

## ارایه یک مدل فازی برای مساله زمان بندی شیفت های کاری پرستاران

حامد جعفری<sup>\*۱</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان، گلپایگان، ایران

رسید مقاله: ۱۴ اسفند ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۵ بهمن ۱۳۹۸

### چکیده

در سال های اخیر مساله زمان بندی پرستاران توجه بسیاری از محققین را به خود جلب نموده است. در این مساله تعداد پرستاران مورد نیاز برای شیفت های کاری هر روز در طول افق زمان بندی مشخص بوده و هدف از حل مساله تخصیص پرستاران به شیفت ها است به طوری که تعداد پرستاران مورد نیاز هر روز پوشش داده شوند. در این تحقیق ابتدا یک مدل برنامه ریزی ریاضی با هدف ماکزیمم نمودن مجموع ترجیحات پرستاران برای شیفت های کاری ارایه می گردد. در نظر گرفتن عدم قطعیت می تواند منجر به ایجاد جواب های مطلوب تری برای بسیاری از مسایل دنیای واقعی شود. بر اساس این دیدگاه در این تحقیق عدم قطعیت در ترجیحات پرستاران برای شیفت های کاری در نظر گرفته شده است. بدین منظور یک رویکرد برنامه ریزی فازی بر مبنای عملگر فازی ورنر برای مساله مورد بررسی پیشنهاد می گردد. سپس برای بررسی کارایی مدل فازی پیشنهادی چندین مساله نمونه تصادفی تولید و توسط مدل ارایه شده حل می شوند. در نهایت برای تعیین میزان تأثیر در تغییر پارامترهای مساله بر روی نتایج به دست آمده، یک تحلیل حساسیت انجام خواهد گرفت. نتایج به دست آمده کیفیت بالای مدل فازی پیشنهادی را نشان می دهد.

**کلمات کلیدی:** سیستم های سلامت، مساله زمان بندی پرستاران، ترجیحات پرستاران، مدل برنامه ریزی ریاضی، برنامه ریزی فازی، عملگر فازی ورنر.

### ۱ مقدمه

در سال های اخیر مساله زمان بندی پرستاران<sup>۲</sup> در بیمارستان ها توجه بسیاری از مدیران و محققان را به خود جلب نموده است. در این مساله تعداد پرستاران مورد نیاز برای شیفت های کاری تعیین شده در هر روز در طول افق زمان بندی مشخص بوده و هدف از حل مساله تخصیص پرستاران به شیفت های در دسترس است به طوری که تقاضاهای هر روز پوشش داده شوند [۱]. شایان ذکر است عوامل مختلفی برای زمان بندی پرستاران باید در نظر

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hamed.jafari@gut.ac.ir

<sup>2</sup> Nurse scheduling problem (NSP)

گرفته شوند. برخی از این عوامل عبارتند از: کل ساعات کاری مجاز پرستاران در طول افق زمان‌بندی، شیفت‌های کاری موجود در هر روز، سیاست‌های مختلف مدیران بیمارستان و تعداد روزهای افق برنامه‌ریزی [۲، ۳]. مسأله زمان‌بندی پرستاران به طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی<sup>۱</sup> و الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری<sup>۲</sup> متنوعی نیز برای حل مسأله پیشنهاد شده‌اند.

برخی از محققین از رویکرد مدل‌سازی ریاضی برای حل مسأله استفاده نموده‌اند. الیاکوب و شرالی [۴] یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای تخصیص عادلانه<sup>۳</sup> شیفت‌ها به پرستاران ارایه نموده‌اند. بارد و پورنومو [۵] از روش آزادسازی لاگرانژ<sup>۴</sup> برای حل مسأله استفاده نموده‌اند، در حالی که بلین و دموملیستر [۶] و مانهوت و ونهوک [۷] یک روش شاخه و قیمت<sup>۵</sup> ارایه کرده‌اند. همچنین آختون و همکاران [۸] یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی<sup>۶</sup> را برای حل یک مسأله چند هدفه پیشنهاد داده‌اند. لی و همکاران [۹]، زاندا و همکاران [۱۰] و اسویرسکو و همکاران [۱۱] تحقیقات مشابهی را در این زمینه انجام داده‌اند.

برخی از محققین مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی دو مرحله‌ای<sup>۷</sup> را برای حل مسأله توسعه داده‌اند. آرتور و راویندران [۱۲] یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی دو مرحله‌ای را پیشنهاد داده‌اند که در مرحله اول روزهای کاری و غیرکاری پرستاران تعیین شده و در مرحله دوم شیفت‌های کاری به روزهای کاری پرستاران تخصیص داده می‌شوند. والوکسیس و همکاران [۱۳] کل ساعات کاری پرستاران در طول افق برنامه‌ریزی را در مرحله اول تعیین نموده و در مرحله دوم شیفت‌های کاری را به پرستاران تخصیص می‌دهند. همچنین لیون و همکاران [۱۴] یک مدل برنامه‌ریزی دو مرحله‌ای برای مینیمم‌نمودن مجموع کل انحرافات از ترجیحات پرستاران<sup>۸</sup> برای شیفت‌های کاری را ارایه نموده‌اند.

برخی دیگر از محققین نیز از الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری برای حل مسأله استفاده نموده‌اند. داسلند و تامپسون [۱۵] الگوریتم جستجوی ممنوع<sup>۹</sup> را برای حل مسأله پیشنهاد نموده‌اند. هرتز و کوبلر [۱۶] از ترکیب الگوریتم‌های جستجوی محلی<sup>۱۰</sup> و الگوریتم ژنتیک<sup>۱۱</sup> برای حل مسأله استفاده کرده‌اند. ماجومدار و بونیا [۱۷] الگوریتم ژنتیک و گاتجاهر و رانر [۱۸] الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان<sup>۱۲</sup> را پیشنهاد داده‌اند. همچنین جعفری و سلماسی [۱]، دورنر و همکاران [۱۹] و لین و همکاران [۲۰] الگوریتم شبیه‌سازی تبرید<sup>۱۳</sup> را برای حل مسأله ارایه داده‌اند.

<sup>1</sup> Mathematical programming models

<sup>2</sup> Heuristic and meta-heuristic algorithms

<sup>3</sup> Fairly assignment

<sup>4</sup> Lagrangian relaxation method

<sup>5</sup> Branch and price method

<sup>6</sup> Goal programming method

<sup>7</sup> Two-stage mathematical programming models

<sup>8</sup> Nurses' preferences

<sup>9</sup> Tabu-search algorithm

<sup>10</sup> Local search algorithm

<sup>11</sup> Genetic algorithm

<sup>12</sup> Ant colony optimization algorithm

<sup>13</sup> Simulated annealing algorithm

در نظر گرفتن عدم قطعیت منجر به تولید جواب‌های با کیفیت بالاتری در بسیاری از مسایل دنیای واقعی می‌گردد. بر اساس این دیدگاه در این تحقیق از یک رویکرد مدل‌سازی فازی<sup>۱</sup> برای حل مساله استفاده خواهد شد. بدین منظور عملگر فازی ورنر<sup>۲</sup> برای فازی‌سازی در مساله مورد بررسی پیشنهاد می‌گردد.

ساختار تحقیق مورد بررسی بدین صورت خواهد بود: در بخش ۲ مساله مورد بررسی تعریف شده و در بخش ۳ یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مساله تعریف شده فرمول‌بندی می‌شود. در بخش ۴ از یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای بررسی عدم قطعیت در مساله مورد بررسی استفاده می‌گردد. نتایج محاسباتی در بخش ۵ ارائه خواهند شد. همچنین بخش ۶ مربوط به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی تحقیق انجام شده است.

## ۲ مساله مورد بررسی

در این بخش مساله مورد بررسی در این تحقیق شامل مفروضات، محدودیت‌ها و اهداف در نظر گرفته شده معرفی خواهد شد. ابتدا مفروضات مساله ارائه می‌شوند. مفروضات مساله مورد بررسی عبارتند از:

- افق برنامه‌ریزی در مساله مورد بررسی به صورت دو هفته‌ای (۱۴ روزه) در نظر گرفته شده است.
- هر روز به سه شیفت ۸ ساعته تقسیم می‌شود به طوری که تقاضای تعداد پرستاران مورد نیاز در هر کدام مشخص بوده و پرستاران به این شیفت‌ها تخصیص داده می‌شوند. شیفت‌های کاری هر روز عبارتند از: شیفت صبح (۸ صبح تا ۴ عصر)، شیفت عصر (۴ عصر تا ۱۲ شب) و شیفت شب (۱۲ شب تا ۸ صبح).
- تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت‌های هر روز در طول افق برنامه‌ریزی به صورت ثابت در نظر گرفته شده است.

- ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری نیز مد نظر قرار داده شده است. هر پرستار به هر کدام از شیفت‌ها عددی تخصیص می‌دهد که نشان‌دهنده میزان علاقه وی برای کار کردن در آن شیفت است. اعداد ۱، ۲ و ۳ به ترتیب مبین میزان علاقه کم، متوسط و زیاد یک پرستار برای کار کردن در یک شیفت خاص هستند.
- محدودیت‌های در نظر گرفته شده در مساله مورد بررسی به صورت زیر خواهند بود:

- هر پرستار در هر روز فقط می‌تواند در یک شیفت انجام وظیفه نماید.
- اگر پرستاری در یک روز خاص در شیفت شب کار کند، وی در روز بعد تعطیل خواهد بود.
- هر پرستار می‌تواند حداکثر در سه روز کاری متوالی انجام وظیفه نماید.
- کل ساعات کاری مجاز هر پرستار در طول افق برنامه‌ریزی بین ۶۰ تا ۸۰ ساعت خواهد بود.
- در طول افق زمان‌بندی باید تقاضای شیفت‌های کاری هر روز برای تعداد پرستاران مورد نیاز پوشش داده شوند.

- اگر پرستاری در یک روز خاص درخواست مرخصی دهد، وی باید در آن روز خاص تعطیل باشد.
- همچنین تابع هدف مساله مورد بررسی عبارت است از:

<sup>1</sup> Fuzzy modelling approach

<sup>2</sup> Werner's fuzzy operator

- ماکزیم نمودن مجموع کل ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری در طول افق برنامه‌ریزی  
 یک نمونه از ساختار جواب مساله مورد بررسی در جدول ۱ نشان داده شده است. در این مساله تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت‌های صبح، عصر و شب هر روز به ترتیب برابر با ۲، ۱ و ۱ هستند. همچنین نمادهای  $E$ ،  $M$ ،  $N$  و - به ترتیب نشان‌دهنده شیفت صبح، شیفت عصر، شیفت شب، روزهای مرخصی و روزهای تعطیل پرستاران در هر روز هستند. کل ساعات کاری هر پرستار در طول افق زمان‌بندی و تعداد پرستاران تخصیص داده شده به هر شیفت در هر روز نیز در جدول نشان داده شده‌اند.

جدول ۱. یک نمونه از ساختار جواب مساله مورد بررسی

تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت صبح هر روز = ۲		تعداد کل پرستاران = ۶													
		تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت عصر هر روز = ۱													
		تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت شب هر روز = ۱													
کل ساعت کاری	روز														پرستار
	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
	صبح	عصر	شب	مرخصی	عطل	صبح	عصر	شب	مرخصی	عطل	صبح	عصر	شب	مرخصی	
۸۰	-	N	E	M	-	N	E	-	M	M	M	-	N	E	۱
۸۰	M	M	-	M	-	E	M	M	-	N	E	E	-	N	۲
۸۰	E	-	N	E	M	-	N	E	E	L	N	M	-	M	۳
۸۰	N	M	M	-	E	M	-	N	M	E	-	M	M	-	۴
۸۰	L	M	M	-	N	M	M	-	N	M	M	-	M	M	۵
۸۰	M	E	-	N	M	E	-	M	E	M	L	N	E	-	۶
	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳	۲	۲	۲	۲	صبح
	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۲	۱	۱	۱	۱	۱	عصر
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	شب

### ۳ مدل برنامه‌ریزی ریاضی

در این بخش یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی با هدف ماکزیم نمودن مجموع کل ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری در طول افق برنامه‌ریزی ارایه می‌شود.

اندیس‌ها و پارامترهای مورد استفاده عبارتند از:

تعداد کل پرستاران	$n$
اندیس پرستاران ( $i = 1, 2, \dots, n$ )	$i$
اندیس روزها ( $j = 1, 2, \dots, 14$ )	$j$
تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت صبح هر روز در طول افق برنامه‌ریزی	$dm$

- $de$  تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت عصر هر روز در طول افق برنامه‌ریزی
- $dn$  تعداد پرستاران مورد نیاز در شیفت شب هر روز در طول افق برنامه‌ریزی
- $l_{i,j}$  اگر پرستار  $i$  در روز  $j$  درخواست مرخصی بدهد، مقدار این پارامتر برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.
- $pm_i$  اگر میزان علاقه پرستار  $i$  برای کار کردن در شیفت صبح کم، متوسط و یا زیاد باشد، مقدار این پارامتر به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ خواهد بود.
- $pe_i$  اگر میزان علاقه پرستار  $i$  برای کار کردن در شیفت عصر کم، متوسط و یا زیاد باشد، مقدار این پارامتر به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ خواهد بود.
- $pn_i$  اگر میزان علاقه پرستار  $i$  برای کار کردن در شیفت شب کم، متوسط و یا زیاد باشد، مقدار این پارامتر به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ خواهد بود.

متغیرهای تصمیم‌گیری مساله نیز به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$OFF_{i,j}$  اگر پرستار  $i$  در روز  $j$  تعطیل باشد، مقدار این متغیر برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.

$M_{i,j}$  اگر پرستار  $i$  در روز  $j$  در شیفت صبح کار کند، مقدار این متغیر برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.

$E_{i,j}$  اگر پرستار  $i$  در روز  $j$  در شیفت عصر کار کند، مقدار این متغیر برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.

$N_{i,j}$  اگر پرستار  $i$  در روز  $j$  در شیفت شب کار کند، مقدار این متغیر برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.

با توجه به پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری تعریف شده، مدل برنامه‌ریزی ریاضی مربوط به مساله مورد بررسی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$Max \left\{ MatObj = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{14} (pm_i M_{i,j} + pe_i E_{i,j} + pn_i N_{i,j}) \right\} \quad (1)$$

s.t.

$$M_{i,j} + E_{i,j} + N_{i,j} + OFF_{i,j} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (2)$$

$$N_{i,j} \leq OFF_{i,j+1} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 13 \quad (3)$$

$$OFF_{i,j} + OFF_{i,j+1} + OFF_{i,j+2} + OFF_{i,j+3} \geq 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 11 \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{14} (\lambda M_{i,j} + \lambda E_{i,j} + \lambda N_{i,j}) \geq 60 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{14} (\lambda M_{i,j} + \lambda E_{i,j} + \lambda N_{i,j}) \leq \lambda_0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i,j} \geq dm \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n E_{i,j} \geq de \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n N_{i,j} \geq dn \quad j = 1, 2, \dots, 14 \quad (9)$$

$$OFF_{i,j} \geq l_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (10)$$

$$M_{i,j}, E_{i,j}, N_{i,j}, OFF_{i,j} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (11)$$

تابع هدف مربوط به رابطه (۱) نشان‌دهنده جمع کل ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری در طول افق زمان‌بندی است. با توجه به رابطه (۲) هر پرستار در هر روز فقط می‌تواند در یک شیفت کار کند. رابطه (۳) تضمین می‌کند که اگر پرستاری در یک روز خاص در شیفت شب انجام وظیفه نماید، روز بعد تعطیل خواهد بود. با توجه به رابطه (۴) هر پرستار می‌تواند حداکثر در سه روز کاری متوالی کار کند. روابط (۵) و (۶) تضمین می‌کنند که کل ساعات کاری هر پرستار در طول افق برنامه‌ریزی بین ۶۰ تا ۸۰ ساعت است. با استفاده از روابط (۷)، (۸) و (۹) تعداد پرستاران مورد نیاز به ترتیب در شیفت‌های صبح، عصر و شب هر روز پوشش داده می‌شوند. همچنین با توجه به رابطه (۱۰) روزهای مرخصی درخواست شده توسط پرستاران به آنها اختصاص داده خواهند شد.

#### ۴ مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی

نظریه فازی اولین بار توسط پروفسور زاده معرفی شده است [۲۱]. در ادبیات موضوع رویکرد مدل‌سازی فازی، عملگرهای فازی متفاوتی توسط زیمرمن و زایسنو [۲۲، ۲۳] تعریف شده‌اند. در این تحقیق از رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای بررسی عدم قطعیت در مسأله زمان‌بندی پرستاران استفاده می‌گردد. بر این اساس عملگر فازی ورنر [۲۴] برای فازی‌سازی در مسأله مورد بررسی به کار گرفته خواهد شد. این عملگر به صورت ترکیبی از عملگر فازی مینیمم<sup>۱</sup> [۲۵] و عملگر فازی میانگین وزن‌دار<sup>۲</sup> [۲۶] ارایه می‌شود.

نمادهای زیر را در نظر بگیرید:

$X$	مجموعه جواب‌های شدنی
$K$	تعداد توابع عضویت <sup>۳</sup>
$\mu_j$	تابع عضویت $j$ ( $j = 1, 2, \dots, K$ )
$w_j$	مقدار وزن تابع عضویت $j$ ( $j = 1, 2, \dots, K$ )

<sup>۱</sup>Minimum fuzzy operator

<sup>۲</sup>Weighted averaging fuzzy operator

<sup>۳</sup>Membership functions

مقدار ضریب جبرانی<sup>۱</sup> مشخص شده مربوط به عملگر فازی ورنر ( $\lambda \in [0, 1]$ )  
 در این صورت مجموعه جواب‌های فازی مربوط به عملگر فازی ورنر به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\tilde{A} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \lambda \operatorname{Min}_j (\mu_j(x)) + (1-\lambda) \sum_{j=1}^K w_j \mu_j(x) \right\} \quad (12)$$

به وضوح اگر مقدار  $\lambda$  برابر با یک باشد، عملگر فازی ورنر مین عملگر فازی مینیمم بوده و اگر مقدار آن برابر با صفر باشد، این عملگر به عملگر فازی میانگین وزندار تبدیل خواهد شد.

در این شرایط جواب بهینه مربوط به مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی مساله از طریق ماکزیمم نمودن تابع عضویت  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  بر روی مجموعه جواب‌های شدنی  $X$  به دست خواهد آمد. این مساله می‌تواند به صورت زیر به یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی خطی تبدیل گردد:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Max} \left\{ \alpha + (1-\lambda) \sum_{j=1}^K w_j \alpha_j \right\} \\ & \text{s.t.} \\ & \alpha + \alpha_j \leq \mu_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, K \\ & \alpha, \alpha_j \in [0, 1] \quad j = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن سایر محدودیت‌های مساله

همان‌طور که در بخش‌های قبل نیز اشاره شد، در این تحقیق عدم قطعیت بر روی ترجیحات پرستاران برای شیفتهای کاری در طول افق برنامه‌ریزی در نظر گرفته شده است. بر این اساس توابع عضویت مساله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$\mu_i$  تابع عضویت مربوط به میزان کل علاقه پرستار  $i$  برای انجام وظیفه در شیفتهای کاری تخصیص داده شده به وی در طول افق زمان‌بندی

فرض کنید  $TP_i = \sum_{j=1}^{14} (pm_i M_{i,j} + pe_i E_{i,j} + pn_i N_{i,j})$  مین مجموع کل ترجیحات پرستار  $i$  برای

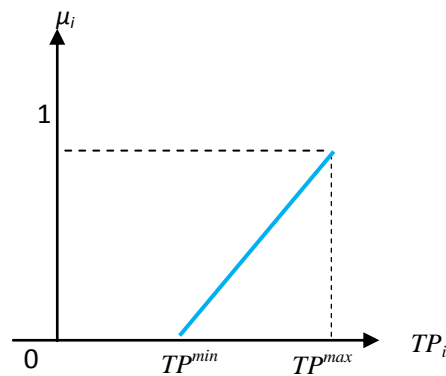
انجام وظیفه در شیفتهای کاری تخصیص داده شده به وی در طول افق زمان‌بندی بوده و نمادهای  $TP^{\min}$  و  $TP^{\max}$  نیز به ترتیب نشان‌دهنده حداقل و حداکثر مقدار کل ترجیحی باشند که یک پرستار می‌تواند به واسطه شیفتهای کاری تخصیص داده شده به وی در طول افق زمان‌بندی به دست آورد. در این صورت با استفاده از مفهوم فازی‌سازی مثلثی<sup>۲</sup> داریم:

<sup>۱</sup>Compensatory coefficient

<sup>۲</sup>Triangular fuzziness concept

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{if } TP_i \geq TP^{\max} \\ \frac{TP_i - TP^{\min}}{TP^{\max} - TP^{\min}} & \text{if } TP^{\min} \leq TP_i \leq TP^{\max} \\ 0 & \text{if } TP_i \leq TP^{\min} \end{cases} \quad (14)$$

با توجه به مفروضات و محدودیت‌های ارایه شده در بخش ۲، هر پرستار می‌تواند حداکثر در سه روز کاری متوالی انجام وظیفه نموده و کل ساعات کاری هر پرستار در طول افق برنامه‌ریزی نیز بین ۶۰ تا ۸۰ ساعت است. بنابراین حداقل و حداکثر تعداد شیفت‌های کاری هر پرستار در طول افق برنامه‌ریزی به ترتیب برابر با ۸ و ۱۰ خواهند بود. همچنین با توجه به مقادیر تخصیص داده شده به میزان ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری، حداقل و حداکثر مقدار علاقه یک پرستار برای کار در یک شیفت خاص به ترتیب برابر با ۱ و ۳ هستند. بنابراین حداقل و حداکثر مقدار کل ترجیحی که یک پرستار می‌تواند به واسطه شیفت‌های کاری تخصیص داده شده به وی در طول افق زمان‌بندی به دست آورد، به ترتیب برابر با  $8 \times 1 = 8$  و  $10 \times 3 = 30$  خواهند بود. ساختار تابع عضویت مسأله مربوط به پرستار  $i$  در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. ساختار توابع عضویت در مسأله مورد بررسی

با توجه به توضیحات ارایه شده و مدل توسعه داده شده در بخش ۳، مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی مسأله با استفاده از عملگر فازی ورنر به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \left\{ \text{FuzObj} = \alpha + (1 - \lambda) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \right\} \\ & \text{s.t.} \\ & (TP^{\max} - TP^{\min})(\alpha + \alpha_i) \leq \sum_{j=1}^{14} (pm_i M_{i,j} + pe_i E_{i,j} + pn_i N_{i,j}) - TP^{\min} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \alpha, \alpha_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (15)$$

با در نظر گرفتن محدودیت‌های (۲) تا (۱۱)



## ۵ نتایج محاسباتی

در این بخش نتایج محاسباتی به دست آمده از مدل برنامه ریزی ریاضی فازی پیشنهاد شده ارائه می شوند. بدین منظور ۸ مساله نمونه تصادفی تولید شده و توسط مدل فازی پیشنهادی حل می شوند. شایان ذکر است که برای تولید مسایل نمونه توزیع یکنواخت گسسته<sup>۱</sup> مورد استفاده قرار گرفته است. بازه های تولید پارامترها در مسایل نمونه نیز در جدول ۲ نشان داده شده است. همچنین برای حل مسایل نمونه از نسخه ۱۲ نرم افزار CPLEX استفاده شده است. نتایج محاسباتی به دست آمده از حل مسایل نمونه تولید شده توسط مدل برنامه ریزی ریاضی فازی در جدول ۳ خلاصه شده است. لازم به ذکر است که برای حل این مسایل نمونه، مقدار ضریب جبرانی  $\lambda$  مربوط به عملگر فازی ورنر برابر با  $0/3$  در نظر گرفته شده است.

در جدول ۳، مقادیر بهینه توابع هدف مربوط به مدل های برنامه ریزی فازی و برنامه ریزی ریاضی برای مسایل نمونه تولید شده ارائه شده اند. میانگین توابع عضویت و میانگین ترجیحات پرستاران برای شیفتهای کاری تخصیص داده شده به آنها در طول افق برنامه ریزی نیز در این جدول مشخص شده اند. همچنین این مقادیر به ترتیب در شکل های ۲-۵ نشان داده شده اند.

جدول ۲. دامنه پارامترها در مسایل نمونه تولید شده

پارامتر	دامنه
$n$	$DU[2, 30]$
$dm, de, dn$	$DU[1, 8]$
$l_{i,j}$	$DU[0, 1]$
$pm_i, pe_i, pn_i$	$DU[1, 3]$

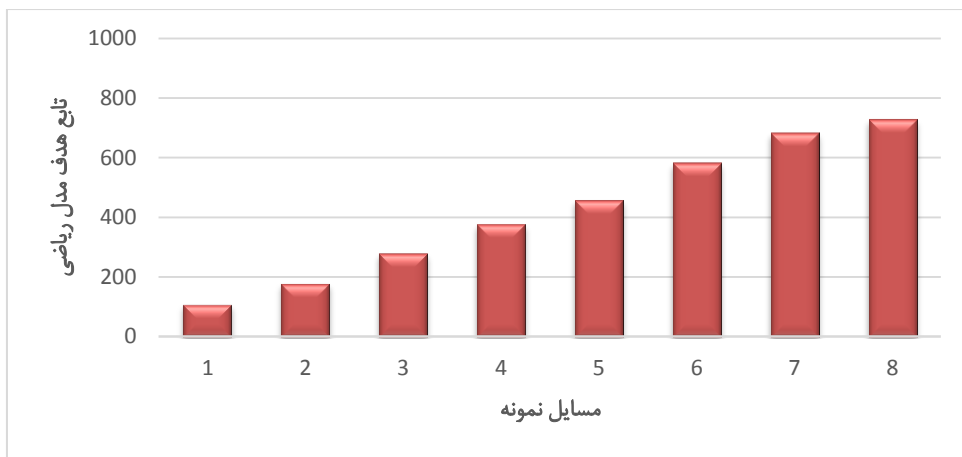
جدول ۳. نتایج حاصل از مدل برنامه ریزی فازی پیشنهادی برای مسایل نمونه تولید شده

مساله	تعداد پرستاران	تابع هدف مدل فازی	تابع هدف مدل ریاضی	میانگین توابع عضویت	میانگین ترجیحات پرستاران
		$FuzObj$	$MatObj$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TP_i$
۱	۴	۰/۸۵۲	۱۱۰	۰/۸۸۶	۲۷/۵۰۰
۲	۸	۰/۴۸۹	۱۸۰	۰/۶۵۹	۲۲/۵۰۰
۳	۱۲	۰/۵۱۵	۲۸۰	۰/۶۹۷	۲۳/۳۳۳
۴	۱۶	۰/۵۲۴	۳۷۸	۰/۷۱۰	۲۳/۶۲۵
۵	۲۰	۰/۵۰۱	۴۵۸	۰/۶۷۷	۲۲/۹۰۰
۶	۲۴	۰/۵۴۴	۵۸۲	۰/۷۳۹	۲۴/۲۵۰
۷	۲۸	۰/۵۴۸	۶۸۲	۰/۷۴۴	۲۴/۳۵۷
۸	۳۰	۰/۵۴۴	۷۲۷	۰/۷۳۸	۲۴/۲۳۳

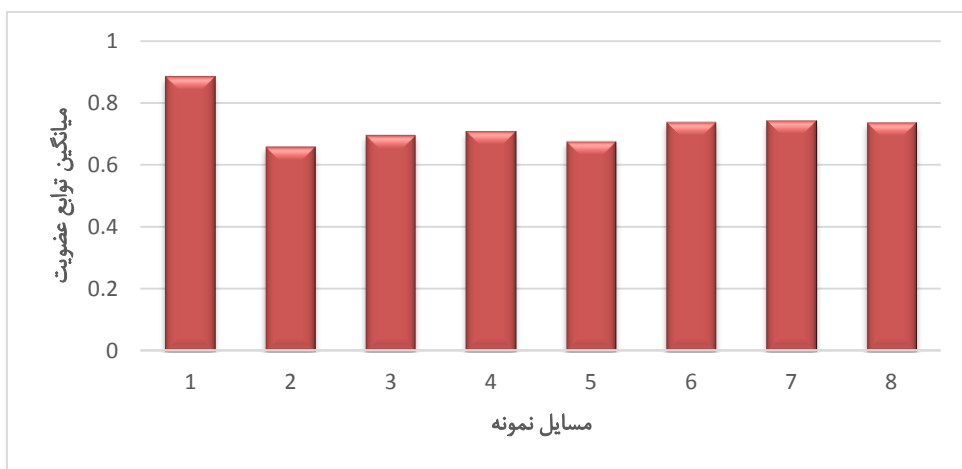
<sup>1</sup>Discrete uniform (DU) distribution



شکل ۲. مقادیر بهینه تابع هدف مدل برنامه‌ریزی فازی تحت مسائل نمونه تولیدشده



شکل ۳. مقادیر بهینه تابع هدف مدل برنامه‌ریزی ریاضی تحت مسائل نمونه تولیدشده



شکل ۴. مقادیر میانگین توابع عضویت تحت مسائل نمونه تولیدشده



شکل ۵. مقادیر میانگین ترجیحات پرستاران تحت مسایل نمونه تولید شده

اکنون برای شفاف‌سازی مدل فازی ارایه شده، مساله نمونه ۲ دارای ۸ پرستار مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقادیر پارامترهای مربوط به این مساله در جدول ۴ ارایه شده‌اند. برنامه زمان‌بندی بهینه به‌دست آمده از مدل برنامه‌ریزی فازی پیشنهادی نیز در جدول ۵ نشان داده شده است.

با توجه به برنامه زمان‌بندی بهینه ارایه شده، تمامی مفروضات و محدودیت‌های در نظر گرفته شده در بخش ۲ پوشش داده شده‌اند. همچنین ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری مطلوب آنها تا حد ممکن مدنظر قرار گرفته است.

برای مثال پرستار ۳ را در نظر بگیرید. با توجه به مقادیر پارامترهای نشان داده شده در جدول ۴، پرستار ۳ علاقه‌مند است تا حد ممکن در شیفت صبح انجام وظیفه نماید. همچنین این پرستار در روزهای ۲ و ۱۳ (یکشنبه هفته اول و پنجشنبه هفته دوم) درخواست مرخصی داده است. مطابق با برنامه زمان‌بندی ارایه شده در جدول ۵، ترجیحات پرستار ۳ برای انجام وظیفه در شیفت‌های کاری تا حد ممکن در نظر گرفته شده است. همچنین وی در روزهای مرخصی درخواست شده نیز تعطیل است.

جدول ۴. مقادیر پارامترهای مربوط به مسأله نمونه ۲

$n = 8$			$dn = 1$	$de = 2$	$dm = 2$	پرستار												
$pn_i$	$pe_i$	$pm_i$	$l_{i,j}$															
			روز															
			۱۴	۱۳	۱۲		۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۳	۲	۲	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۳	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲
۱	۱	۳	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۳
۱	۳	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴
۲	۲	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۵
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۶
۳	۳	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۷
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸

جدول ۵. برنامه زمان‌بندی بهینه به‌دست آمده از مدل برنامه‌ریزی فازی پیشنهادی برای مسأله نمونه ۲

کل ساعت کاری		روز														پرستار
		۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
		صبح	عصر	شب	صبح	عصر	شب	صبح	عصر	شب	صبح	عصر	شب	صبح	عصر	
۸۰	N	L	N	E	-	N	E	M	-	N	M	M	-	N	۱	
۸۰	N	E	E	-	N	E	E	-	N	-	N	E	-	N	۲	
۸۰	M	L	M	M	M	-	M	M	M	-	M	M	L	M	۳	
۸۰	E	-	E	E	E	-	E	E	E	-	E	E	E	-	۴	
۸۰	L	M	M	M	-	M	M	M	-	M	E	-	N	E	۵	
۸۰	M	E	-	N	E	M	-	M	E	E	-	N	M	L	۶	
۸۰	E	M	-	E	M	-	N	E	-	E	L	M	M	M	۷	
۸۰	-	N	E	-	E	E	L	N	M	M	-	E	E	E	۸	
	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۴	۲	۲	۲	۳	۲	۲	صبح	
	۲	۲	۳	۳	۳	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۳	۲	۲	عصر	
	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۲	شب	

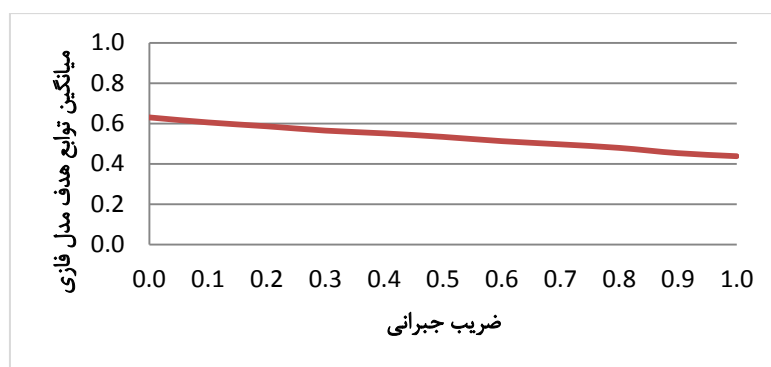
در این مرحله برای بررسی میزان تأثیر در تغییر ضریب جبرانی  $\lambda$  بر روی مقادیر بهینه تابع هدف فازی به‌دست آمده در مسایل نمونه تولید شده، یک تحلیل حساسیت بر روی این پارامتر انجام می‌شود. نتایج حاصل از تحلیل حساسیت تحت مسایل نمونه تولید شده در جدول ۶ ارایه شده‌اند. میانگین نتایج به‌دست آمده نیز در سطر

آخر این جدول خلاصه شده است. همچنین نحوه تغییر میانگین توابع هدف فازی به دست آمده از مسایل نمونه تولید شده تحت تغییر ضریب جبرانی  $\lambda$  در شکل ۶ نشان داده شده است.

با توجه به نتایج، افزایش مقدار ضریب جبرانی  $\lambda$  منجر به کاهش توابع هدف فازی به دست آمده خواهد شد. همچنین عملگر فازی ورنر با مقدار ضریب جبرانی برابر با صفر بهترین نتایج را به همراه خواهد داشت. در واقع از آنجایی که عملگر فازی ورنر با ضریب جبرانی صفر معادل با عملگر فازی میانگین وزن دار است، به وضوح عملگر فازی میانگین وزن دار بهترین عملکرد را در مقایسه با سایر مقادیر ضریب جبرانی خواهد داشت.

**جدول ۶.** نتایج حاصل از تحلیل حساسیت بر روی پارامتر ضریب جبرانی

مساله	تعداد پرستاران	مقادیر بهینه تابع هدف فازی										
		ضریب جبرانی										
		۱/۰	۰/۹	۰/۸	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰/۰
۱	۴	۰/۷۳۲	۰/۷۳۶	۰/۷۵۵	۰/۷۶۸	۰/۷۷۶	۰/۸۱۳	۰/۸۴۱	۰/۸۵۲	۰/۸۹۸	۰/۹۰۷	۰/۹۱۲
۲	۸	۰/۳۸۰	۰/۳۹۱	۰/۴۰۳	۰/۴۰۳	۰/۴۰۹	۰/۴۳۹	۰/۴۶۴	۰/۴۸۹	۰/۵۰۴	۰/۵۳۳	۰/۵۹۰
۳	۱۲	۰/۳۵۱	۰/۳۶۲	۰/۳۹۴	۰/۴۳۱	۰/۴۷۵	۰/۴۷۶	۰/۵۰۶	۰/۵۱۵	۰/۵۲۳	۰/۵۳۶	۰/۵۹۵
۴	۱۶	۰/۳۷۰	۰/۴۰۶	۰/۴۴۷	۰/۴۶۱	۰/۴۷۸	۰/۴۹۸	۰/۵۲۴	۰/۵۲۴	۰/۵۲۷	۰/۵۴۹	۰/۵۷۴
۵	۲۰	۰/۴۰۸	۰/۴۱۰	۰/۴۱۴	۰/۴۳۶	۰/۴۵۶	۰/۴۹۱	۰/۴۹۲	۰/۵۰۱	۰/۵۲۳	۰/۵۴۷	۰/۵۶۶
۶	۲۴	۰/۴۷۲	۰/۴۹۵	۰/۴۹۶	۰/۵۰۷	۰/۵۰۸	۰/۵۱۸	۰/۵۲۷	۰/۵۴۴	۰/۵۶۵	۰/۵۹۱	۰/۶۰۶
۷	۲۸	۰/۴۰۰	۰/۴۲۳	۰/۴۷۱	۰/۴۹۶	۰/۵۱۰	۰/۵۲۵	۰/۵۲۷	۰/۵۴۸	۰/۵۶۶	۰/۵۷۵	۰/۵۸۱
۸	۳۰	۰/۳۸۹	۰/۴۰۰	۰/۴۵۰	۰/۴۷۰	۰/۴۸۷	۰/۵۰۸	۰/۵۲۶	۰/۵۴۴	۰/۵۸۲	۰/۶۰۳	۰/۶۱۷
	میانگین	۰/۴۳۸	۰/۴۵۳	۰/۴۹۷	۰/۵۱۲	۰/۵۳۳	۰/۵۵۱	۰/۴۹۷	۰/۵۶۵	۰/۵۸۶	۰/۶۰۵	۰/۶۳۰



**شکل ۶.** نحوه تغییر میانگین توابع هدف فازی به دست آمده از مسایل نمونه با تغییر ضریب جبرانی

## ۶ نتیجه گیری و جمع بندی

در این تحقیق مساله زمان بندی شیفتهای کاری پرستاران با هدف ماکزیم نمودن مجموع کل ترجیحات پرستاران برای شیفتهای کاری در طول افق برنامه ریزی مورد بررسی قرار گرفت.

ابتدا با در نظر گرفتن مفروضات و محدودیت‌های مربوط به مسأله مورد بررسی، یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی صفر و یک فرمول‌بندی شد.

در نظر گرفتن عدم قطعیت در بسیاری از مسایل دنیای واقعی می‌تواند منجر به تولید جواب‌هایی با کیفیت بالاتر گردد. بر این اساس در این تحقیق از یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای بررسی عدم قطعیت در مسأله زمان‌بندی پرستاران استفاده شد. شایان ذکر است عدم قطعیت در مسأله مورد بررسی بر روی ترجیحات پرستاران برای شیفت‌های کاری در طول افق برنامه‌ریزی در نظر گرفته شده است. همچنین برای فازی‌سازی این ترجیحات عملگر فازی ورنر مورد استفاده قرار گرفته است.

در نهایت برای ارزیابی مدل برنامه‌ریزی فازی پیشنهاد شده چندین مسأله نمونه تولید و حل شدند. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده کیفیت بالای زمان‌بندی‌های تولید شده توسط مدل فازی پیشنهادی هستند. همچنین برای بررسی میزان تأثیر در تغییر ضریب جبرانی مربوط به عملگر فازی ورنر بر روی نتایج به‌دست آمده، یک تحلیل حساسیت انجام گرفت. با توجه به نتایج به‌دست آمده، با افزایش مقدار ضریب جبرانی مقادیر توابع هدف فازی کاهش خواهند یافت. همچنین عملگر فازی ورنر با مقدار ضریب جبرانی برابر با صفر که معادل با عملگر فازی میانگین وزن‌دار است، بهترین نتایج را به همراه خواهد داشت.

در مطالعات آتی می‌توان از سایر عملگرهای فازی از جمله عملگر فازی مینیمم [۲۵] و عملگر فازی میانگین وزن‌دار [۲۶-۲۸] نیز برای حل مسأله استفاده نموده و نتایج به‌دست آمده را با یکدیگر مقایسه نمود.

## منابع

- [۲۷] خوینی، م.، خرم، ا.، (۱۳۸۶). بهینه‌سازی تابع هدف خطی با توجه به محدودیت‌های معادلات فازی با عملگر Yager's union. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۴)، ۱۳-۲۸.
- [۲۸] خوینی، م.، خرم، ا.، (۱۳۸۷). بهینه‌سازی تابع هدف چندگانه با توجه به محدودیت‌های معادلات فازی با عملگر Yager's union. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۵(۱۸)، ۹-۱۹.
- [1] Jafari, H., Salmasi, N. (2015). Maximizing the nurses' preferences in nurse scheduling problem: mathematical modeling and a meta-heuristic algorithm. *Journal of Industrial Engineering International*, 11, 439-458.
- [2] Demirbilek, M., Branke, J., Strauss, A. (2018). Dynamically accepting and scheduling patients for home healthcare. *Health care management science*, 1-16.
- [3] El Adoly, A. A., Gheith, M., Fors, M. N. (2018). A new formulation and solution for the nurse scheduling problem: A case study in Egypt. *Alexandria Engineering Journal*.
- [4] Al-Yakoob, S. M., Sherali, H. D. (2007). Mixed-integer programming models for an employee scheduling problem with multiple shifts and work locations. *Annals of Operations Research*, 155, 119-142.
- [5] Bard, J. F., Purnomo, H. W. (2007). Cyclic preference scheduling of nurses using a Lagrangian-based heuristic. *Journal of Scheduling*, 10, 5-23.
- [6] Beliën, J., Demeulemeester, E. (2008). A branch-and-price approach for integrating nurse and surgery scheduling. *European journal of operational research*, 189, 652-668.
- [7] Maenhout, B., Vanhoucke, M. (2013). An integrated nurse staffing and scheduling analysis for longer-term nursing staff allocation problems. *Omega*, 41, 485-499.
- [8] Aktunc, E. A., Tekin, E. (2018). Nurse Scheduling with Shift Preferences in a Surgical Suite Using Goal Programming. *Industrial Engineering in the Industry*, 23-36.
- [9] Li, J., Liu, Y. (2018). Property analysis of triple implication method for approximate reasoning on atanassovs intuitionistic fuzzy sets. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(5), 95-116.

- [10] Zanda, S., Zuddas, P., Seatzu, C. (2018). Long term nurse scheduling via a decision support system based on linear integer programming: A case study at the University Hospital in Cagliari. *Computers & Industrial Engineering*, 126, 337-347.
- [11] Svirsko, A. C., Norman, B. A., Rausch, D., Woodring, J. (2019). Using Mathematical Modeling to Improve the Emergency Department Nurse-Scheduling Process. *Journal of Emergency Nursing*, Inpress.
- [12] Arthur, J. L., Ravindran, A. (1981). A multiple objective nurse scheduling model. *AIIE transactions*, 13, 55-60.
- [13] Valouxis, C., Gogos, C., Goulas, G., Alefragis, P., Housos, E. (2012). A systematic two phase approach for the nurse rostering problem. *European Journal of Operational Research*, 219, 425-433.
- [14] Leaven, L., Qu, X. (2018). A two-stage stochastic programming model for phlebotomist scheduling in hospital laboratories. *Health Systems*, 1-11.
- [15] Dowsland, K. A., Thompson, J. M. (2000). Solving a nurse scheduling problem with knapsacks, networks and tabu search. *Journal of the Operational Research Society*, 51, 825-833.
- [16] Hertz, A., Kobler, D. (2000). A framework for the description of evolutionary algorithms. *European Journal of Operational Research*, 126, 1-12.
- [17] Majumdar, J., Bhunia, A. K. (2007). Elitist genetic algorithm for assignment problem with imprecise goal. *European Journal of Operational Research*, 177, 684-692.
- [18] Gutjahr, W. J., Rauner, M. S. (2007). An ACO algorithm for a dynamic regional nurse-scheduling problem in Austria. *Computers & Operations Research*, 34, 642-666.
- [19] Doerner, K. F., Maniezzo, V. (2018). Metaheuristic search techniques for multi-objective and stochastic problems: a history of the inventions of Walter J. Gutjahr in the past 22 years. *Central European Journal of Operations Research*, 1-26.
- [20] Lin, C. C., Hung, L. P., Liu, W. Y., Tsai, M. C. (2018). Jointly rostering, routing, and rostering for home health care services: A harmony search approach with genetic, saturation, inheritance, and immigrant schemes. *Computers & Industrial Engineering*, 115, 151-166.
- [21] Klir, G. J., Yuan, B. (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A. Zadeh*. World Scientific Publishing Co., Inc..
- [22] Zimmermann, H. J., Zysno, P. (1980). Latent connectives in human decision making. *Fuzzy sets and systems*, 4, 37-51.
- [23] Zimmermann, H. J., Zysno, P. (1983). Decisions and evaluations by hierarchical aggregation of information. *Fuzzy sets and systems*, 10, 243-260.
- [24] Werners, B. M. (1988). Aggregation models in mathematical programming. *Mathematical models for decision support*, 295-305.
- [25] Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy sets and systems*, 1, 45-55.
- [26] Yager, R. R. (1988). Ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 15-29.