_{k,\max}\right]$ و $\left[g_{v,\min}, g_{v,\max}\right]$سطح آرزوی پیوسته فازی انعطاف‌پذیر آن‌ها می‌باشند که با در نظر گرفتن میزان تخطی ابتدا و انتهای سطح آرزوی فازی انعطاف‌پذیر قابل تغییر است.

تذکر۱۷- درآرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول ($(k = 1,\dots,K)G_k(X)$) رسیدن به کمترین مقدار سطح آرزو یا ابتدای بازه سطح آرزو ($g_{k,\min}$) اهمیت بیشتری دارد و درآرمان‌های دسته دوم ($G_v(X)$ $(v = K+1,\dots,V)$) رسیدن به بیشترین مقدار سطح آرزو یا انتهای بازه سطح آرزو ($g_{v,\max}$) اهمیت بیشتری دارد.

تذکر۱۸- با توجه به این‌که آرمان‌ها مساله (۲۱) از نوع فازی انعطاف‌پذیر می‌باشند پس ابتدای بازه و انتهای بازه سطح آرزوی آرمان‌ها قابل انعطاف می‌باشند؛ بنابراین بر طبق نظر تصمیم‌گیرنده، $P_{k,\min}, P_{k,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته اول ($(k = 1,\dots,K)G_k(X)$) از بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار سطح آرزویشان، و $P_{v,\min}, P_{v,\max}$ به ترتیب میزان تخطی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر دسته دوم ($G_v(X)$ $(v = K+1,\dots,V)$) از بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار سطح آرزویشان می‌باشد.

تذکر۱۹- برای حل مسایل برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر بالا (۲۱) نیاز است که ابتدا آن‌را به یک برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی تبدیل کنیم سپس آن را به یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی چندپارامتری تبدیل کنیم.

٤-١ تبدیل آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر برنامه‌ریزی چندانتخابی اصلاح‌شده (۲۱) به حالت قطعی

با توجه به نوع آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله و میزان تخطی مربوط به هر آرمان، تابع عضویت آرمان‌ها به صورت زیر خواهد بود:

تابع عضویت آرمان‌های دسته اول:

$$\mu(G_k \succsim^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{p_{k,\min}} + ۱ ,\ k = ۱,\ldots,K \qquad (۲۲)$$

$$\mu(G_k \precsim^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + ۱,\ \ k = ۱,\ldots,K \qquad (۲۳)$$

تابع عضویت آرمان‌های دسته دوم:

$$\mu(G_v \succsim^F g_{v,\min}) = \frac{G_v - g_{v,\min}}{p_{v,\min}} + ۱ ,\ v = K+۱,\ldots,V \qquad (۲۴)$$

$$\mu(G_v \precsim^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + ۱ ,\ v = K+۱,\ldots,V \qquad (۲۵)$$

٤-٢ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر به یک مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی

اگرروش α–برش رابرای قطعی‌سازی آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر درنظربگیریم و حداقل مقدار عضویت آرمان‌های نوع اول را در روابط (۲۲) و (۲۳) $\alpha_k ,(۱ \le \alpha_k \le ۰)$ و آرمان‌های نوع دوم را در روابط (۲۴) و (۲۵) $\alpha_v ,(۱ \le \alpha_v \le ۰)$ درنظر بگیریم آنگاه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر مساله (۲۱) به صورت زیر به حالت قطعی تبدیل می‌شود

حالت قطعی آرمان‌های نوع اول:

$$\mu(G_k \succsim^F g_{k,\min}) = \frac{G_k - g_{k,\min}}{p_{k,\min}} + ۱ \ge \alpha_k \Rightarrow G_k \ge g_{k,\min} - p_{k,\min}(۱-\alpha_k), ۰ \le \alpha_k \le ۱, k = ۱,\ldots,K \qquad (۲۶)$$

$$\mu(G_k \precsim^F g_{k,\max}) = \frac{g_{k,\max} - G_k}{P_{k,\max}} + ۱ \ge \alpha_k \Rightarrow G_k \le g_{k,\max} + p_{k,\max}(۱-\alpha_k), ۰ \le \alpha_k \le ۱,\ k = ۱,\ldots,K \qquad (۲۷)$$

حالت قطعی آرمان‌های نوع دوم:

$$\mu(G_v \succsim^F g_{v,\min}) = \frac{G_k - g_{v,\min}}{p_{v,\min}} + ۱ \ge \alpha_v \Rightarrow G_v \ge g_{v,\min} - p_{v,\min}(۱-\alpha_v), ۰ \le \alpha_v \le ۱, v = K+۱,\ldots,V \qquad (۲۸)$$

$$\mu(G_v \precsim^F g_{v,\max}) = \frac{g_{v,\max} - G_v}{P_{v,\max}} + ۱ \ge \alpha_v \Rightarrow G_v \le g_{v,\max} + p_{v,\max}(۱-\alpha_v), ۰ \le \alpha_v \le ۱, v = k+۱,\ldots,V \qquad (۲۹)$$

٤-٣ حالت قطعی مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر

باتوجه به روابط بالا (۲۶-۲۷-۲۸-۲۹) شکل قطعی مساله (۲۱) به صورت زیر خواهد بود

$$
\begin{aligned}
& G_K(X) \geq g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \ and \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k),\ k=1,\dots,K,\\
& G_v(X) \geq g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) \ and \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v),\ v=K+1,\dots,V,\\
& \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \leq or \geq b_i,\ i=1,\dots,m,\\
& 0 \leq \alpha_k \leq 1, 0 \leq \alpha_v \leq 1,\ X=(x_1,\dots,x_n),\ x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

مدل (۳۰) برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده چند پارامتری قطعی می‌باشدکه بازه‌های زیر سطح آرزوی آرمان‌های آن می‌باشند $\left[g_{k,\min}-P_{k,\min}(1-\alpha_k),\, g_{k,\max}+P_{k,\max}(1-\alpha_k)\right],\left[g_{v,\min}-P_{v,\min}(1-\alpha_v), g_{v,\max}+P_{v,\max}(1-\alpha_v)\right]$
نکته: در آرمان‌های نوع اول ($(k=1,\dots,K)G_k(X)$) رسیدن به کم‌ترین مقدار سطح آرزو ($(g_{k,\min}-P_{k,\min}(1-\alpha_k))$ (ابتدای بازه) و در آرمان نوع دوم ($(v=K+1,\dots,V)G_v(X)$) رسیدن به بیش‌ترین مقدار سطح آرزو ($(g_{v,\max}+P_{v,\max}(1-\alpha_v))$ (انتهای بازه) اهمیت بیش‌تری دارد.

٤-٤ تبدیل مساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده قطعی (۳۰) به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری

با توجه به ساختار برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده (مدل‌های (۵) و (۶))، مساله (۳۰) به صورت زیر به برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
min\ Z = & \sum_{k=1}^{K}(w_k^+ d_k^+ + w_k^- d_k^- + w_k'^+ e_k^+ + w_k'^- e_k^-) + \sum_{v=K+1}^{V}(w_v^+ d_v^+ + w_v^- d_v^- + w_v'^+ e_v^+ + w_v'^+ e_v^-)\\
& G_K(X) - d_k^+ + d_k^- = y_k,\ k=1,\dots,K,\\
& y_k - e_k^+ + e_k^- = g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k)\\
& g_{k,\min} - P_{k,\min}(1-\alpha_k) \leq y_k \leq g_{k,\max} + P_{k,\max}(1-\alpha_k),\\
& G_v(X) - d_v^+ + d_v^- = y_v,\ v=K+1,\dots,V,\\
& y_v - e_k^+ + e_k^- = g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v),\\
& g_{v,\min} - P_{v,\min}(1-\alpha_v) \leq y_v \leq g_{v,\max} + P_{v,\max}(1-\alpha_v),\\
& \sum_{j=1}^{n} a_{l_1 j} x_j \leq or \geq b_i,\ i=1,\dots,m,\\
& 0 \leq \alpha_k \leq 1,, 0 \leq \alpha_v \leq 1,\ X=(x_1,\dots,x_n),\ x_j \geq 0,\ j=1,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (۳۱)
$$

ملاحظه می‌شود که مدل (۳۱) برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می‌باشد که در واقع مدل قطعی برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر (۲۱) می‌باشد و به آسانی با کمک نرم‌افزار قابل حل می‌باشد.

تذکر ۲۰–ملاحظه می‌شود که مدل (۳۱) یک نوع مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری قطعی می‌باشد که متغیرهای آن به صورت زیرمعرفی می‌شوند

۱- $d_k^-, d_k^+, e_k^-, e_k^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته اول و $d_v^-, d_v^+, e_v^-, e_v^+$ متغیرهای انحراف از آرمان دسته دوم می‌باشد و $w_k^+, w_k^-, w_k'^+, w_k'^-, w_v^+, w_v^-, w_v'^+, w_v'^-$ وزن آن‌ها در تابع هدف مساله (۳۱) می‌باشد.

۲- $g_{k,\min}, g_{k,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته اول و $g_{v,\min}, g_{v,\max}$ سطح آرزوی آرمان‌های دسته دوم می‌باشد

۳- y_k, y_v مقدارسطح آرزویی هستند که بعد ازحل مساله برای آرمان‌های مساله درنظرگرفته می‌شود.

۴- α_k حداقل مقدار عضویت آرمان نوع اول و α_v حداقل مقدار عضویت آرمان نوع دوم می‌باشد

٥-٤ مثال عددی

درمساله برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده زیر، میزان تخطی اولین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیش‌ترین و کم‌ترین سطح آرزو به ترتیب۴۰ و۲۰ است $(P_{1,\max} = ۴۰, P_{1,\min} = ۲۰)$ و میزان تخطی دومین آرمان فازی انعطاف‌پذیر، از بیش‌ترین و کم‌ترین سطح آرزو به ترتیب ۳۰ و ۱۴ است $(P_{2,\max} = ۳۰, P_{2,\min} = ۱۴)$ و با توجه به نظر تصمیم گیرنده درآرمان اول رسیدن به بیش‌ترین سطح آرزو (۸۰) و در آرمان فازی انعطاف‌پذیر دوم رسیدن به کم‌ترین مقدار سطح آرزو (۶۰-) هدف مساله است. جواب بهینه مساله به صورت زیرتخمین‌زده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& G_1 : x_1 + ۲x_2 \succsim^F ۲۲ \text{ and } \precsim^F ۸۰, \\
& G_2 : x_2 - x_1 \succsim^F -۶۰ \text{ and } \precsim^F -۲۲, \\
& -۵x_1 + ۲x_2 \le ۷ \\
& -x_1 + ۳x_2 \le ۳۰ \\
& x_1 + x_2 \le ۹۰ \\
& ۵x_1 - x_2 \le ۳۹۰ \\
& -۴x_1 + ۷۹x_2 \ge ۷۹ \\
& x_1 \ge ۰ x_2 \ge ۰,
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

برای به‌دست آوردن جواب بهینه مساله ابتدا با استفاده از مدل مساله (۳۱)، مدل قطعی مساله (۳۲) را به‌دست می‌آوریم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\min\ Z = d_۱^+ + d_۱^- + e_۱^+ + e_۱^- + d_۲^+ + d_۲^- + e_۲^+ + e_۲^- \\
&x_۱ + ۲x_۲ - d_۱^+ + d_۱^- = y_۱, \\
&y_۱ - e_۱^+ + e_۱^+ = ۸۰ + ۴۰(۱-\alpha_۱), \\
&۲۲ - ۲۰(۱-\alpha_۱) \le y_۱ \le ۸۰ + ۴۰(۱-\alpha_۱), \\
&x_۲ - x_۱ - d_۲^+ + d_۲^- = y_۲, \\
&y_۲ - e_۲^+ + e_۲^+ = -۶۰ - ۱۴(۱-\alpha_۲), \\
&-۶۰ - ۱۴(۱-\alpha_۲) \le y_۲ \le -۲۲ + ۳۰(۱-\alpha_۲), \\
&\quad -۵x_۱ + ۲x_۲ \le ۷ \\
&\quad -x_۱ + ۳x_۲ \le ۳۰ \\
&\quad x_۱ + x_۲ \le ۹۰ \\
&\quad ۵x_۱ - x_۲ \le ۳۹۰ \\
&\quad -۴x_۱ + ۷۹x_۲ \ge ۷۹ \\
&\quad x_۱ \ge ۰ x_۲ \ge ۰, d_۱^+ \ge ۰, d_۱^- \ge ۰, e_۱^+ \ge ۰, e_۱^- \ge ۰, d_۲^+ \ge ۰, + d_۲^- + e_۲^+ + e_۲^+ \\
&\quad ۰ \le \alpha_۱ \le ۱,\ ۰ \le \alpha_۲ \le ۱,
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

باحل مساله بالا با کمک نرم افزار جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود

$$d_۱^+ = ۰, d_۱^- = ۰, e_۱^+ = ۰, e_۱^- = ., d_۲^+ = ۰, d_۲^- = ۱۴, e_۲^+ = ۷۰/۲۶۶۶۷, e_۲^- = ۰, x_۱ = ۳۶, x_۲ = ۲۲, y_۱ = ۸۰, \alpha_۱ = ۱$$
$$y_۲ = ۰, \alpha_۲ = ۰/۲۶۶۶۶۷,, G_۱ = ۸۰, G_۲ = -۱۴$$

تذکر ۲۱-ازجواب به‌دست آمده نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱-برای آرمان اول، مقدارسطح آرزو برابر با ۸۰و برای آرمان دوم، مقدارسطح آرزو برابر با ۰ درنظرگرفته شده است.

۲-مقدارآرمان اول برابر با۸۰و مقدارآرمان دوم برابر با ۱۴- به‌دست آمده است.

۳-هیچ گونه تخطی برای آرمان اول انجام نگرفته است ولی برای آرمان دوم، تخطی انجام گرفته است.

تذکر ۲۲-اگر در مساله (۳۳) تابع هدف رابه صورت زیر تغییر دهیم

$$min\ Z = -d_۱^+ + d_۱^- - e_۱^- + e_۱^+ + d_۲^+ - d_۲^- + e_۲^+ - e_۲^-$$

جواب بهینه مساله (۳۳) به صورت زیر تغییر می کند

$$d_۱^+ = ۷۸, d_۱^- = ۰, e_۱^+ = ۰, e_۱^- = ۵۸, d_۲^+ = ۰, d_۲^- = ۷۰, e_۲^+ = ۷۰.۲۶۶۶۷, e_۲^- = ۰, x_۱ = ۸۰, x_۲ = ۱۰, y_۱ = ۲۲, \alpha_۱ = ۱$$
$$\alpha_۲ = ۰.۲۶۶۶۶۷, y_۲ = ۰, G_۱ = ۱۰۰, G_۲ = -۷۰.$$

ملاحظه می‌شود که در تذکر ۲۲ با تغییر ضرایب (وزن‌های) متغیرهای انحراف مثبت و منفی مساله (۳۳) در تابع هدف، مقدار بهینه هریک از آرمان‌های مساله بهتر شده است.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

از آن‌جایی‌که ممکن است در مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه خطی با اهدافی روبه‌رو شویم که برای هر یک از آن‌ها چند سطح آرزو (مقدار مورد انتظار) در نظر گرفته می‌شود، لذا بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی مورد توجه قرار می‌گیرد. و اگر سطح آرزوی آرمان‌ها بازه بسته باشد بحث برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده مطرح می‌شود. گاهی اوقات، در دنیای واقعی با مسایلی روبه‌رو هستیم که اهداف آن‌ها یا مجموعه قیود آن‌ها از نوع فازی انعطاف‌پذیر می‌باشد. در این مقاله، دو مدل جدید از برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر تحت عنوان‌های برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه قیود فازی انعطاف‌پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ارایه نموده‌ایم و با درنظر گرفتن حداقل درجه عضویت و میزان تخطی برای قیدهای فازی انعطاف‌پذیر و آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر، یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی چندپارامتری برای آن‌ها به‌دست آوردیم. از ویژگی‌های مدل به‌دست آمده این است که شامل متغیرهای دودویی نمی‌باشد. برای نشان دادن کارآمدی مدل‌ها و روش‌های پیشنهادشده برای برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده فازی انعطاف‌پذیر، دو مثال عددی ارایه شده است.

قابل ذکراست برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده بامجموعه قیود فازی انعطاف پذیر و برنامه‌ریزی آرمانی چندانتخابی اصلاح‌شده با مجموعه آرمان‌های فازی انعطاف‌پذیر ابزارهای توانمندی برای تحلیل حساسیت در بحث برنامه‌ریزی آرمانی خواهند بود.

منابع

[۱] ناصری،س.ه. و باوندی،س.،ارایه مدلی برای حل مسایل برنامه‌ریزی تصادفی چند هدفه با استفاده از تابع عضویت هذلولوی،مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهارم، شماره چهارم (پیاپی ۵۵) زمستان ۹۶،ص ص ۳۳-۲۱.

[۲] شعبانی،آ،توکلی مقدم،ر. و حاجی آقایی کشتلی ،م.،حل مساله حمل و نقل با هزینه ثابت تحت شرایط فازی با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری به همراه یک روش جدید نمایش جواب، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم،شماره چهارم (پیاپی ۵۸) زمستان ۹۷،ص ص ۳۵-۱۵.

[3] Charnes, A., Cooper, w.w., (1959), constraint programming, Management science 6, 73-79.

[4] Lee, S.M., (1972), Goal programming for Decision Analysis, Auerback, Philadelphia, Auerbach.

[5] Ignizio, J.P., (1984), Linear programming in single-and multiple –objective systems, journal of policy Analysis and Management 3(3), 477-489.

[6] Tamiz, M., Jones, D., Romero, C., (1998), Goal programming for Decision making: an overview of the current state –of- the- art. European journal of operation research 111,567-581.

[7] Romero, C.,(2001), Extended lexicographic goal programming: a unifying approach, omega 29,63-71.

[8] Li, H-L., (1996), An efficient method for solving linear goal programming problem, Journal of optimization Theory and application, 90,465-469.

[9] change C-T., (2004), On the mixed binary goal programming problems, Applied mathematics and computation, 159,759-768.

[10] Pal, BB., Motiram, BN., Maulik, U., (2003), A goal programming procedure for fuzzy multi-objective linear fractional programming problem, Fuzzy set and system 139,395-405.

[11] charnge, A., Colombo, B., (1972) Optimal stabilization policy: linear goal-interval programming models, socio-Eco plan science, 6,431-435.

[12] Jones, DF., Tamiz., (1995), Expanding the flexibility of goal programming via preference modeling technique, omega 23,41-48.

[13] Vitoria no, B., Romero, C., (1999), Extended interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
[14] change C-T., (2005), Mixed Binary interval goal programming, journal of operation society,50,1280-1283.
[15] Zimmerman, HJ., Fuzzy programming and linear programming with several objective function, Fuzzy set and system,1,45-55.
[16]. Chang, C.-T., (2007). Multi -choice goal programming. Omega. The International Journal of Management Science, 35: 389-396.
[17]. Chang, C.-T. (2008). Revised multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 32: 2587-2595.
[18] Biswal, M.P., Acharya, S., (2009), Transformation of multi-choice linear programming problem, Applied Mathematical and computation, 210,182-188.
[19] Liao, C.N., (2009), Formulating the multi-segment goal programming, Computer Industrial Engineering, 56,138-141.
[20] Biswal, M.P., Acharya, S., (2011), Solving Multi-choice linear programming problems by interpolating polynomials, Mathematical computer Modelling,54,1405-1412.
[21] Chang, C-T., (2011), Multi-choice goal programming with utility functions, European journal of operational Research 215,439-445.
[22] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Multi-coefficient goal programming, Computer Industrial Engineering, 62,616-623.
[23] Chang, T.C., Chen, M.-H., Zhuang, Y.Z., (2012), Revised multi-segment goal programming: present age goal programming, Computer Industrial Engineering, 63,1235-1242.
[24] Ustun, ozden., (2012), Multi -choice goal programming formulation based on the conic secularization Applied Mathematical Modelling, 36,974-988.
[25] Mahapatra, R.D., Roy, K.S., Biswal, P.M., (2013), Multi-choice stochastic transportation problem involving extreme value distribution, Applied Mathematical Modelling,37,2230-2240.
[26] Panda, A., Das, B.C., (2014), Multi-choice linear programming for matrix gams, Applied Mathematical Modelling, 237,411-418.
[27] Patro, K., Acharya, M.M., Biswal, M.P., Acharya, S., (2015), Computation a Multi -choice goal programming, Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
[28] Chang, T.C., (2015), Multi-choice goal programming modelling Applied Mathematical and computation, 271,489-501.
[29] Tabrizi, B.B., Shahanaghi, K. and Jabalameli, M.S. (2012). Fuzzy multi-choice goal programming. Applied Mathematical Modelling, 36, 1415-1420.
[30] Neha Gupta, Abdul Bari (2014). Multi-Choice Goal Programming with Trapezoidal Fuzzy Numbers. International Journal of Operations Research Vol. 11, No. 3, 082–090.