مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۱)، تابستان ۹۸، ص ص۱۷-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تأثیر دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون

محمد صیفوری[1]*، مقصود امیری[2]

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه جامع امام حسین علیه السلام، گروه مدیریت صنعتی، تهران، ایران
۲- استاد، دانشگاه علامه طباطبایی، گروه مدیریت صنعتی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۷ خرداد ۱۳۹۷
پذیرش مقاله: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۸

چکیده

برنامه‌ریزی کارآمد هر سیستم، نیازمند شناخت ماهیت واقعی آن سیستم است. مدل‌های رگرسیون نیز، نمودی از یک سیستم هستند که متغیرهای ورودی آن، نقش ورودی سیستم، ضرایب متغیرهای آن، نقش فرایند سیستم، و متغیرهای پاسخ آن، نقش خروجی سیستم را ایفا می‌کنند؛ بنابراین، برای مدل‌سازی رگرسیون دقیق و برنامه‌ریزی کارآمد، ضروریست که اجزاء مدل شامل متغیرها، تابع هدف و محدودیت‌ها، به درستی شناسایی و تعریف شوند. از جمله روش‌های مدل‌سازی رگرسیون، طراحی آزمایش‌ها و روش سطح پاسخ است که برای شناخت سیستم‌های پیچیده، کاربرد فراوانی دارد. در پژوهش حاضر، قصد داریم رهنمودهایی برای بهبود تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، معرفی کنیم و تأثیر دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون را، بسنجیم. نتایج، نقش مثبت رهنمودهای معرفی شده و تأثیر زیاد دامنه متغیرهای کنترل را بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون، به صورت نتایج عددی، نشان می‌دهد که رهیافتی برای متخصصان مدل‌سازی ریاضی و رگرسیون، طراحی آزمایش‌ها، و روش سطح پاسخ است.

کلمات کلیدی: سیستم، مدل‌سازی رگرسیون، دامنه آزمایش، متغیرهای کنترل، طراحی آزمایش‌ها، روش سطح پاسخ.

۱ مقدمه

مدل‌سازی، بیانی از واقعیت است تا قابلیت شناخت، تحلیل و حل مساله، افزایش یابد. مدل‌سازی ریاضی، یکی از روش‌های مدل‌سازیست که از متغیرها و روابط ریاضی، برای بیان واقعیات، استفاده می‌کند. از جمله مدل‌های ریاضی، مدل‌های رگرسیونی است که برای تخمین روابط میان متغیرهای ورودی با متغیرهای پاسخ، کاربرد دارد. تعیین متغیرهای کنترل، سطوح و دامنه ارزیابی آن‌ها، نقش مهمی در اعتبار مدل رگرسیون دارد. مطالعات پیشین، ضرورت ارایه رهنمودهایی برای شناسایی دقیق‌تر متغیرهای مساله، سطوح و دامنه آن‌ها را نشان می‌دهد. این ضرورت، توسط اندیشمندان حوزه طراحی آزمایش‌های [۲-۱]، مورد تأکید قرار گرفته است. پژوهش‌های

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Mohammad.seifoori@gmail.com

صورت گرفته، نشان می‌دهد که تغییر در طراحی آزمایش‌ها، تغییر در پاسخ‌ها و کارایی مدل‌سازی را به همراه دارد. با این وجود، در بسیاری از پژوهش‌های حوزه طراحی آزمایش‌ها، متغیرها و دامنه آزمایش آن‌ها، بدون روش مشخصی، انتخاب شده‌اند.

یکی از دغدغه‌های مدل‌سازی، جستجوی روش‌هایی برای افزایش اعتبار مدل‌های رگرسیون است. شناخت مشاهدات دورافتاده[1] و جداسازی آن‌ها از مشاهدات مؤثر[2]، یا برآورد خطاهای تصادفی در مشاهدات، از جمله این روش‌هاست. مشاهده‌ای که آن قدر از بقیه داده‌ها انحراف داشته باشد که این ایده را به ذهن بیاورد که توسط روش و مکانیزم دیگری، تولید شده است، داده دورافتاده است [۳]. مدلی کلی برای به‌دست آوردن توزیع و چگالی یک متغیر تصادفی در مواجهه با k داده دورافتاده، معرفی شده است [۴]. این مساله، همچنان مورد توجه پژوهشگران قرار دارد [۷–۵] در پژوهشی، اثر خطاهای تصادفی بر روی یک متغیر مستقل، در دو مدل رگرسیون خطی و غیر خطی، مورد بحث قرار گرفت و نشان داده شد که چگونه اندازه خطاهای تصادفی مربوط به مشاهدات متغیرها، وارد فرایند برآورد پارامترهای مدل می‌شوند و چگونه می‌توان پارامترهای این مدل‌ها را در حضور خطاهای تصادفی، برآورد کرد [۸].

در پژوهش حاضر، به نقش تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل می‌پردازیم. بدین صورت که ابتدا، رهنمودهایی برای شناخت و حذف محدوده‌های نامتناسب با مطلوبیت تابع هدف، از دامنه آزمایش متغیرها، ارایه می‌کنیم. سپس، یک مدل ریاضی معین مرسوم را انتخاب و بر مبنای مثالی عددی، حل می‌کنیم. جواب مدل معین، معیاریست تا مدل‌های رگرسیون تولید شده با دو رویکرد در طراحی آزمایش‌ها، با معیاری مطلوب، قابل مقایسه باشند. مدل‌های رگرسیون، مبتنی بر مدل معین و با استفاده از روش سطح پاسخ، ساخته می‌شوند. در رویکرد اول، دامنه متغیرهای کنترل، به صورت مستقل، تعیین می‌شود. در رویکرد دوم، دامنه متغیرهای کنترل، بر مبنای روابط مساله، تعیین می‌شود. با حل مدل‌های رگرسیون و مقایسه جواب‌ها با جواب مدل معیار، تأثیر تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون، مشخص خواهد شد.

۲ پیشینه پژوهش

در استفاده از رویکردهای آماری در طراحی و تحلیل آزمایش‌ها، ضروریست که افراد دخیل در آزمایش، تصور روشنی از مساله، گردآوری داده‌ها و حداقل ادراک کیفی از چگونگی تحلیل داده‌ها داشته باشند. در شرایطی که آزمایشگر به یادگیری در مورد اینکه کدام متغیرها مهم هستند و چه سطوحی از متغیرها به بهترین جواب منتج می‌شوند، می‌پردازد، دامنه تغییرات متغیرها معمولاً باریک می‌شود. این یادگیری، به دانش فرایندی نیاز دارد [۱]. به دلیل بعید بودن تشخیص رفتار سیستم در کل فضای شدنی مساله، معمولاً ناحیه کوچکی به عنوان ناحیه آزمایش، انتخاب می‌شود. ماهیت مداوم رویکرد سطح پاسخ، به پژوهشگر امکان یادگیری بیش‌تر در مورد مساله

---
[1] Outliers observations
[2] Influential observations

از جمله موقعیت منطقه بهینه یا تعداد تکرار لازم را می‌دهد [۲]. تعیین سطوح متغیرهای قابل کنترل به دلیل ارتباط مستقیم موفقیت فرآیند با این سطوح، با اهمیت است [۹].

نتایج مدل‌سازی اکتشافی، به شیوه طراحی آزمایش‌ها، حساس هستند؛ لذا، یک چارچوب تحت نظارت عامل یعنی یک استعاره طراحی تعاملات میان مدل‌سازان و ذینفعان و روند شبیه‌سازی برای کنترل طرح‌های آزمایشی، مبتنی بر نظارت بر رفتار مدل در فضای خروجی، معرفی شد. نتایج، نشان داد که طراحی آزمایش مبتنی بر بازخورد از فضای خروجی، می‌تواند رویکردی مفید باشد [۱۰]. طراحی آنلاین سازگارانه آزمایش‌ها، اجازه تخمین دقیق پارامترهای مدل محدود شده دامنه و ساختار و دامنه‌ای را که مدل معتبر است، می‌دهد [۱۱]. استفاده از روش‌های متداول طراحی آزمایش‌های مبتنی بر مدل، با فرض دقیق بودن ساختار مدل در فرمول‌بندی معیارهای طراحی، با وجود یک مدل تقریبی، ممکن است به جمع‌آوری و برازش داده‌ها در شرایطی که عملکرد مدل ضعیف است و تخریب قدرت پیش‌بینی مدل، منجر شود؛ لذا، چارچوبی تکراری برای شناسایی مدل‌های تقریبی با وجود محدودیت طراحی آزمایش‌ها به دامنه قابلیت اطمینان، پیشنهاد می‌شود [۱۲]. حل مساله بهینه‌سازی استخراج نفت با رویکرد سطح پاسخ و مقایسه نتایج با نتایج روش کلاسیک مدل‌سازی ریاضی، نشان داد طراحی آزمایش‌ها تنها به عنوان یک روش تخمینی سریع و مقدماتی می‌تواند استفاده شود و به تنهایی، دقت کافی در مدل‌سازی فرایند تزریق گاز ندارد [۱۳].

در پژوهش حاضر، از روش سطح پاسخ برای مدل‌سازی مساله زنجیره‌تأمین و از روش‌های دقیق و فراابتکاری، برای حل مدل، استفاده شده است. استفاده از روش سطح پاسخ در مسایل زنجیره‌تأمین، متداول است. از جمله مدل‌سازی تحلیل علل اثر شلاق چرمی[1] در یک زنجیره‌تأمین بر مبنای دو رویکرد متمرکز و غیر متمرکز که با استفاده از رویکرد سطح پاسخ، انجام شده است [۱۴]. کو[2] و هان[3]، از الگوریتم هیبریدی ژنتیک و بهینه‌سازی ازدحام ذرات، برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی دو سطحی زنجیره‌تأمین، استفاده کردند[۱۵].

۳ بیان مساله

هدف پژوهش حاضر، سنجش تأثیر دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون است. پرسش اصلی، اینست که تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، تا چه میزان باعث بهبود دقت مدل رگرسیون می‌شود؟ پرسش‌های فرعی، عبارتند از:

۱. مدل ریاضی معین برای شبیه‌سازی و تولید مدل‌های رگرسیون، چیست؟
۲. حل مدل معین، به چه صورت امکان‌پذیر است؟
۳. راه حل مدل معین، به چه صورت است؟
۴. تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل برای تولید مدل رگرسیون، به چه صورتی امکان‌پذیر است؟
۵. مدل‌های رگرسیون برگرفته از مدل معین، به چه صورت است؟

[1] bullwhip effect
[2] Kuo
[3] Han

۶. حل مدل‌های رگرسیون، به چه صورت امکان‌پذیر است؟
۷. راه حل مدل‌های رگرسیون، به چه صورت است؟
۸. فاصله جواب و راه حل مدل‌های رگرسیون با مدل معین به عنوان معیار ارزیابی، چقدر است؟

مزیت‌های پژوهش، عبارتند از:

۱. معرفی الگویی برای بهبود طراحی آزمایش‌ها با تعیین سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل.
۲. سنجش تأثیر دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون.

طراحی آزمایش‌ها شامل یک آزمایش یا یک سری آزمایش‌هاست که در آن‌ها به‌طور آگاهانه در متغیرهای ورودی فرآیند تغییراتی ایجاد می‌گردد تا از این طریق میزان تغییرات حاصل در پاسخ خروجی فرآیند، مشاهده و شناسایی شود [۱].

اگر متغیر پاسخ y، وابسته به متغیرهای ورودی قابل کنترل ξ_K ,… ,$\xi_۲$,$\xi_۱$ باشد، رابطه بین متغیر پاسخ با متغیرهای کنترل، به صورت رابطه (۱) است [۲].

$$y = f(\xi_۱,\ \xi_۲, \ldots,\ \xi_K) + \varepsilon \qquad (۱)$$

شکل صحیح تابع پاسخ f ناشناخته است. ε، سایر منابع تغییر را که ذاتاً روی فرایند یا سیستم اثر می‌گذارند و در f محاسبه نمی‌شوند، نشان می‌دهد. برای حالت دو متغیره، مدل کلی مرتبه دوم به‌صورت رابطه (۲)، خواهد بود:

$$\eta = \beta_۰ + \sum_{j=۱}^{k}\beta_j x_j + \sum_{j=۱}^{k}\beta_{ij} x_j^۲ + \beta_k x_k + \sum_{i<j}^{k}\beta_{ij} x_i x_j \qquad (۲)$$

نقشه راه پژوهش برای تحقق هدف پژوهش، شامل گام‌های ذیل است:

۱. الگویی برای تعیین سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، معرفی می‌کنیم.
۲. برای ارزیابی الگو، یک تابع ریاضی معین، انتخاب می‌کنیم. این تابع، تابع سود کل زنجیره تأمین است که در پژوهش‌های بسیاری از جمله [۱۶]، استفاده شده است. این تابع، تک هدفه، احتمالی و دارای تقاضای حساس به قیمت است.
۳. با محاسبه امید ریاضی جملات مربوط به تقاضا در تابع معین، تابع را از حالت احتمالی، به حالت قطعی تبدیل می‌کنیم تا جواب آن، ثابت و معیاری برای ارزیابی مدل‌های رگرسیون باشد.
۴. با توجه به هدف حداکثرسازی، شرط کافی هر جواب بهینه محلی، یک جواب بهینه کلی و استفاده از الگوریتم‌های معین برای یافتن جواب بهینه، اینست که تابع هدف، مقعر و مجموعه محدودیت‌ها، محدب باشند. برای مقعر بودن تابع هدف، ماتریس هشین، باید معین منفی باشد.
۵. با دو رویکرد، توابع رگرسیون سود کل زنجیره تأمین را، تولید می‌کنیم. در رویکرد اول، دامنه آزمایش متغیرهای کنترل را به اندازه تغییرپذیری هر متغیر، و در رویکرد دوم، دامنه آزمایش متغیرهای کنترل را با توجه به روابط سیستمی، تعیین می‌کنیم. سپس، مبتنی بر روش سطح پاسخ، با تولید نقاط آزمایشی و جایگذاری آن‌ها در تابع معین، مقادیر پاسخ را محاسبه و مدل رگرسیون دو رویکرد را، تولید و حل می‌کنیم.

۶. با توجه به غیرخطی بودن تابع معین و وجود محدودیت‌هایی ترکیبی که طراحی آزمایش را از حالت استاندارد خارج می‌سازد، از طرح آزمایشی D-Optimal، استفاده می‌کنیم. برای این کار، از نرم‌افزار Design Expert 7.0.0، استفاده شده است.
۷. با مقایسه جواب مدل‌های رگرسیون با جواب مدل معین به عنوان معیار، تأثیر انتخاب دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بر کارایی مدل‌سازی رگرسیون، نشان داده می‌شود.

٤ تعیین سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل

دانستیم که در صورتی‌که آزمایشگر، دانشی در مورد سیستم مورد مطالعه داشته باشد، می‌تواند تابع رگرسیون را اصلاح نماید. دقت توابع رگرسیون، برخلاف توابع معین، غیرقطعی و وابسته به تعداد و محدوده آزمایش‌ها است. در صورتی‌که مشاهدات یا آزمایش‌های آماری، در محدوده بهینگی یا دور از محدوده عدم بهینگی صورت گیرد، دقت تابع رگرسیون در محدوده بهینگی سیستم، افزایش می‌یابد؛ زیرا این کار، موجب محدود شدن دامنه آزمایشات می‌شود. کاهش اندازه مساله، همچنین، باعث افزایش دقت حل نیز می‌شود. مدل دقیق‌تر و محدودتر، علاوه بر افزایش دقت یافتن جواب بهینه، موجب کاهش زمان و هزینه آزمایش‌ها، می‌شود؛ لذا، تحلیل سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، اهمیت دارد. بدین منظور، رهنمودهایی برای تعیین سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، پیشنهاد می‌کنیم.

در یک مدل ریاضی، پنج عامل، بر دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، اثرگذارند:

۱. قابلیت تغییرپذیری هر متغیر یا دامنه مستقل متغیرها.
۲. قیود و منابع، به صورتی‌که حداکثر مقدار یک متغیر با حداقل مصرف سایر متغیرها و حداقل مقدار یک متغیر با حداکثر مصرف سایر متغیرها، به‌دست می‌آید و معمولاً در نرم‌افزار، به صورت خودکار محاسبه می‌شود.
۳. برد هدف، که با دانش تجربی آزمایشگر، یا بهبود دامنه آزمایش‌ها پس از تشکیل تابع رگرسیون، یا جایگذاری متغیر هدف در نقاط آزمایش که موجب تولید پاسخ‌های مجهول می‌شود، به‌دست می‌آید.
۴. محدوده بهینگی متغیرها، که با تجزیه هدف به ضوابط و متغیرهای سازنده، تحلیل حساسیت متغیرها و تعیین دامنه‌های مطلوب و نامطلوب متغیرها با توجه به جهت مطلوبیت هدف (بیشینه و کمینه)، به‌دست می‌آید.
۵. تأثیر عوامل سیستمی به صورت ضرایب تابع هدف، که با تحلیل سیستمی و تجربی مساله، به‌دست می‌آید.
۶. همچنین، با توجه به جواب نهایی، می‌توان به بهبود آزمایش‌ها در محدوده بهینگی، پرداخت.

۵ اجرا و تحلیل داده‌ها

جدول ۱. جزییات تابع سود کل زنجیره تأمین

نماد اختصاری	توضیحات
$i=\{۱,۲,...,n\}$	انواع محصولات قابل عرضه در زنجیره تأمین
$j=\{۱,۲,...,m\}$	انواع کانال‌های عرضه محصولات در زنجیره تأمین
D_{ij}	تقاضای تصادفی محصول نوع i ام قابل عرضه در کانال توزیع j ام
d_{ij}	تقاضای مورد انتظار محصول نوع i ام قابل عرضه در کانال توزیع j ام
q_{ir}	مقدار عرضه محصول نوع i ام توسط خرده فروش r ام به بازار
p_{ir}	قیمت عرضه هر واحد محصول نوع i ام توسط خرده فروش r ام به بازار
$Min\{q_{ir}, D_{ir}\}$	مقدار قابل فروش محصول نوع i ام توسط خرده فروش r ام به بازار
$q_{ir} - E[Min\{q_{ir}, D_{ir}\}]$	مقدار محصول نوع i ام در مالکیت خرده فروش که از کانال توزیع خرده فروشی، فروش نرفته است
q_{id}	مقدار عرضه محصول نوع i ام توسط تولیدکننده به کانال توزیع مستقیم
p_{id}	قیمت عرضه هر واحد محصول نوع i ام توسط تولیدکننده به کانال توزیع مستقیم
$Min\{q_{id}, D_{id}\}$	مقدار قابل فروش محصول نوع i ام توسط تولیدکننده به کانال توزیع مستقیم
$q_{id} - E[Min\{q_{id}, D_{id}\}]$	مقدار محصول نوع i ام در مالکیت تولیدکننده که از کانال توزیع مستقیم، فروش نرفته است
c_{ir}	بهای تمام شده هر واحد محصول نوع i ام عرضه شده توسط تولیدکننده به خرده فروش r ام
c_{id}	بهای تمام شده هر واحد محصول نوع i ام عرضه شده توسط تولیدکننده به کانال توزیع مستقیم
b_i	قیمت عودت محصول نوع i ام به تولیدکننده توسط خرده فروش
v_i	ارزش اسقاط محصول نوع i ام توسط تولیدکننده
w_i	قیمت فروش محصول نوع i ام توسط تولیدکننده به خرده فروش که مقدار ثابتی است
X_i	متغیر صفر و یک قابلیت عرضه (۱) یا عدم قابلیت عرضه (۰) محصول نوع i ام به طریق کانال توزیع مستقیم
$ij\varepsilon$	فاکتور تصادفی ساز تقاضای محصول نوع i ام در کانال توزیع j ام
β_{ij}	ضریب حساسیت قیمتی[1] محصول نوع i ام در کانال توزیع j ام

مطابق با جدول ۱، متغیر پاسخ، سود کل زنجیره تأمین است. زنجیره تأمین، تک دوره‌ای است و متغیرهای کنترل، عبارتند از: ۱. مقدار محصول نوع i ام که هر بنگاه، از کانال توزیع مستقیم، عرضه می‌کند (q_{id}). ۲. قیمت محصول نوع i ام که هر بنگاه، از کانال توزیع مستقیم، عرضه می‌کند (p_{id}). ۳. مقدار محصول نوع i ام که هر خرده فروش، به بازار عرضه می‌کند (q_{ir}). ۴. قیمت محصول نوع i ام که هر خرده فروش، به بازار عرضه می‌کند (p_{ir}).

تقاضای زنجیره تأمین، غیر قطعی و حساس به قیمت است. رابطه (۳)، این تابع را نشان می‌دهد:

$$D_{ij} = d_{ij} \times \varepsilon_i \quad (۳)$$

[1] Price-Sensitive Coefficient

در صورتی‌که $i \neq 1$ و k≠j فرض شود، معادله تقاضای مورد انتظار، مطابق معادله (۴)، خواهد بود:

$$d_{ij} = \alpha_{ij} - \left(\beta_{ij} \times p_{ij}\right) + \left[\sum_{k=1}^{m} \delta_c \left(1-\delta_p\right) \times \left(\beta_{ij} \times p_{ik}\right)\right] + \left[\sum_{l=1}^{n} \delta_p \left(1-\delta_c\right) \times \left(\beta_{lj} \times p_{lj}\right)\right] + \left[\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \left(\delta_c \delta_p\right) \times \left(\beta_{lj} \times p_{lk}\right)\right] \tag{۴}$$

مطابق رابطه (۵)، α_{ij}، تقاضای پیش بینی شده محصول i ام در کانال توزیع j ام است. α، تقاضای کل محصولات و ثابت است. مطابق روابط (۶) و (۷)، θ_{ij} سهم بازار محصول i ام در کانال توزیع j ام را از تقاضای کل نشان می‌دهد. η، عددی ثابت است. N، کل تعداد محصولات و M، تعداد محصولاتی است که از هر دو کانال، قابل عرضه هستند. رابطه (۸)، حساسیت تقاضای محصول i ام در کانال j ام، نسبت به تغییرات قیمت همان کالا(i) در همان کانال (j) است.

$$\alpha_{ij} = \alpha \times \theta_{ij} \tag{۵}$$

$$\theta_{ir} = \frac{\eta}{\left(\eta \times N\right) + M} \tag{۶}$$

$$\theta_{id} = \frac{1}{\left(\eta \times N\right) + M} \tag{۷}$$

$$-\left(\beta_{ij} \times p_{ij}\right) \tag{۸}$$

روابط(۹)، (۱۰)، و (۱۱)، به ترتیب سود خرده‌فروش، سود تولیدکننده، و سود کل زنجیره تأمین را نشان می‌دهند:

$$\pi_r\left(p_{ir}, q_{ir}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(p_{ir} - b_i\right) \times \left[Min\left\{q_{ir}, D_{ir}\right\}\right] - \left(w_i - b_i\right) \times q_{ir} \tag{۹}$$

$$\pi_m\left(p_{ij}, q_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(w_i - c_{ir}\right) \times q_{ir} - \left(b_i - v_i\right) \times \left(q_{ir} - \left[Min\left\{q_{ir}, D_{ir}\right\}\right]\right) + X_i \times \sum_{i=1}^{M} \left[\left(p_{id} - v_i\right) \times \left[Min\left\{q_{id}, D_{id}\right\}\right] - \left(c_{id} - v_{id}\right) \times q_{id}\right] \tag{۱۰}$$

$$\pi_T^I\left(p_{ij}, q_{ij}\right) = \pi_r\left(p_{ir}, q_{ir}\right) + \pi_m\left(p_{ij}, q_{ij}\right) \tag{۱۱}$$

روابط (۱۲) و (۱۳)، قیود مقدار عرضه و قیمت محصولات را در کانال‌های توزیع نشان می‌دهند:

$$lower\ bound\ of\ q_{ij} \le q_{ij} \le upper\ bound\ of\ q_{ij} \tag{۱۲}$$

$$lower\ bound\ of\ p_{ij} \le p_{ij} \le upper\ bound\ of\ p_{ij} \tag{۱۳}$$

مفروض است که بهای عرضه تولیدکننده به کانال توزیع مستقیم، کم‌تر از عرضه به خرده فروشی است:

$$c_{id} > c_{ir}$$

مفروض است که ضریب حساسیت قیمتی محصول نوع i ام در کانال توزیع j ام، بزرگ‌تر از صفر است:

$$\beta_{ij} > 0$$

بر اساس مثال عددی، زنجیره تأمین شامل سه تولیدکننده، یک خرده فروش، دو کانال توزیع خـرده فروشـی و یک کانال فروش مستقیم، است. سایر اطلاعات، عبارتند از:

$$q_{ij}=\{q_{۱r};q_{۲r};q_{۳r};q_{۱d},q_{۲d}\};\;\; p_{ij}=\{p_{۱r};p_{۲r};p_{۳r};p_{۱d},p_{۲d}\};i=\{۱,۲,۳\};\; j=\{r,d\};\; N\in\{۱,۲,۳\}$$

$$M\in\{۱,۲\};\; \alpha=۱۵۰۰;\; \eta=۲;\; \beta_{ir}=۲/۸;\; \beta_{id}=۳;\varepsilon_{ij}\in Uniform\,Distribution(۰/۸,۱/۲);$$

$$\delta_p=۰/۲;\; \delta_c=۰/۴;\; \delta_c\delta_p=۰/۰۸;c_{۱d}=۲۴;c_{۲d}=۲۵;c_{۱r}=۱۹;c_{۲r}=۲۰;c_{۳r}=۲۲;$$

$$X_۱=۱;X_۲=۱;X_۳=۰;w_۱=۳۵;\; w_۲=۳۷;\; w_۳=۴۰;\;\; b_i=۲۲;\;\; v_i=۱۰$$

حدود بالا و پایین قیمت محصول i ام عرضه شده در کانال توزیع j ام، ثابت و به صورت زیر است:

$$۰\le p_{۱r}\le ۵۳;\; ۰\le p_{۱d}\le ۳۶;\; ۰\le p_{۲r}\le ۵۶;\; ۰\le p_{۲d}\le ۳۸;\; ۰\le p_{۳r}\le ۶۰;$$

حدود بالا و پایین مقدار محصول i ام عرضه شده در کانال توزیع j ام، ثابت و به صورت زیر است:

$$۰\le q_{۱r}+q_{۱d}\le ۶۰۰;\; ۰\le q_{۲r}+q_{۲d}\le ۶۰۰;\; ۰\le q_{۳r}\le ۶۰۰$$

متغیرهای تصمیم‌گیری مساله پس از معادل‌سازی برای سهولت در حل، عبارتند از:

$$q_{۱r}=a;\;\; q_{۱d}=b;\;\; q_{۲r}=c;\;\; q_{۲d}=d;\;\; q_{۳r}=e;\;\;\; p_{۱r}=p;\;\;\; p_{۱d}=g;\;\; p_{۲r}=h;\;\; p_{۲d}=j;\; p_{۳r}=k$$

مطابق رابطه (۱۴)، برای ایجاد معیار ارزیابی، تابع معین را با امید ریاضی فاکتور تصادفی‌ساز، معین می‌کنیم.

$$Expectation\left(D_{ij}\right) = Expectation\left(\varepsilon_{ij}\right)\times d_{ij} \qquad (۱۴)$$

مطابق با مثال عددی و با محاسبه امید ریاضی توابع تقاضا، تابع معین معین سود، عبارت‌است از:

$$f[a,b,c,d,e,p,g,h,j,k]=-۹.a-۱۴.b-۱۰.c-۱۵.d-۱۲.e+(-۱۰.+p)Min[a,۳۷۵.+۰/۸۹۶g+۰/۳۳۶h+ ۰/۲۲۴j+۰/۳۳۶k-۲/۸۳p]+(-۱۰.+۱.g)Min[b,۱۸۷/۵-۳.g+۰/۲۴h+۰/۳۶j+۰/۲۴k+۰/۹۶p]+(-۱۰.+۱.h) Min[c,۳۷۵.+۰/۲۲۴g-۲/۸۳h+۰/۸۹۶j+۰/۳۳۶k+۰/۳۳۶p]+(-۱۰.+۱.j)Min[d,۱۸۷/۵+۰/۳۶g+۰/۹۶h-۳.j +۰/۲۴k+۰/۲۴p]+(-۱۰+k)\min[۰/۳۷۵e+۰/۲۲۴g+۰/۳۳۶h+۰/۲۲۴j+۰/۳۳۶p-۲/۸k]$$

برای حذف قیود شرطی تابع هدف، متغیرهای y_i و قیود جدید (۱۵) و (۱۶) را تعریف می‌کنیم:

$$y_i=Min[a,\; b]; \qquad (۱۵)$$

$$y_i\le a;\; y_i\le b \qquad (۱۶)$$

با تغییر متغیر قیود شرطی و افزودن محدودیت‌های رابطه (۱۶)، تابع معین، به صورت ذیل خواهد بود:

$$f[a,b,c,d,e,p,g,h,j,k,y۱,y۲,y۳,y۴,y۵,y۶,y۷,y۸]=-۹*a-۱۴*b-۱۰*c-۱۵*d-۱۲*e +(-۲۲+p)*y۱+(-۲۲+h)*y۲+(-۲۲+k)*y۳+۱۲*y۴+۱۲*y۵+۱۲*y۶+(-۱۰+g)*y۷+ (-۱۰+j)*y۸$$

محدودیت‌های مدل، عبارتند از:

$$a+b<۶۰۰;c+d<۶۰۰;e<۶۰۰;\; p<۵۳;\; g<۳۶;h<۵۶;\; j<۳۸;k\langle ۶۰;a-y۱\rangle ۰;$$

$$۳۷۵+۰/۸۹۶*g+۰/۳۳۶*h+۰/۲۲۴*j+۰/۳۳۶*k-۲/۸*p-y۱>۰;c-y۲>۰;$$

$$۳۷۵+۰/۲۲۴*g-۲/۸*h+۰/۸۹۶*j+۰/۳۳۶*k+۰/۳۳۶*p-y۲>۰;e-y۳>۰;$$
$$۳۷۵+۰/۲۲۴*g+۰/۳۳۶*h+۰/۲۲۴*j-۲/۸*k+۰/۳۳۶*p-y۳>۰;a-y۴>۰;$$
$$۳۷۵+۰/۸۹۶*g+۰/۳۳۶*h+۰/۲۲۴*j+۰/۳۳۶*k-۲/۸*p-y۴>۰;c-y۵>۰;$$
$$۳۷۵+۰/۲۲۴*g-۲/۸*h+۰/۸۹۶*j+۰/۳۳۶*k+۰/۳۳۶*p-y۵>۰;e-y۶>۰;$$
$$۳۷۵+۰/۲۲۴*g+۰/۳۳۶*h+۰/۲۲۴*j-۲/۸*k+۰/۳۳۶*p-y۶>۰;b-y۷>۰;$$
$$۱۸۷/۵-۳*g+۰/۲۴*h+۰/۳۶*j+۰/۲۴*k+۰/۹۶*p-y۷>۰;d-y۸>۰;$$
$$۱۸۷/۵+۰/۳۶*g+۰/۹۶*h-۳*j+۰/۲۴*k+۰/۲۴*p-y۸>۰;$$
$$\{a,b,c,d,e,p,g,h,j,k,y۱,y۲,y۳,y۴,y۵,y۶,y۷,y۸\}\geq ۰$$

جواب نهایی مدل معین در محیط LINGO، برابر با ۳۵۲۷۹/۶ و مقدار ناشدنی بودن[1]، ۰/۶۳۹۴۸۸۵E-۱۳ است. پس، نمی‌توان با قاطعیت پذیرفت که جواب به‌دست آمده، جواب بهینه سراسری مساله است.

$$a=۳۰۶/۳۴;\ b=۱۷۱/۹;\ c=۲۹۸/۲۸;\ d=۱۶۷/۳۴;\ e=۲۶۰/۲;\ p=۵۳;\ g=۳۶;\ h=۵۶;\ j=۳۸;\ k=۶۰$$
$$y۱=۳۰۶/۳۴;\ y۲=۲۹۸/۲۸;\ y۳=۲۶۰/۲;\ y۴=۳۰۶/۳۴;\ y۵=۲۹۸/۲۸;\ y۶=۲۶۰/۲;\ y۷=۱۷۱/۹;\ y۸=۱۶۷/۳۴$$

اکنون، مدل معین را با الگوریتم ژنتیک و در محیط MATLAB، حل می‌کنیم. تعیین پارامتر الگوریتم ژنتیک، بیش‌تر بر پایه مشاهدات تجربی و تغییرپذیری مساله است [۱۷]. با تعیین پارامتر آزمون و خطا، اندازه جمعیت ۶۰۰، تعداد تکرار ۳۵۰، و نرخ تقاطع ۰/۱، تعیین شد. جواب نهایی، ۳۵۲۷۹/۳ است.

$$a=۳۰۶/۵۹;\ b=۱۷۱/۸۹;\ c=۲۹۸/۲۸;\ d=۱۶۷/۳۳;\ e=۲۶۰/۲۰;\ p=۵۳;\ g=۳۶;h=۵۶;\ j=۳۸;k=۶۰;$$
$$y۱=۳۰۶/۳۴;\ y۲=۲۹۸/۲۸;\ y۳=۲۶۰/۲;\ y۴=۳۰۶/۳۴;\ y۵=۲۹۸/۲۸;\ y۶=۲۶۰/۲;\ y۷=۱۷۱/۸۹;$$
$$y۸=۱۶۷/۳۳۴۵;\ Best\ Fitness\ =\ ۳۵۲۷۹/۳۰۷۹;\ Time\ =\ ۹/۴۷۰۹$$

٦ رویکرد اول: تعیین مستقل دامنه متغیرها

۱. در رویکرد اول، دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، به اندازه ممکن هر متغیر، و مطابق جدول ۲، تعیین شد.

جدول ۲. حدود بالا و پایین متغیرهای کنترل طراحی آزمایش‌ها- رویکرد اول

متغیر کنترل	نام	حد پایین واقعی	حد بالای واقعی	حد پایین کد شده	حد بالای کد شده
$q_{۱r}$		۰/۰۰	۶۰۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۱d}$		۰/۰۰	۶۰۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۲r}$		۰/۰۰	۶۰۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۲d}$		۰/۰۰	۶۰۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۳r}$		۰/۰۰	۶۰۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۱r}$		۰/۰۰	۵۳/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۱d}$		۰/۰۰	۳۶/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۲r}$		۰/۰۰	۵۶/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۲d}$		۰/۰۰	۳۸/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۳r}$		۰/۰۰	۶۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰

[1] Infeasibility

۲. برای مقدار عرضه محصولات ۱ و ۲، دو محدودیت ترکیبی مطابق جدول ۳، وجود دارد:

جدول ۳. محدودیت‌های ترکیبی طراحی آزمایش‌ها- رویکردی اول

حد بالا	محدودیت	حد پایین
۶۰۰/۰۰	+ a + b	۰/۰۰
۶۰۰/۰۰	+ c + d	۰/۰۰

۳. با محاسبه مقدار همبستگی[1] متغیرها به صورت زوجی در Design Expert، استقلال متغیرها، آزمون شد. در برخی آزمایش‌ها، متغیر a با b و c با d، همبستگی کمی پیدا کردند؛ زیرا مقدار محصولات ۱ (متغیر a و b) و ۲ (متغیر c و d) ثابت است. با استفاده از طرح کامپیوتری D-Optimal، وابستگی متغیرها، در نظر گرفته شد.

۴. برای ۱۰ متغیر کنترل، ۷۶ آزمایش برای برازش تابع درجه دوم ضروریست. در نتیجه، توابع درجه اول[2]، 2FI، و درجه دوم[3] قابل برازش است.

۵. به دلیل احتمالی بودن تابع معین، مقادیر پاسخ در هر اجرا، متفاوت می‌شود؛ لذا، محاسبه پاسخ در هر طرح آزمایشی، ۱۰۰ بار تکرار شد. میانگین مقادیر پاسخ را، یک نمونه در نظر می‌گیریم. بر اساس معادله حداقل تعداد نمونه [۱۸]، حداقل تعداد نمونه در سطح خطای ۰/۰۵ و حاشیه خطای ۰/۰۱ میانگین نمونه (۸۳/۰۲=۸۳۰۲×۰/۰۱) برابر است با ۱۰/۳. لذا، همان ۱۰۰ تکرار، کافیست.

۶. برای آن که یک تابع رگرسیون، توانایی خوبی برای برازش اطلاعات داشته باشد، ضریب تعیین باید بالای ۰/۸ باشد. همچنین معنی‌دار بودن تست عدم برازش، بیانگر این است که نمی‌توان از مدل برای پیش‌گویی استفاده نمود. با توجه به آنالیز توابع رگرسیون در جدول ۴، خلاصه آماری توابع رگرسیون در جدول ۵، و تست عدم برازش در جدول ۶، تابع مربعی، پیشنهاد می‌شود. مطابق با نتایج تحلیل واریانس، تابع مربعی از نظر آماری، معنادار است.

جدول ٤. آنالیز توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد اول

پاسخ ۱- سود کل- تبدیل: خیر						
مدل ترتیبی مجموع مربعات [نوع ۱]						
	مقدار F >احتمال P	مقدار F	متوسط مربعات	درجه آزادی	مجموع مربعات	منبع
			۵/۲۵۸E+۰۱۱	۱	۵/۲۵۸E+۰۱۱	متوسط در برابر کل
	<۰/۰۰۰۱	۱۲۴۳/۶۶	۴۰۸۰۸E+۰۱۰	۱۰	۴/۸۰۸E+۰۱۱	خطی در برابر متوسط
	<۰/۰۰۰۱	۱۴۳۶/۵۶	۵/۸۳۸E+۰۰۹	۴۵	۲/۶۲۷E+۰۱۱	2FI در برابر خطی
پیشنهادی	<۰/۰۰۰۱	۱۱۵۲/۴۴	۱/۸۵۴E+۰۰۹	۱۰	۱/۸۵۴E+۰۱۰	مربعی در برابر 2FI
هم‌اثر	<۰/۰۰۰۱	۳۷۵/۲۸	۴/۸۳۶E+۰۰۸	۵	۲/۴۱۸E+۰۰۹	مکعبی در برابر مربعی
			۱/۲۸۹E+۰۰۶	۷۵۲۹	۹/۷۰۲E+۰۰۹	باقی مانده
			۱/۷۱۱E+۰۰۸	۷۶۰۰	۱/۳۰۰E+۰۱۲	کل

[1] Correlation
[2] Linear Function
[3] Quadratic Function

جدول ۵. خلاصه آماری توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد اول

	خلاصه آماری مدل					
	PRESS	$R^۲$ پیش‌بینی شده	$R^۲$ تعیینی	$R^۲$ مربعی	انحراف معیار	منبع
	۲/۹۴۳E+۰۱۱	۰/۶۱۹۹	۰/۶۲۰۵	۰/۶۲۱۰	۶۲۱۷/۷۱	خطی
	۳/۱۰۴E+۰۱۰	۰/۹۵۹۹	۰/۹۶۰۱	۰/۹۶۰۴	۲۰۱۵/۹۸	2FI
پیشنهادی	۱/۲۳۳E+۰۱۰	۰/۹۸۴۱	۰/۹۸۴۲	۰/۹۸۴۳	۱۲۶۸/۳۷	مربعی
هم‌اثر	۹/۸۸۹E+۰۰۹	۰/۹۸۷۲	۰/۹۸۷۴	۰/۹۸۷۵	۱۱۳۵/۱۹	مکعبی

جدول ٦. تست عدم برازش توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد اول

	تست عدم برازش					
	مقدارF < احتمال P	مقدار F	متوسط مربعات	درجه آزادی	مجموع مربعات	منبع
	<۰/۰۰۰۱	۳۶۶۹/۰۳	۴/۷۲۸E+۰۰۹	۶۰	۲/۸۳۷E+۰۱۱	خطی
	<۰/۰۰۰۱	۱۰۸۴/۲۲	۱/۳۹۷E+۰۰۹	۱۵	۲/۰۹۶E+۰۱۰	2FI
پیشنهادی	<۰/۰۰۰۱	۳۷۵/۲۸	۴/۸۳۶E+۰۰۸	۵	۲/۴۱۸E+۰۰۹	مربعی
هم‌اثر	۰	۰/۰۰۰	Aliased	۰	۰/۰۰۰	مکعبی
			۱/۲۸۹E+۰۰۶	۷۵۲۹	۹/۷۰۲E+۰۰۹	خطای خالص

۷. با توجه به نتایج، $R^۲$ تابع مربعی پس از حذف جملات، **۰/۹۸۴۳** است که بیش از ۰/۸ است. نسبت پارازیت[۱]، بیش از ۴ است که حاکی از دقت بالای تابع است. مطابق با روش‌های معمول طراحی آزمایش‌ها، تابع انتخاب شده از نظر تست نرمال بودن، مستقل بودن و تساوی واریانس‌ها بررسی می‌گردد. مطابق نتایج، توزیع نرمال مانده‌ها، تساوی واریانس‌ها، و مستقل بودن داده‌های تابع مربعی، تأیید می‌شود.

۸. مدل مربعی، پس از حذف جملات با معناداری پایین و در حالت ضرایب واقعی، عبارتست از:

$$f\left[a,b,c,d,e,p,g,h,j,k\right]= -۳۴۴۴/۴۶۰۴+۷/۶۷۴۱*a-۱۷/۲۲۷۳*b-۱۴/۷۴۰۹*c-۲۳/۲۱۴۲*d-۳/۳۱۷۹*e-$$
$$۰/۱۳۸۵*p+۲۴۶/۰۳۰۱*g+۱۲۳/۵۲۰۷*h+۱۲۲/۵۰۳*j+۱۷۵/۲۵۶۲*k-۰/۰۵۱۰۲*a*b-۰/۰۰۱۳*a*c+۰/۰۰۲۴*a*d+$$
$$۰/۰۰۲۴*a*e+۰/۴۷۴۱۲*a*p-۰/۰۴۳۸۸*a*g+۰/۰۳۴۷۸*a*h+۰/۰۳۹۱*a*j+۰/۰۴۷۲۳*a*k-۰/۰۰۲۵۶*b*c+$$
$$۰/۰۰۲۵*b*d-۰/۰۳۱۸۷*b*p+۰/۳۱۷۰۳*b*g-۰/۰۴۷۴*b*h+۰/۰۳۵۵۵*b*j-۰/۰۱۴۴۹*b*k+۰/۰۰۲۹۳*c*d-$$
$$۰/۰۰۵۱۳*c*e+۰/۰۴۲۱*c*g+۰/۴۹۰۳۴*c*h+۰/۰۶۰۲۴*c*j-۰/۰۰۰۶۸*d*e-۰/۰۰۹۷۵*d*p-۰/۰۳۰۶*d*g+$$
$$۰/۰۸۴۹*d*h+۰/۱۵۵۸*d*j+۰/۰۳۵۹۲*d*k-۰/۰۷۵۶۲*e*p-۰/۰۲۲۱۷*e*g-۰/۰۲۰۶۵*e*j+۰/۴۵۷۲۶*e*k+$$
$$۱/۳۰۲۹*p*g-۰/۴۴۹۵۴*p*h+۰/۲۷۵۷*p*j-۱/۰۳۵۹*p*k-۰/۸۵۱۶*g*h+۱/۱۷۹۷۷*g*j-۰/۵۰۶۰۸*g*k-$$
$$۰/۹۰۸۸*h*j+۰/۳۴۶۳*h*k-۰/۱۶۹۰۴*j*k-۰/۰۴۱۸*a^۲+۰/۰۰۳*b^۲-۰/۰۰۱۸*c^۲+۰/۰۰۳۲*d^۲-۰/۰۲۰۸۵*e\wedge ۲$$
$$+۱/۱۵۶۲۴*p\wedge ۲-۶/۵۵۴۴۵*g\wedge ۲-۱/۷۹۳۴*h\wedge ۲-۲/۵۲۶۴۴*j\wedge ۲-۲/۴۶۳۸۶*k\wedge ۲$$

۹. با توجه به مقادیر دترمینان تابع هدف، ماتریس هشین نامعین بوده و نقطه اکسترمم، زینی است؛ لذا نمی‌توان هر جواب بهینه محلی را، الزاماً یک جواب بهینه کلی دانست؛ بنابراین، از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌کنیم.

۱۰. قیود مدل، مطابق جداول ۲ و ۳ است. اندازه جمعیت ۴۰، تعداد تکرار ۳۰۰ و نرخ تقاطع، ۰/۱، تعیین شد. جواب نهایی، ۲۲۳۸۲/۶۸ است. با جایگذاری راه حل نهایی در مدل معین، به جواب ۲۳۳۸۶/۶۱ می‌رسیم.

[1] Noise Ratio

$a = ۴۵۴/۸۴;\ b = ۰;\ c = ۶۰۰;\ d = ۰;\ e = ۴۰۹/۶۴;\ p = ۵۳;\ g = ۲۰/۳۸;\ h = ۵۶;\ j = ۲۸/۸۱;\ k = ۶۰$
$Best\ Fitness\ =\ ۲۲۳۸۲/۶۸۰۹;\ Time\ =\ ۰/۶۷۰۹۵$

۷ رویکرد دوم: محدودسازی دامنه متغیرها مبتنی بر سیستم مساله

مبتنی بر تجزیه ساختاری هدف مساله، سودآوری شامل: فروش با قیمتی حداقل کمی بیش از بهای تمام شده، اسقاط با ارزش افزوده، و سایر درآمدهای فروش از جمله اجاره محصولات و خدمات است.

$$p \times q > [FC + (v \times q)] + [(D - q) \times (v_i - b_i - v)] + Etc$$

$$p > c + \alpha; q < D$$

p، q، v، FC، و D، به ترتیب قیمت، فروش، بهای تمام شده، هزینه ثابت، و تقاضا هستند. α+ مقداریست که قیمت باید از بهای تمام شده بیش‌تر باشد تا هزینه ثابت، جبران شود. همچنین، سود شامل اسقاط به قیمتی بالاتر از بها و هزینه عودت است. با توجه به پارامترها و متغیرهای مساله، سایر روش‌های سودآوری، موضوعیت ندارند؛ لذا، با توجه به: نبود انبار و عدم امکان انتقال تقاضا، قیمت عودت (b_i)، ارزش اسقاط (v_i)، و بهای تمام شده (c_{ij}) در مثال عددی، ۱. عرضه بیش از تقاضا. ۲. عودت و اسقاط. ۳. قیمت کم‌تر از بهای تمام شده، دامنه‌های نامطلوب برای سودآوری هستند. برای ارزیابی اثرات تغییرات، قید عرضه به اندازه تقاضا را در آزمایش‌ها، وارد می‌کنیم.

رابطه (۱۷)، محدودیت عرضه در مقابل تقاضا را نشان می‌دهد:

$$q_{ij} \le D_{ij} \tag{۱۷}$$

مقدار محصول $i \in N$ قابل عرضه به دو کانال r و d، مطابق رابطه (۱۸)، محدود به تقاضای محصول i خواهد بود:

$$\sum_{j=۱}^{m} q_{ij} \le \sum_{j=۱}^{m} D_{ij} \tag{۱۸}$$

مقدار عرضه کل محصولات، مطابق رابطه (۱۹)، محدود به کل تقاضای محصولات خواهد بود:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} q_{ij} \le \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} D_{ij} \tag{۱۹}$$

رابطه (۱۷)، دربرگیرنده روابط (۱۸) و (۱۹)، است؛ لذا، قیود عرضه به اندازه تقاضا، بر اساس مثال عددی عبارتند از:

$$a + ۲/۸۰۰ * p - ۰/۸۹۶ * g - ۰/۳۳۶ * h - ۰/۲۲۴ * j - ۰/۳۳۶ * k \le ۳۷۵/۰۰$$
$$b - ۰/۹۶۰ * p + ۳/۰۰۰ * g - ۰/۲۴۰ * h - ۰/۳۶۰ * j - ۰/۲۴۰ * k \le ۱۸۷/۵۰$$
$$c - ۰/۳۳۶ * p - ۰/۲۲۴ * g + ۲/۸۰۰ * h - ۰/۸۹۶ * j - ۰/۳۳۶ * k \le ۳۷۵/۰۰$$
$$d - ۰/۲۴۰ * p - ۰/۳۶۰ * g - ۰/۹۶۰ * h + ۳/۰۰۰ * j - ۰/۲۴۰ * k \le ۱۸۷/۵۰$$
$$e - ۰/۳۳۶ * p - ۰/۲۲۴ * g - ۰/۳۳۶ * h - ۰/۲۲۴ * j + ۲/۸۰۰ * k \le ۳۷۵/۰۰$$

۱. با توجه به حدود بالا و پایین متغیرها و ساده‌سازی محدودیت‌ها، دامنه متغیرها، مطابق جدول ۷، است.

جدول ۷. حدود بالا و پایین متغیرهای کنترل طراحی آزمایش‌ها- رویکرد دوم

متغیر کنترل	نام	حد پایین واقعی	حد بالای واقعی	حد پایین کد شده	حد بالای کد شده
$q_{۱r}$	a	۰/۰۰	۴۵۴/۷۴	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۱d}$	b	۰/۰۰	۲۷۹/۹۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۲r}$	c	۰/۰۰	۴۵۵/۰۸	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۲d}$	d	۰/۰۰	۲۸۱/۳۴	-۱/۰۰	۱/۰۰
$q_{۳r}$	e	۰/۰۰	۴۲۸/۲۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۱r}$	p	۰/۰۰	۵۳/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۱d}$	g	۰/۰۰	۳۶/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۲r}$	h	۰/۰۰	۵۶/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۲d}$	j	۰/۰۰	۳۸/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰
$p_{۳r}$	k	۰/۰۰	۶۰/۰۰	-۱/۰۰	۱/۰۰

۲. محدودیت ترکیبی طراحی آزمایش‌ها، مطابق جدول ۸ است.

جدول ۸. محدودیت های ترکیبی طراحی آزمایش‌ها- رویکرد دوم

حد پایین	محدودیت	حد بالا
۰/۰۰	a + b	۶۰۰/۰۰
۰/۰۰	c + d	۶۰۰/۰۰

۳. متغیرهای کنترل، مستقلند که این موضوع، با محاسبه مقدار همبستگی[1] متغیرها به صورت زوجی آزمون شد.

۴. هر طرح آزمایشی ۷۶ نقطه‌ای، ۱۰۰ بار تکرار شد. میانگین مقادیر پاسخ هر طرح آزمایشی را، یک نمونه در نظر می‌گیریم. حداقل تعداد نمونه در سطح خطای ۰/۰۵ و حاشیه خطای ۰/۰۱ میانگین نمونه اولیه (۱۵/۵۶=۱۵۵۶×۰/۰۱) برابر با ۹۴/۳۷ است. لذا، ۱۰۰ تکرار، کافی است.

۵. با توجه به جداول ۹، ۱۰، ۱۱، و تحلیل واریانس، تابع مربعی از نظر آماری معنادار است و پیشنهاد می‌شود.

جدول ۹. آنالیز توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد دوم

پاسخ ۱- سود کل- تبدیل: خیر						
مدل ترتیبی مجموع مربعات [نوع ۱]						
منبع	مجموع مربعات	درجه آزادی	متوسط مربعات	مقدار F	مقدار F > احتمال P	
متوسط در برابر کل	۱/۸۶۸E+۰۱۰	۱	۱/۸۶۸E+۰۱۰			
خطی در برابر متوسط	۴/۷۴۲E+۰۱۱	۱۰	۴/۷۴۲E+۰۱۰	۹۴۳/۰۲	<۰/۰۰۰۱	
2FI در برابر خطی	۳/۷۷۹E+۰۱۱	۴۵	۸/۳۹۷E+۰۰۹	۱۶۷۷۵/۵۸	<۰/۰۰۰۱	
مربعی در برابر 2FI	۲/۰۶۱E+۰۰۷	۱۰	۲/۰۶۱E+۰۰۶	۴/۱۳	<۰/۰۰۰۱	پیشنهادی
مکعبی در برابر مربعی	۳/۸۴۳E+۰۰۶	۵	۷/۶۸۶E+۰۰۵	۱/۵۴	۰/۱۷۲۹	هم‌اثر
باقی مانده	۳/۷۵۲E+۰۰۹	۷۵۲۹	۴/۹۸۳E+۰۰۵			
کل	۸/۷۴۵E+۰۱۱	۷۶۰۰	۱/۱۵۱E+۰۰۸			

[1] Correlation

جدول ۱۰. خلاصه آماری توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد دوم

	خلاصه آماری مدل					
	PRESS	$R^۲$ پیش‌بینی شده	$R^۲$ تعیینی	$R^۲$	انحراف معیار	منبع
	۳/۸۲۸E+۰۱۱	۰/۵۵۲۸	۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۴۱	۷۰۹۱/۳۳	خطی
	۳/۸۳۴E+۰۰۹	۰/۹۹۵۵	۰/۹۹۵۶	۰/۹۹۵۶	۷۰۷/۴۸	2FI
پیشنهادی	۳/۸۲۳E+۰۰۹	۰/۹۹۵۵	۰/۹۹۵۶	۰/۹۹۵۶	۴۰۶/۰۲	مربعی
هم‌اثر	۳/۸۲۴E+۰۰۹	۰/۹۹۵۵	۰/۹۹۵۶	۰/۹۹۵۶	۷۰۵/۸۹	مکعبی

جدول ۱۱. تست عدم برازش توابع رگرسیون طراحی آزمایش‌ها- رویکرد دوم

	تست عدم برازش					
	مقدار F< احتمال P	مقدار F	متوسط مربعات	درجه آزادی	مجموع مربعات	منبع
	<۰/۰۰۰۱	۱۲۶۳۹/۳۳	۶/۲۹۸E+۰۰۹	۶۰	۳/۷۷۹E+۰۱۱	خطی
	<۰/۰۰۰۱	۳/۲۷	۱/۶۳۰E+۰۰۶	۱۵	۲/۴۴۵E+۰۰۷	2FI
پیشنهادی	۰/۱۷۲۹	۱/۵۴	۷/۶۸۶E+۰۰۵	۵	۳/۸۴۳E+۰۰۶	مربعی
هم‌اثر				۰	۰/۰۰۰	مکعبی
	<۰/۰۰۰۱	۱۲۶۳۹/۳۳	۴/۹۸۳E+۰۰۵	۷۵۲۹	۳/۷۵۲E+۰۰۹	خطای خالص

۶. با توجه به نتایج، $R^۲$ تابع مربعی پس از حذف جملات با معناداری پایین، **۰/۹۹۵۶** است که بیش از ۰/۸ و قابل قبول است. نسبت پارازیت نیز، بیش از ۴ است که دقت بالای تابع مربعی را نشان می‌دهد. نرمال بودن مانده‌ها، تساوی واریانس‌ها، و مستقل بودن داده‌های تابع مربعی نیز، تأیید می‌شود.

۷. مدل مربعی، پس از حذف جملات با معناداری پایین و در حالت ضرایب واقعی، عبارتست از:

$$f\left[a,b,c,d,e,p,g,h,j,k\right]=-۱۲۶/۹۱۵۷-۱۹/۴۲۶۷*a-۲۳/۳۱۲۴*b-۱۹/۴۹۷*c-۲۵/۴۷۵۵*d-۲۱/۹۳۵*e$$
$$-۴/۵۶۵*p+۷/۴۲۲*g+۱/۷۴۲۷*h-۶/۵۷۲۱*j+۵/۰۱۸*k+۰/۹۵۰۳*a*p-۰/۰۰۶۹*a*h-۰/۰۰۶۱*a*k$$
$$-۰/۰۰۵۵۸*b*d+۰/۰۰۱۲*b*e+۰/۰۲۷۴*b*p+۰/۹۲۲*b*g-۰/۰۱۹۱*b*j+۰/۰۰۰۶۷۵*c*e+$$
$$۰/۹۵۰۴*c*h-۰/۰۱۰۲*c*j+۰/۰۰۴۶۲*c*k+۰/۰۰۱۱۶*d*e-۰/۰۱۱*d*p-۰/۰۲۷*d*h+۰/۹۹۰۵*d*j$$
$$-۰/۰۱۲۲*d*k+۰/۰۰۵۳*e*p+۰/۰۰۹۹*e*j+۰/۹۴۳*e*k+۰/۰۴۸*p*g-۰/۰۸۱۶*p*j-۰/۰۵۶۱*p*k$$
$$+۰/۰۸۵*g*k-۰/۰۵۵۷*h*j+۰/۰۸۹۶*h*k+۰/۰۰۳۱*a^۲+۰/۰۱۰۳*d^۲+۰/۱۲۶۸*p^۲-۰/۲۵۱۲*g^۲+$$
$$۰/۲۷۹۴۴*j\wedge ۲-۰/۰۷۳*k\wedge ۲$$

۸. با توجه به نامعین بودن ماتریس هشین تابع رگرسیون رویکرد دوم، از الگوریتم ژنتیک، استفاده می کنیم.

۹. قیود مدل، مطابق محدودیت‌های جداول ۷ و ۸ است. اندازه جمعیت **۳۰**، تعداد تکرار **۳۰۰**، و نرخ تقاطع ۰/۱، تعیین شد. جواب نهایی، **۳۲۷۶۰/۱۶۷** است که به جواب معیار؛ یعنی **۳۵۲۷۹/۶**، نزدیک است. فاصله **۲۵۱۹/۴۳** واحدی با جواب معیار، می‌تواند به دلیل قیود احتمالی یا حذف تعدادی از ترکیبات متغیرها از آزمایش‌ها باشد.

۱۰.

$$a=۳۰۶/۳۴;\ b=۱۷۱/۹;\ c=۲۹۸/۲۸;\ d=۱۶۷/۳۴;\ e=۲۶۰/۲;\ p=۵۳;\ g=۳۶;\ h=۵۶;\ j=۳۸;\ k=۶۰$$
$$Best\ Fitness=۳۲۷۶۰/۱۶۷۷;\ Time=۰/۵۷۱۸۴$$

۸ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

جدول ۱۲. مقایسه جواب مدل‌های مختلف مساله سود کل زنجیره تأمین

مدل سود	سود نهایی	سود با جایگذاری راه حل	اختلاف با سود مدل معین	روش حل
معین (معیار)	۳۵۲۷۹/۶	۳۵۲۷۹/۶	۰	لینگو/ الگوریتم ژنتیک
رگرسیون رویکرد اول	۲۲۳۸۲/۶	۲۳۳۸۶/۶	۱۱۸۹۳–	الگوریتم ژنتیک
رگرسیون رویکرد دوم	۳۲۷۶۰/۲	۳۵۲۷۹/۶	۰	الگوریتم ژنتیک

مطابق با یافته‌های پژوهش، جواب مدل معین به عنوان معیار، برابر با ۳۵۲۷۹/۶ بوده که بالاترین مقدار سود محاسبه شده است. جواب نهایی رویکرد اول طراحی آزمایش‌ها با تعیین مستقل دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، ۲۲۳۸۲/۶۸ است که در بازه صفر تا ۳۵۲۷۹/۶، فاصله زیادی با جواب مدل معیار دارد. راه حل رویکرد اول نیز، متفاوت با راه حل مدل معیار است. در نتیجه، تعیین مستقل دامنه آزمایش متغیرهای کنترل بدون توجه به اهداف، فرایند، و قیود مساله و به عبارت دیگر سیستم مساله، باعث کاهش دقت تابع آماری و افت ارزش جواب بهینه، خواهد شد.

جواب نهایی رویکرد دوم طراحی آزمایش‌ها با تعیین سیستمی دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، ۳۲۷۶۰/۲ است که در بازه ۰ تا ۳۵۲۷۹/۶، فاصله بسیار کم‌تری با جواب مدل معیار دارد که با توجه به ماهیت احتمالی تابع رگرسیون، قابل قبول است. راه حل رویکرد دوم نیز، مشابه راه حل مدل معیار است؛ بنابراین، محدودسازی دامنه مشاهده/ آزمایش متغیرهای کنترل با توجه به تجزیه‌وتحلیل‌های سیستمی و تجربی مساله، باعث افزایش دقت تابع تشکیل شده در نمایش رفتار مساله در محدوده بهینه و کوچک شدن فضای مساله شده، تأثیر زیادی در یافتن جواب بهینه دارد. این امر، به ویژه در توابع شرطی و چندضابطه‌ای، از اهمیت زیادی برخوردار است؛ زیرا برای پوشش رفتار تابع هدف در تمام فضای مساله، لازم است نقاط آزمایش، متناسب با مساله، برنامه‌ریزی گردند.

همچنین، استفاده از ابزارهایی همچون معادلات ساختاری برای تجزیه هدف به متغیرها و فرایند سازنده، موجب شناخت سیستم مساله و انتخاب دامنه‌ای محدودتر برای آزمایش متغیرهای کنترل می‌شود. کاهش فضای آزمایش مساله، افزایش دقت و اعتبار تابع رگرسیون و افزایش دقت حل را، در پی دارد. بهبود طراحی آزمایش‌ها، علاوه بر افزایش دقت جواب، موجب کاهش زمان و هزینه آزمایش‌ها نیز، خواهد شد.

رهیافت اصلی پژوهش، ضرورت توجه به طرح مساله، مشاهده، مصاحبه، و ارزیابی تجربی، برای تحلیل سیستمی مساله، تحلیل ساختاری هدف و شناخت رفتارهای مختلف تابع هدف و تعیین دامنه ممکن، شدنی، مورد انتظار و مطلوب هر متغیر، برای طراحی آزمایش‌ها، همچنین استفاده از بازخورد، پس از مدل‌سازی و حل مساله است.

پیشنهاد می‌شود پژوهشگران، با توجه به اهمیت طرح کلان مساله در طراحی نمونه‌گیری‌ها یا آزمایش‌های آماری، دانش علمی و تجربی خود را در مورد مساله، افزایش دهند. بدین منظور، استفاده از نظرسنجی خبرگان، تجارب و مطالعات پیشین، ابزارهای تحلیل ساختاری و فرایندی و نیز شش رهنمود پژوهش حاضر برای تعیین دامنه آزمایش متغیرهای کنترل، می‌تواند مفید باشد.

ضروریست که در مدل‌سازی رگرسیون، دامنه آزمایش متغیرها، با توجه به هدف بهینه‌سازی یا پیش‌بینی، انتخاب شود. همچنین، برای ایجاد چرخه بازخورد، می‌توان دامنه آزمایش متغیرهای کنترل را پس از ساخت و حل مدل، با توجه به برد مورد نظر هدف و محدوده راه حل بهینه، مجدداً تعیین کرد. این امر، به ویژه در شرایطی که دانش چندانی در مورد مساله وجود ندارد، می‌تواند مفید باشد. همچنین، افزودن متغیرها با تجزیه متغیرها به زیرمتغیرهای سازنده، می‌تواند ضمن افزایش پیچیدگی آزمایش‌ها، باعث افزایش دقت آزمایش‌ها شود.

منابع

[۸] بابانژاد، منوچهر. (۱۳۹۶). حل معادلات برآوردکننده مدل‌های رگرسیون با اندازه خطای تصادفی روی متغیر مستقل به روش بهینه‌سازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۵۴، ۸۹–۹۸.

[۹] بلوریان، شادی.، خلیلیان، صفیه.، خلیلیان، محمد. (۱۳۹۲). بهینه سازی شرایط استخراج کورکومین از ریزوم گیاه زردچوبه (Curcuma longa) به کمک امواج فراصوت با استفاده از روش سطح پاسخ. نشریه فرآوری و نگهداری مواد غذایی، جلد ۱۲، شماره ۱، ۷۵– ۸۹.

[۱۳] قیم، محمد علی.، کیهانی، محمد.، بهجومنش، میلاد.، توکلی، رئوف. (۱۳۹۱). مقایسه ی روش طراحی آزمایش باکس - بنکن (Box-Behnken) و مدل‌سازی ریاضی در تخمین تولید پنج حلقه چاه با استفاده از روش Gas lift. اولین کنفرانس و نمایشگاه تخصصی نفت، ایران، تهران.

[۱۸] جانسون، ریچارد آ.، باتاچاریا، گوری ک. (۱۹۹۶). آمار، اصول و روش ها (ویرایش سوم). ترجمه فتاح میکائیلی (۱۳۸۰). جلد اول. اصفهان: ارکان اصفهان.

[1] Montgomery, Douglas C. (1997). Design and Analysis of Experiment (5th Ed). New York: John Wiley & Sons.

[2] Myers, Raymond H., Montgomery, Douglas C. (1995). Response Surface Methodology: product optimization using designed experiments. New York: John Wiley & Sons.

[3] Hawkins, D. M. (1980). Identification of outliers, London: Chapman and Hall.

[4] Dixit, U. J. (1987). Characterization of the gamma distribution in the presence of k outliers. Bull. Bombay Mathematical Colloquium, 4, 54-59.

[5] Birch, Jeffrey B., Fleischer, Shelby J. (1984). Diagnostic methods for detecting outliers in regression analysis. Environmental Entomology, 13 (1), 19-25.

[6] Pusparum, Murih., Kurnia, Anang., Alamudi, Aam. (2017). Winsor approach in regression analysis with outlier. Applied Mathematical Sciences, 11, 41, 2031 – 2046.

[7] Bin, Riccardo De., Boulesteix, Anne-Laure., Sauerbrei, Willi. (2017) Detection of influential points as a byproduct of resampling-based variable selection procedures. Computational Statistics & Data Analysis, 116, 19-31.

[10] Moallemi, Enayat A., Elsawah, Sondoss., Ryan, Michael J. (2018). An agent-monitored framework for the output-oriented design of experiments in exploratory modelling. Simulation Modelling Practice and Theory, 89, 48-63.

[11] Tsay, Calvin., Pattison, Richard C., Baldea, Michael., Weinstein, Ben., Hodson, Steven J., Johnson, Robert D. (2017). A superstructure-based design of experiments framework for simultaneous domain-restricted model identification and parameter estimation. Computers & Chemical Engineering, 107, 408-426.

[12] Quaglio, Marco., Fraga, Eric S., Galvanin, Federico. (2018).Constrained model-based design of experiments for the identification of approximated models. IFAC-PapersOnLine, 51, 515-520.

[14] Hassanzadeh, Amir., Jafarian, Ahmad., Amiri, Maghsoud. (2014). Modeling and analysis of the causes of bullwhip effect in centralized and decentralized supply chain using response surface method. Applied Mathematical Modeling, 38, 2353-2365.

[15] Kuo, R.J., Han, Y.S. (2011). A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – A case study on supply chain model. Applied Mathematical Modelling, 35, 3905–3917.

[16] Hsieh, Chung-Chi., Chang, Yih-Long., Wu, Cheng-Han. (2014). Competitive pricing and ordering decisions in a multiple-channel supply chain. Int. J.Production Economics, 154, 156–165.
[17] Elegbede, C., Adjallah, K. (2003). Availability allocation to repairable systems with genetic algorithms: a multi-objective formulation. Reliability Engineering and System Safety, 82 (3), 319–330.