مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۱)،تابستان ۹۸، ص ص ۵۷-۳۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روش دوگان لاگرانژی برای مساله کوتاه‌ترین مسیر با درنظرگرفتن طرح‌های عمرانی همراه با محدودیت بودجه

سکینه صفری[۱]، مهدی زعفرانیه [۲*]، مریم ابارشی[۳]، ابراهیم لعل رحیمی[۴]

۱-دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران
۲-استادیار، دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران
۳-مدرس دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران
۴-دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران

رسید مقاله: ۱۴ بهمن ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۱۷ اسفند ۱۳۹۷

چکیده

در این مقاله یک مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن برای هر یک از یال‌های شبکه طرح‌های عمرانی مختلف با هزینه اجرای مشخص و نیز میزان کاهش مشخص برای زمان (طول) یال درنظر گرفته شده‌است. هدف مساله تعیین مسیر بین یک زوج مبدأ و مقصد و انتخاب طرح‌های بهینه بر روی یال‌های این مسیر است، به گونه‌ای که زمان تغییر یافته مسیر، کم‌ترین مقدار ممکن بوده و هزینه اجرایی طرح‌های انتخابی از میزان بودجه در دسترس تجاوز نکند. با استفاده از روش دوگان لاگرانژی دسته‌ای از محدودیت‌های مساله آزاد شده و مساله دوگان لاگرانژی به دو زیر مساله کوچک‌تر تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از الگوریتم زیرگرادیان یک جواب نزدیک به بهینه برای مساله اولیه حاصل می‌شود. در انتها با بررسی مدل پیشنهاد شده بر روی یک شبکه کوچک و نیز بر روی شبکه خراسان، جواب مساله برای زوج‌های مبدأ و مقصد مختلف و با درنظرگرفتن پارامترهای متفاوت تعیین می‌شود.

کلمات کلیدی: شبکه حمل‌ونقل، مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید، روش دوگان لاگرانژی، روش زیرگرادیان.

۱ مقدمه و تاریخچه

مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر، یکی از مسایل بهینه‌سازی شبکه است که در علوم مختلف از جمله مسایل مربوط به حمل‌ونقل، نقشه‌کشی و شبکه‌های ارتباطی کاربردهای فراوانی داشته و از دیر باز مورد توجه پژوهشگران بوده است. عینی و عشقی [۱] با استفاده از الگوریتم مستطیل آبشاری و ماتریس انتقال کوتاه‌ترین مسیرها در شبکه‌های

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: m.zaferanieh@hsu.ac.ir

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

دوری را بررسی و حل کردند. کاربرد مساله کوتاه‌ترین مسیر در مسیریابی وسایل نقلیه نیز بسیار مورد توجه قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به دره میرکی [۲] اشاره کرد.

در مقایسه با سایر مسایل بهینه‌سازی ترکیبیاتی مانند مساله‌ی کوتاه‌ترین درخت فراگیر، مساله‌ی تخصیص و مساله‌ی حمل‌ونقل، تحقیق در مورد مدل‌های ریاضی مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر نسبتاً دیر آغاز شده است [۳].

روش‌های ماتریسی برای کوتاه‌ترین مسیر با طول یال واحد در سال ۱۹۴۶ توسط لانداحل و رانج معرفی شد [۴]. این روش‌ها به دلیل کاربرد در شبکه ارتباطات و به‌خصوص شبکه‌های عصبی مورد توجه قرار گرفتند. مساله کوتاه‌ترین مسیر توسط فورد در سال ۱۹۵۶ فرمول‌بندی شد [۵]. سپس درسال ۱۹۵۷ دانتزیک دستورالعمل ترسیمی برای استفاده از روش سیمپلکس در این مساله را تشریح کرد [۶]. برای حل مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر الگوریتم‌های مختلفی معرفی شده است که از جمله می‌توان به الگوریتم دایجسترا، الگوریتم بلمن-فورد، الگوریتم فلوید-وارشال و الگوریتم تصحیح برچسب گذاری اشاره کرد [۷، ۸].

با توجه به این‌که تمام منابع در طبیعت محدود هستند، انسان در عمل نمی‌تواند از هیچ منبعی به‌طور نامحدود بهره‌برداری کند. به طور مثال منابع سوخت، انرژی، آب و ... همگی تمام شدنی هستند؛ بنابراین یک مساله‌ی کاربردی در زمینه بهینه‌سازی، مساله‌ی بهینه‌سازی مقید است و انسان ناگزیر مواجهه با این نوع مسایل است. این موضوع ضرورت مطالعه و تحقیق در زمینه مسایل بهینه‌سازی مقید از جمله مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر مقید را بیان می‌کند [۶].

در مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر مقید، مقدار منابع در دسترس مانند زمان سفر، هزینه و یا مقدار سوخت محدود بوده و میزان استفاده از این منابع نباید از حد تعیین شده تجاوز کند. دراین مساله به دنبال تعیین مسیری با حداقل زمان سفر هستیم به گونه‌ای که مسیر پیدا شده در شرایط تعیین شده صدق کند. مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید در بسیاری از مسایل بهینه‌سازی مانند حمل‌ونقل ، برنامه‌ریزی ساعات کاری خدمه کشتی و مسیریابی شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرد [۹]. اولین مطالعات در مورد این مساله در سال ۱۹۶۵ توسط وایتزگل وگلدمن صورت گرفت که در آن مساله شامل یک یا چند محدودیت جنبی بود و حد بالای طول مسیر از قبل داده شده بود [۱۰]. محدودیت‌های اضافی که در مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر مقید وجود دارد آن را به یک مساله NP - سخت تبدیل می‌کند که به‌وسیله الگوریتم‌های برچسب‌گذاری قابل حل نیست [۱۱].

محققان الگوریتم‌های کارآمد و متنوعی را برای حل مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر مقید ارایه نموده‌اند. از جمله آن‌ها می‌توان به تعمیم برنامه‌ریزی پویا برای حل مسایل کوتاه‌ترین مسیر با چند محدودیت جنبی که در سال ۱۹۶۶ توسط جاکسچ استفاده شد [۱۲] و ترکیب الگوریتم آزادسازی لاگرانژی با الگوریتم k -کوتاه‌ترین مسیر که در سال ۱۹۸۰ توسط هندلر و ژنگ مطرح شد [۱۳] اشاره کرد.

هدف مساله مورد بحث در این مقاله، تعیین کوتاه‌ترین مسیر با هزینه کاهش یافته با درنظر گرفتن طرح‌های عمرانی به روی یال‌های شبکه است. اجرای طرح‌های عمرانی مانند تعویض و یا بهبود وضعیت آسفالت و اصلاح نقاط حادثه‌خیز و افزایش پهنای باند جاده‌ها و به‌طور کلی ایجاد تسهیلات حمل‌ونقل، تأثیر مستقیمی در کاهش ترافیک و زمان عبور جاده‌ها دارند. اجرای هر طرح عمرانی خود مستلزم صرف هزینه‌ای مشخص است؛ اما با

انتخاب طرح مناسب می‌توان با کاهش زمان عبور جاده‌ها، زمان سفر کل مسیر را کاهش داد، درحالی‌که هزینه مصرف شده نیز از بودجه دردسترس تجاوز نکند.

فرض کنید تعداد مشخصی طرح روی یال‌های شبکه با هزینه اجرای مشخص وجود داشته باشد، به‌علاوه کل بودجه اجرایی در دسترس نیز از قبل مشخص باشد. همچنین اجرای هر طرح، کاهش مشخصی در زمان عبور از یال ایجاد می‌کند. هدف انتخاب یک مسیر بهینه و طرح‌های عمرانی مناسب برای یال‌های آن است، به‌طوری که زمان عبور کاهش‌یافته مسیر کم‌ترین مقدار ممکن باشد و مجموع هزینه مصرفی نیز از مقدار تعیین شده بودجه تجاوز نکند.

می‌توان مساله معرفی شده در این مقاله را به‌نوعی شبیه مساله‌ی طراحی شبکه‌های توسعه یافته درنظر گرفت. مساله‌ی طراحی شبکه‌های توسعه یافته توسط مگنتی و ونگ در سال ۱۹۸۴ روی مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بررسی شد [۱۴]. در این مساله، در هر دوره یک یال بالقوه به شبکه اضافه می‌شود به‌طوری‌که افزودن آن هزینه مشخصی دارد. هدف تعیین یال‌های اضافه شونده در هر دوره است به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر به‌دست آمده، دارای کم‌ترین زمان ممکن باشد و همچنین هزینه کل مسیر از بودجه تعیین شده برای کل پروژه بیشتر نباشد. کالینوسکی و همکارانش [۱۵] و نیز باستر و همکارانش [۱۶] کاربردها، مدل و الگوریتم‌های حل مسایل طراحی شبکه‌های توسعه یافته در حمل‌ونقل هوایی را مورد بررسی قرار دادند.

در بخش دوم این مقاله، فرمول‌بندی مساله معرفی می‌شود، سپس در بخش سوم، روش دوگان لاگرانژی و نیز روش زیرگرادیان که در ادامه برای حل مدل معرفی شده، مورد استفاده قرار می‌گیرند، به‌اختصار بیان می‌شوند. در بخش چهارم، الگوریتم حل مساله برای رسیدن به یک جواب نزدیک به بهینه، براساس روش دوگان لاگرانژی و الگوریتم زیرگرادیان بیان می‌شود. در بخش پنجم مثال‌های عددی برای بررسی دقت و کارآیی الگوریتم در رسیدن به یک جواب نزدیک به بهینه ارایه می‌گردد و سرانجام نتیجه‌گیری در بخش آخر بیان می‌شود.

۲ فرمول‌بندی مساله

شبکه $G(N,A)$ با مجموعه رئوس N و مجموعه یال‌های A را درنظر بگیرید. زمان سفر یال (i,j) که رأس $i \in N$ را به رأس $j \in N$ متصل می‌کند، با t_{ij} نشان داده می‌شود. مدل مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر استاندارد از رأس مبدا O به رأس مقصد D به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$SP = \underset{x}{\mathrm{Min}} \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \tag{۱}$$

$$s.t.\ \ \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} ۱ & i = O \\ ۰ & i \neq O, D \\ -۱ & i = D \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{۰,۱\},\quad \forall (i,j)\in A$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

در مساله‌ی (۱) اگر یال $(i\,,j)$ در مسیر بهینه وجود داشته باشد، x_{ij} برابر یک، در غیر این صورت صفر درنظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، مدل صفر و یک (۱) با استفاده از الگوریتم‌های تصحیح برچسب گذاری و دایجسترا قابل حل است [۶]. اکنون، مدل مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر با درنظر گرفتن طرح‌های عمرانی و محدودیت بودجه را ارایه می‌کنیم. فرض کنید بودجه مشخص C در دسترس باشد، همچنین تعداد k_{ij}طرح متعلق به مجموعه $P_{ij}=\{p_{ij}^{1},p_{ij}^{2},...,p_{ij}^{k_{ij}}\}$ برای یال $(i\,,j)$ قابل اجرا باشد، به‌طوری که انجام طرح p_{ij}^{k} هزینه‌ای معادل c_{ij}^{k} داشته باشد و زمان عبور یال $(i\,,j)$ را به اندازه d_{ij}^{k} کاهش دهد؛ بنابراین زمان عبور از یال $(i\,,j)$ با اجرای طرح p_{ij}^{k} برابر $t_{ij}-d_{ij}^{k}$ خواهد بود. مدل ریاضی این مساله به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$CSP=\underset{x,y}{\mathrm{Min}}\sum_{(i,j)\in A}t_{ij}x_{ij}-\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}d_{ij}^{k} \tag{۲}$$

$s.t.$

$$\sum\nolimits_{j}x_{ij}-\sum\nolimits_{j}x_{ji}=\begin{cases}1 & i=O\\ 0 & i\neq O,D\\ -1 & i=D\end{cases} \tag{۳}$$

$$\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}\leq nx_{ij},\ \ \forall(i,j)\in A \tag{۴}$$

$$\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}c_{ij}^{k}\leq C \tag{۵}$$

$$x_{ij},y_{ij}^{k}\in\{0,1\},\ \ \forall(i,j)\in A,\ \ k=1,...,K_{ij} \tag{۶}$$

در مدل فوق اگر kامین طرح بر روی یال $(i\,,j)$ اجر شود، $y_{ij}^{k}=1$ و در غیر این‌صورت $y_{ij}^{k}=0$است. انجام تمام طرح‌ها بر روی یک یال در یک مساله‌ی کاربردی در دنیای واقعی باعث عدم توزیع عادلانه بودجه و به‌دنبال آن عدم برخورداری مناطق مختلف از تسهیلات اختصاص یافته به یک پروژه می‌شود؛ بنابراین برای جلوگیری از ازدحام تمام طرح‌ها بر روی یک یال، در محدودیت (۴) بیش‌ترین تعداد طرح‌هایی را که می‌توان روی یک یال انجام داد مقدار مشخص n درنظر گرفته‌ایم. محدودیت (۵) بیانگر این مطلب است که مجموع هزینه طرح‌های اجرایی در مسیر از بودجه C بیش‌تر نخواهد بود. مساله فوق یک مساله NP–سخت است و روش‌های حل مساله کوتاه‌ترین مسیر معمولی برای آن ناکارا خواهد بود [۹].

اگر مسیر انتخابی مشخص باشد، مساله حاصل متناظر با تعیین طرح‌های عمرانی بر روی این مسیر است که یک مساله‌ی صفر و یک در اندازه کوچک‌تر بوده و می‌تواند به روش‌های برنامه‌ریزی صفر و یک حل شود؛ اما به‌طور کلی، انتخاب کوتاه‌ترین مسیر شبکه و سپس تعیین طرح‌های بهینه برروی آن نمی‌تواند جواب مدل (۲) را تعیین کند. در ادامه روش دوگان لاگرانژی را برای رهاسازی محدودیت‌های سخت (۴) و (۵) به‌کمک ضربگرهای لاگرانژ به‌کار می‌بریم و به این ترتیب مساله را به یک مساله با تعداد محدودیت کم‌تر تبدیل می‌کنیم؛ سپس با استفاده از روش زیرگرادیان مقادیر بهینه ضربگرهای لاگرانژ را تعیین می‌کنیم. به این منظور، ابتدا به اختصار روش دوگان لاگرانژی و سپس روش زیرگرادیان را بیان می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

۳ روش دوگان لاگرانژی و روش زیرگرادیان.

۳-۱ روش دوگان لاگرانژی

تکنیک آزادسازی دوگان لاگرانژی، روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی مقید خطی و غیرخطی و نیز برنامه‌ریزی عدد صحیح است. در این روش متناظر با هر مساله اولیه داده شده، یک مساله آزادسازی شده دوگان تعریف می‌شود. مساله برنامه‌ریزی خطی اولیه زیر را درنظر بگیرید:

$$P = \text{Min } f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\ldots,m \tag{۷}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1,\ldots,l \tag{۸}$$

$$x \in X$$

مساله دوگان لاگرانژی متناظر با این مساله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \text{Max}\,\theta(u,v)$$

$$s.t. \quad u \ge 0$$

که $\theta(u,v) = \inf\left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} v_i h_i(x); \;\; x \in X \right\}$ در این مساله محدودیت‌های $g_i(x) \le 0$ و $h_i(x) = 0$ با استفاده از ضرایب (متغیرهای) دوگان u_i و v_i با تابع هدف ترکیب شده‌اند. ضرایب u_i متناظر با محدودیت‌های کوچک‌تر مساوی، نامنفی هستند، در حالی‌که ضرایب v_i متناظر با محدودیت‌های تساوی، آزاد در علامت هستند. قضایای زیر روابط بین تابع هدف بهینه مساله اولیه و دوگان لاگرانژی را بیان می‌کنند. برای جزییات بیش‌تر، مثال‌ها و اثبات قضایای زیر به مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

قضیه ۱ (دوگانی ضعیف): فرض کنید x یک جواب شدنی مساله Pباشد؛ یعنی $x \in X, g(x) \le 0, h_i(x) = 0$ که $g(x)$ و $h(x)$فرم برداری محدودیت‌های (۷) و (۸) هستند. هم‌چنین فرض کنید (u,v) یک جواب شدنی مساله D باشد؛ یعنی $u \ge 0$ باشد؛ در این‌صورت $f(x) \ge \theta(u,v)$ است.

نتیجه ۱: تابع هدف بهینه مساله اولیه همواره بزرگ‌تر یا مساوی تابع هدف بهینه مساله دوگان لاگرانژی است، به عبارت دیگر $\text{Min}\{f(x): x \in X, g(x) \le 0, h(x) = 0\} \ge \text{Max}\{\theta(u,v): u \ge 0\}$ اگر نامساوی فوق به‌صورت اکید برقرار باشد، اصطلاحا گفته می‌شود بین مساله اولیه و دوگان لاگرانژی، شکاف دوگانی وجود دارد.

نتیجه ۲: اگر $f(\bar{x}) = \theta(\bar{u},\bar{v})$ که $\bar{x}$ و $(\bar{u},\bar{v})$ به‌ترتیب جواب‌های شدنی برای مسایل اولیه و دوگان لاگرانژی هستند، در این‌صورت $\bar{x}$ و $(\bar{u},\bar{v})$ به‌ترتیب جواب‌های بهینه مسایل اولیه و دوگان لاگرانژی خواهند بود.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

قضیه۲ (دوگانی قوی): فرض کنید X یک مجموعه محدب در R^n بوده و $f:R^n \to R$ و $g_i:R^n \to R, i=1,...,m$ توابع محدب و $h_i:R^n \to R, i=1,...,l$ توابع آفین باشند. فرض کنید یک جواب شدنی x وجود دارد و $0 \in \operatorname{int} h(x)=\{h(x):x \in X\}$ آنگاه

$$\inf\{f(x):x \in X, g(x) \le 0, h(x)=0\} = \sup\{\theta(u,v):u \ge 0\}.$$

به‌عبارت دیگر تحت شرایط قضیه، اگر ناحیه شدنی دومساله بسته باشند، شکاف دوگانی صفر است. به‌علاوه اگر مقدار اینفیمم متناهی بوده و در $\bar{x}$ به‌دست آید و مقدار $\sup\{\theta(u,v):u \ge 0\}$ در جواب $(\bar{u},\bar{v})$ با $\bar{u} \ge 0$ حاصل شود، آن‌گاه $\bar{u}^t g(\bar{x})=0$ است.

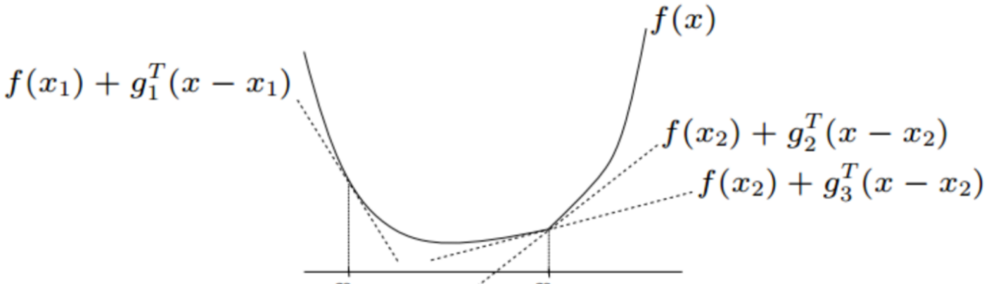
نکته۱: برای مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح که ناحیه شدنی محدب نیست، ممکن است شکاف دوگانی در جواب بهینه بزرگ‌تر از صفر باشد.

۳-۲ روش زیرگرادیان

روش زیرگرادیان یک روش ساده تکراری برای مینیمم کردن توابع محدب مشتق ناپذیر است. این روش، تا حدودی مشابه روش‌های خطی‌سازی مرتبه اول برای توابع مشتق‌پذیر بوده، با این تفاوت که در روش‌های خطی‌سازی، طول گام در هر تکرار توسط یک مدل جستجوی خطی مشخص می‌شود؛ ولی در روش زیرگرادیان، معمولاطول گام مقدار ثابتی درنظرگرفته می‌شود. هم‌چنین، این روش همواره کاهشی نیست و ممکن است در بعضی تکرارها مقدار تابع هدف افزایش یابد [۱۸].

تعریف۱: اگر $f:R^n \to R$ تابعی محدب باشد، هر بردار g که در رابطه $f(y) \ge f(x)+g^t(y-x)$ برای هر $y \in R^n$ صدق کند، یک زیرگرادیان تابع f در نقطه x نامیده می‌شود. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، تنها انتخاب ممکن برای زیرگرادیان‌های تابع، همان گرادیان تابع؛ یعنی ∇f است.

در شکل ۱ گرادیان تابع f در نقطه x_1 و نیز دو زیر گرادیان تابع در نقطه x_2 مشخص شده‌اند.



شکل ۱. زیرگرادیان‌ها و گرادیان تابع f

۳-۲-۱ توصیف روش

مساله بهینه‌سازی نامقید $\operatorname{Min} f(x)$ که $f:R^n \to R$ تابعی محدب است و نیز نقطه جاری $x^k \in R^n$ را درنظر بگیرید. جهت حرکت برای تعیین نقطه x^{k+1} قرینه بردار زیرگرادیان تابع f در x^k درنظرگرفته

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

می‌شود؛ یعنی $x^{k+1} = x^k - \theta^k g^{(k)}$ که $g^{(k)}$ زیرگرادیانی از تابع f در نقطه x^k و $\theta^k > 0$ طول گام حرکت است. همان‌طور که اشاره شد، گاه ممکن است جهت $-g^{(k)}$ برای تابع f کاهشی نبوده و $f(x^k) < f(x^{k+1})$ باشد، به‌همین دلیل بهترین جواب در هرمرحله متناظر با کم‌ترین مقدار تابع هدف در کل مراحل تا کنون درنظر گرفته شده و از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$f_{best}^{(k)} = \text{Min}\left\{ f(x^k), f_{best}^{(k-1)} \right\}$$

برای انتخاب طول گام در روش زیرگرادیان قواعد مختلفی وجود دارد. از جمله آن‌ها انتخاب گام با اندازه و نیز طول ثابت است. همگرایی روش زیر گرادیان برای هر یک از این انتخاب‌ها در مرجع [۱۸] بررسی شده است. فیشر [۱۹] روش زیرگرادیان را برای حل مساله دوگان لاگرانژی متناظر با مسایل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح بررسی کرد و طول گام θ را با استفاده از رابطه معرفی شده توسط هلد و همکارانش [۲۰] تعیین نمود. طول گام انتخابی روش زیرگرادیان در مقاله حاضر نیز بر حسب این فرمول بیان شده است. این رابطه در مقالات دیگری مانند [۲۱] نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

٤ روش دوگان لاگرانژی برای حل مساله کوتاه‌ترین مسیر با درنظرگرفتن طرح‌های عمرانی

در این بخش، با آزادسازی برخی از محدودیت‌های جنبی مساله به کمک ضرایب لاگرانژ، مساله دوگان لاگرانژی متناظر با مساله CSP مدل (۲) تولید می‌شود [۲۱]. فرض کنید ضرایب لاگرانژ $\alpha_{ij} \geq 0$ برای هر $(i,j) \in A$ و $\beta \geq 0$ به ترتیب متناظر با محدودیت‌های (۴) و (۵) در نظر گرفته شوند. در این‌صورت مدل دوگانی متناظر مساله (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$DCSP = \underset{\alpha,\beta}{\text{Max}}\, L(\alpha,\beta) = \underset{x,y}{\text{Min}} \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^k d_{ij}^k + \tag{۹}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^k - n x_{ij}\right) + \beta\left(\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^k c_{ij}^k - C\right)$$

$s.t.$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = O \\ 0 & i \neq O, D \\ -1 & i = D \end{cases}$$

$$x_{ij}, y_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad \forall k = 1,\dots,K_{ij}$$

بعد از ساده‌سازی تابع هدف (۹)، دوگان لاگرانژی مساله (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$DCSP = \underset{\alpha,\beta}{\text{Max}}\, L(\alpha,\beta) = \underset{x,y}{\text{Min}} \sum_{(i,j)\in A} \left(t_{ij} - n\alpha_{ij}\right) x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^k d_{ij}^k + \tag{۱۰}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^k - n x_{ij}\right) + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} \left(\beta c_{ij}^k - d_{ij}^k + \alpha_{ij}\right) y_{ij}^k - \beta C$$

$s.t.$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = O \\ 0 & i \neq O, D \\ -1 & i = D \end{cases}$$

$$x_{ij}, y_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A, \quad \forall k = 1,\dots,K_{ij}$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

بنابه قضیه ۱ (دوگانی ضعیف) برای هر بردار داده شده (α,β) از ضرایب لاگرانژ، مقدار تابع هدف مساله‌ی آزادسازی شده (۱۰) کران پایینی برای مساله‌ی (۲) است [۱۷] و با توجه با قضیه ۲ (دوگانی قوی) هرگاه مقدار آن برابر با مقدار تابع هدف مساله‌ی (۲) برای یک جواب شدنی باشد، آن‌گاه به بهینگی رسیده‌ایم. از آنجاکه $L(\alpha,\beta)$ یک تابع قطعه قطعه خطی است، الگوریتم زیر گرادیان، روش مناسبی برای به‌دست آوردن جواب بهینه مساله‌ی دوگان لاگرانژی (۱۰) است. در این الگوریتم در هر مرحله با به‌روز رسانی ضرایب لاگرانژی $\alpha_{ij} \geq ۰$ و $\beta \geq ۰$ کران بالا و پایین به‌هنگام خواهند شد. با توجه به تفکیک‌پذیر بودن محدودیت‌ها و تابع هدف، مساله‌ی (۱۰) را می‌توان به دو زیر مساله تجزیه کرد و هر زیر مساله را به طور جداگانه حل کرد.

۴-۱ تفکیک مساله

برای هر بردار داده شده (α,β) از ضرایب لاگرانژ، عبارت $-\beta C$ در مساله (۱۰) مقداری ثابت است و می‌تواند کنار گذاشته شود. اکنون مساله (۱۰) به دو زیر مساله کوچک‌تر تقسیم می‌شود که حل هریک از آن‌ها به دلیل کوچک شدن ابعاد مساله ساده‌تر از حل مساله (۱۰) بوده و مجموع مقادیر به‌دست آمده از این زیر مساله‌ها کران پایین تابع هدف (۲) را تعیین می‌کند.

زیر مساله‌ی اول:

$$\begin{aligned} & SP_۱(\alpha,\beta)=\underset{x}{\mathrm{Min}}\sum_{(i,j)\in A}\left(t_{ij}-n\alpha_{ij}\right)x_{ij} \\ & s.t.\ \ \sum\nolimits_j x_{ij}-\sum\nolimits_j x_{ji}=\begin{cases} ۱ & i=O \\ ۰ & i\neq O,D \\ -۱ & i=D \end{cases} \\ & x_{ij}\in\{۰,۱\},\ \ \forall (i,j)\in A \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

مساله فوق، یک مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر استاندارد با مقادیر هزینه یال $t'_{ij}=\left(t_{ij}-n\alpha_{ij}\right)$ است که با استفاده از الگوریتم تصحیح برچسب گذاری قابل حل است [۸].

زیر مساله‌ی دوم:

$$SP_۲(\alpha,\beta)=\underset{y}{\mathrm{Min}}\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=۱}^{K_{ij}}\left(\beta c_{ij}^k-d_{ij}^k+\alpha_{ij}\right)y_{ij}^k,\ \ y_{ij}^k\in\{۰,۱\},\ \ \forall k=۱,\dots,K_{ij} \qquad (۱۲)$$

مساله‌ی SP_2 برای هر بردار داده شده (α,β) یک مساله صفر و یک با ضرایب ثابت $c'^k_{ij}=\left(\beta c_{ij}^k-d_{ij}^k+\alpha_{ij}\right)$ برای هریک از متغیرهای y_{ij}^k است؛ بنابراین مقادیر y_{ij}^k طبق رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$y_{ij}^k=\begin{cases} ۰ & \left(\beta c_{ij}^k-d_{ij}^k+\alpha_{ij}\right)\geq ۰ \\ ۱ & otherwise \end{cases} \qquad (۱۳)$$

بعد از محاسبه مقادیر هدف زیر مساله‌های $SP_۱, SP_۲$ جواب مساله (۱۰) یا به‌عبارت دیگر کران پایین مساله (۲) به صورت $lb=SP_۱+SP_۲-\beta C$ در نظر گرفته می‌شود. در هر مرحله بهترین کران پایین متناظر ماکزیمم کران

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

پایین‌هایی که تاکنون پیدا شده است، تعیین شده و با LB نشان داده می‌شود. اگر مسیر $x=\left(x_{ij}\right)$ و الگوی طرح‌های انتخابی $y=\left(y_{ij}^{k}\right)$ به‌دست آمده از حل زیر مساله‌های (۱۱) و (۱۲) شدنی مساله (۲) باشند؛ یعنی در محدودیت های (۴) و (۵) صدق کنند، کران بالای ub برابر مقدار هدف مساله (۲) برای $\left(x,y\right)$ است. در غیر این صورت با حل مساله بهینه‌سازی صفرویک (۱۴) مقادیر y_{ij}^{k} بهینه متناظر با مسیر x_{ij} به‌دست آمده از زیر مساله (۱۱) را تعیین می‌کنیم:

$$P_{new}=\text{Max}\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}d_{ij}^{k} \tag{14}$$

$$s.t.\ \sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}\le nx_{ij}\qquad \forall(i,j)\in A$$

$$\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}c_{ij}^{k}\le C$$

$$y_{ij}^{k}\in\{0,1\},\ \ \forall\left(i,j\right)\in A,\ \ \forall k=1,\dots,K_{ij}$$

فرض کنید جواب بهینه مساله (۱۴) متناظر با مسیر x_{ij} حاصل از زیر مساله (۱۱) با $y^{*}\left(x\right)=y_{ij}^{*k}$ مشخص شود. مقدار تابع هدف مساله(۲) برای جواب $\left(x,y^{*}\left(x\right)\right)$به‌عنوان کران بالای ub درنظر گرفته می‌شود. درهر مرحله بهترین کران بالا متناظر مینیمم کران بالاهایی که تاکنون پیدا شده است، انتخاب شده و با UB نشان داده می‌شود.

٤-٢ به‌روز رسانی ضرایب لاگرانژی

بعد از تعیین جواب‌های بهینه و کران‌های بالا و پایین متناظر با مقادیر اولیه ضربگرهای لاگرانژ، با استفاده از روش زیرگرادیان [۱۹] این ضرایب را بروز رسانی می‌کنیم و سپس برای مقادیر جدید، جواب‌های بهینه و کران‌ها را به‌هنگام می‌کنیم. اگر مقادیر کنونی ضرایب لاگرانژ در تکرار μ با $\left(\alpha^{\mu},\beta^{\mu}\right)$ مشخص شود، زیرگرادیان‌های تابع قطعه قطعه خطی L به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\nabla L_{\alpha_{ij}}\left(\alpha^{\mu},\beta^{\mu}\right)=\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}-nx_{ij}^{\mu},\forall\left(i,j\right)\in A \tag{15}$$

$$\nabla L_{\beta}\left(\alpha^{\mu},\beta^{\mu}\right)=\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}c_{ij}^{k}-C \tag{16}$$

که مقادیر x_{ij}^{μ} و $y_{ij}^{k,\mu}$ از زیر مساله‌های (۱۱) و (۱۲) متناظر با ضرایب $\left(\alpha^{\mu},\beta^{\mu}\right)$ حاصل شده‌اند. ضرایب لاگرانژ در $\mu+1$ امین تکرار به‌صورت زیر به‌روز رسانی خواهند شد:

$$\beta^{\mu+1}=\beta^{\mu}+\theta_{\mu}\left(\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k}c_{ij}^{k}-C\right) \tag{17}$$

$$\alpha_{ij}^{\mu+1}=\alpha_{ij}^{\mu}+\theta_{\mu}\left(\sum_{k=1}^{K_{ij}}y_{ij}^{k,\mu}-nx_{ij}^{\mu}\right),\ \ \forall\left(i,j\right)\in A$$

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

طول گام θ در این الگوریتم از رابطه زیر تعیین می‌شود [۱۹]:

$$\theta_\mu = \frac{\lambda\left(UB_\mu - LB_\mu\right)}{f\left(x_{ij}^{\mu}, y_{ij}^{k,\mu}\right)}$$

که

$$f\left(x_{ij}^{\mu}, y_{ij}^{k,\mu}\right) = \left(\left(\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^{k,\mu} c_{ij}^{k,\mu} - C\right)^{2} + \sum_{(i,j)\in A}\left(\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^{k,\mu} - n x_{ij}^{\mu}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۸)$$

و $0 < \lambda_\mu < 2$ مقداری تصادفی است. هم‌چنین UB_μ و LB_μ به‌ترتیب بهترین مقادیر کران بالا و کران پایین تا تکرار جاری هستند. اگر حداقل یکی از مقادیر $\beta^{\mu+1}$ و $\alpha_{ij}^{\mu+1}$ در رابطه (۱۷) منفی باشند، طول گام θ نصف می‌شود تا زمانی‌که تمام ضرایب به‌هنگام شده مثبت باشند. به روز رسانی ضرایب لاگرانژ و کران‌های بالا و پایین متناظر آن‌ها تا جایی تکرار می‌شود که شکاف نسبی بین کران بالا و پایین از آستانه تعیین شده کم‌تر شده و یا تعداد تکرارها از عدد مشخصی بیش‌تر شود. در این الگوریتم شکاف نسبی از رابطه $\frac{UB_\mu - LB_\mu}{UB_\mu}$ تعیین می‌شود. دقت داریم با توجه به اینکه مدل (۲) دارای متغیرهای صفر ویک و در نتیجه دارای ناحیه شدنی نامحدب است، ممکن است در بهینگی دارای شکاف دوگانی باشد. به‌همین علت در این الگوریتم، اگر تعداد تکرارها از عدد مشخصی بیش‌تر شود، متوقف می‌شویم. در ادامه جزییات الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله (۲) با به‌کار بردن روش دوگان لاگرانژی و الگوریتم زیرگرادیان در الگوریتم (۱) بیان می‌شود.

الگوریتم ۱. الگوریتم دوگان لاگرانژی برای مساله کوتاه‌ترین مسیر با درنظرگرفتن طرح‌های عمرانی

گام یک) آماده‌سازی: قرار دهید $\mu = 1$. بردار ضرایب لاگرانژی اولیه $\left(\alpha^\mu, \beta^\mu\right)$ را به‌صورت تصادفی انتخاب کنید.

گام دو) محاسبه کران پایین:

الف- ضرایب تعمیم‌یافته $t'_{ij} = \left(t_{ij} - n\alpha_{ij}^{\mu}\right)$ را متناظر با بردار جاری $\left(\alpha^\mu, \beta^\mu\right)$ تعیین کنید. زیر مساله‌ی (۱۱) را برای ضرایب تعمیم‌یافته t'_{ij} به وسیله الگوریتم تصحیح برچسب گذاری حل کنید. جواب به‌دست آمده را x_{ij}^{μ} بنامید و قرار دهید $SP_1^{\mu} = \sum_{(i,j)\in A}\left(t_{ij} - n\alpha_{ij}\right) x_{ij}^{\mu}$

ب- در زیر مساله‌ی (۱۲) مقدار هزینه تعمیم یافته طرح k برای هر یال (i,j) را به‌صورت $c'^{k}_{ij} = \left(\beta c_{ij}^{k} - d_{ij}^{k} + \alpha_{ij}\right)$ تعیین کنید. اگر $c'^{k}_{ij} \geq 0$ آنگاه قرار دهید $y_{ij}^{k,\mu} = 0$ در غیر این‌صورت قرار دهید $y_{ij}^{k,\mu} = 1$ سپس $SP_2^{\mu} = \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^{k,\mu} c'^{k}_{ij}$ را محاسبه کنید.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

ج- قرار دهید: $lb = SP_1^{\mu} + SP_2^{\mu} - \beta^{\mu} C$

د- اگر $\mu > 1$ باشد کران پایین را برابر $LB_{\mu} = \text{Max}\left\{LB_{\mu-1}, lb\right\}$ و در غیر این‌صورت $LB_{\mu} = lb$ قرار دهید.

گام سه) محاسبه کران بالا:

الف- شدنی بودن x_{ij}^{μ}, $y_{ij}^{k,\mu}$ به‌دست آمده از گام دو را ارزیابی کنید، به‌عبارت دیگر درستی آن‌ها را در محدودیت‌های جنبی (۴) و (۵) بررسی کنید. اگر جواب شدنی است، کران بالا را به‌صورت $ub = \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}^{\mu} - \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^{k,\mu} d_{ij}^{k}$ قرار دهید.

ب- در غیراین‌صورت مساله‌ی بهینه‌سازی صفر و یک (۱۴) را برای x_{ij}^{μ} حل کرده و جواب بهینه متناظر را $y_{ij}^{*k,\mu}$ بنامید. کران بالا را با استفاده از رابطه $ub = \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}^{\mu} - \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{K_{ij}} y_{ij}^{*k,\mu} d_{ij}^{k}$ محاسبه کنید.

ج- اگر $\mu > 1$ باشد، کران بالا را $UB_{\mu} = \text{Min}\left\{ub, UB_{\mu-1}\right\}$ و در غیر این‌صورت $UB_{\mu} = ub$ قرار دهید.

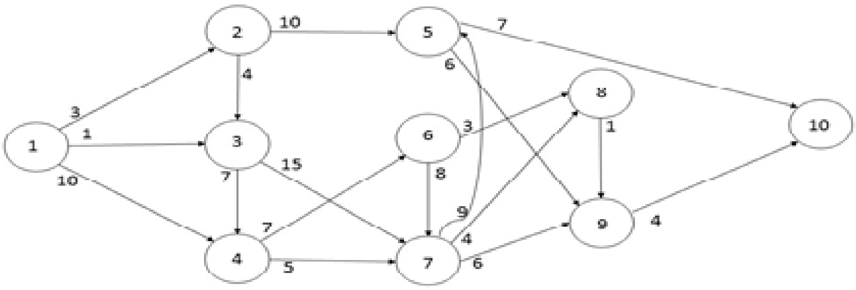
گام چهار) محاسبه شکاف دوگانی:

شکاف دوگانی را برابر $Gap_{\mu} = UB_{\mu} - LB_{\mu}$ و شکاف نسبی را $\text{Relative Gap}_{\mu} = \frac{UB_{\mu} - LB_{\mu}}{UB_{\mu}}$ قرار دهید. اگر شکاف نسبی کم‌تر از مقدار آستانه تعیین‌شده ϵ باشد، جواب x_{ij}^{μ} و $y_{ij}^{*k,\mu}$ نزدیک به جواب بهینه مدل (۲) است و متوقف شوید، در غیر این‌صورت به گام پنج بروید.

گام پنج) بروز رسانی ضرایب لاگرانژی:

الف- $\mu = \mu + 1$ قرار دهید. اگر تعداد تکرارها؛ یعنی μ از ماکزیمم تعداد تعیین شده بزرگ‌تر باشد، متوقف شوید.

ب- در غیر این‌صورت ضرایب لاگرانژی $\beta^{\mu}, \alpha^{\mu}$ را با استفاده از روابط (۱۷) برای تکرار بعدی به‌روزرسانی کنید و به گام دو بروید.



شکل ۲. شبکه کوچک با ۱۰ رأس

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

۵ نتایج محاسباتی

دراین بخش دو شبکه یکی در مقیاس کوچک و دیگری در مقیاس متوسط برای آزمایش کارایی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرند. جواب حاصل از الگوریتم (۱) برای مقادیر مختلف بودجه و نیز مبدأ و مقصدهای متفاوت تعیین شده و حساسیت شکاف نسبی در جواب نهایی نسبت به انتخاب مقادیر اولیه برای ضرایب لاگرانژی α,β مورد مطالعه قرارگرفته است. نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم به صورت جدول و نمودارآورده شده است. معیار توقف در هر دو مثال رسیدن به شکاف نسبی کم‌تر از $\varepsilon = ۰/۲$ و یا حداکثر تعداد تکرار $\mu = ۱۰$ است.

مثال ۱. شبکه شکل ۲ با ۱۰ رأس و ۱۸ یال را درنظر بگیرید. زمان عبور هر یال روی شکل مشخص شده است. تعداد طرح‌های قابل اجرا روی هریال عددی تصادفی بین ۱ تا ۴ درنظرگرفته شده است. هزینه و مقدار کاهش زمان متناظر با طرح‌های موجود روی یال‌ها در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. هزینه و مقدار کاهش زمان متناظر هر طرح در شکل ۲

یال	$\left(c_{ij}^{۱},d_{ij}^{۱}\right)$	$\left(c_{ij}^{۲},d_{ij}^{۲}\right)$	$\left(c_{ij}^{۳},d_{ij}^{۳}\right)$	$\left(c_{ij}^{۴},d_{ij}^{۴}\right)$
(۱,۲)	(۲/۷۱۴۱ ,۱/۵۳۴۶)			
(۳,۴)	(۱/۶۸۸۰,۱/۷۹۴۳)	(۱/۱۰۴۲,۰/۶۷۵۵)	(۱/۸۵۶۶ ,۰/۱۷۳۸)	
(۱,۴)	(۱/۱۲۶۵ ,۰/۳۷۴۸)	(۲/۴۳۱۶,۱/۴۴۶۵)	(۲/۰۲۴۰ ,۱/۸۲۸۰)	
(۲,۳)	(۲/۴۶۲۹,۱/۰۹۷۴)	(۰/۰۴۶۶,۰/۱۸۹۴)		
(۲,۵)	(۱/۵۴۴۳,۱/۹۰۵۰)	(۲/۵۲۹۲,۱/۸۷۰۰)		
(۳,۴)	(۹/۹۲۰۲,۰/۷۴۵۱)	(۰/۹۶۲۷,۱/۵۶۶۵)		
(۳,۷)	(۰/۶۳۶۷,۱/۹۱۸۳)	(۲/۷۹۰۷ ,۰/۷۳۱۵)		
(۴,۶)	(۱/۰۳۴۷,۱/۳۸۵۴)	(۲/۱۴۹۸,۱/۶۰۰۷)		
(۴,۷)	(۱/۷۸۱۰,۰/۱۹۴۴)	(۱/۶۷۸۵,۰/۰۸۶۲)	(۲/۲۷۲۹,۱/۳۱۳۹)	(۱/۷۹۸۴,۰/۴۵۴۰)
(۵,۹)	(۲/۱۴۱۱,۱/۴۴۹۰)	(۱/۰۳۲۷,۰/۰۶۵۵)		
(۵,۱۰)	(۲/۲۳۰۸,۱/۵۴۰۶)			
(۶,۷)	(۱/۵۲۸۹,۱/۴۱۳۹)	(۲/۳۷۳۵,۰/۶۶۱۳)		
(۶,۸)	(۲/۷۴۱۰,۱/۵۳۴۱)	(۰/۸۶۳۷,۰/۵۳۳۷)	(۲/۶۷۰۵,۰/۷۳۲۲)	(۰/۴۵۰۰,۱/۸۹۲۷)
(۷,۵)	(۱/۹۵۲۵,۱/۹۶۴۴)	(۰/۵۸۱۵,۱/۶۵۷۵)	(۱/۴۸۱۴,۱/۱۸۱۶)	(۰/۱۳۴۷,۱/۱۲۹۸)
(۷,۸)	(۱/۹۰۰۶,۰/۹۹۶۲)	(۰/۱۷۸۹,۱/۰۳۰۳)	(۰/۱۵۹۵,۱/۶۸۷۳)	(۱/۷۸۴۰,۱/۳۸۲۰)
(۷,۹)	(۱/۹۴۱۷,۱/۲۴۶۹)	(۲/۸۶۱۶,۰/۳۵۳۹)	(۱/۴۲۴۷,۱/۶۸۴۸)	
(۸,۹)	(۱/۴۹۰۹,۱/۵۲۴۸)			
(۹,۱۰)	(۰/۵۳۹۶,۱/۳۸۳۲)			

نتایج اجرای الگوریتم (۱) برای مقادیر مختلف بودجه C و نیز حداکثر تعداد طرح‌های $n = ۳$ برای زوج مبدأ و مقصد $(۱,۱۰)$ در جدول ۲ آورده شده است. مسیر بهینه، طرح‌های انتخاب شده به روی هر یال و

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

همچنین کران بالا (UB[1])، کران پایین (LB[2])، شکاف نسبی (ReG[3])، مقدار کل کاهش زمان درطول مسیر (ReC[4]) و زمان اجرای الگوریتم در نرم افزار متلب بر حسب ثانیه T در این جدول آورده شده است. در این مثال، مقدار پارامتر λ_μ در هر تکرار عددی تصادفی بین $[۰,۲]$ انتخاب می‌شود. هم‌چنین ضرایب لاگرانژ $\beta = ۲$, α_{ij} به صورت اعداد تصادفی در بازه $[۰,۱]$ تعیین شده‌اند.

جدول۲. مسیر و طرح‌های بهینه برای زوج مبدأ و مقصد $(۱,۱۰)$ با $n = ۳$ ثابت

مسیر و طرح‌های اجرا شده روی یال	c	UB	LB	ReG	ReC	T
$۱ \to ۳ \to ۴ \to ۷ \to ۸ \to ۹ \to ۱۰$ $\{۱,۲\}\{۱,۲\}\{۳.۴\}\{۲,۳,۴\}\{۱\}\{۱\}$	۱۵	۸/۴۴	۷/۲۳۳۵	۰/۱۴۲۷	۱۳/۵۶	۵/۲۷
$۱ \to ۳ \to ۴ \to ۷ \to ۸ \to ۹ \to ۱۰$ $\{۱\}\{۲\}\{۳\}\{۲,۳,۴\}\{۱\}\{۱\}$	۱۰	۱۰/۳۱	۹/۴۶۳۵	۰/۰۸۲۳	۱۱/۶۸	۰/۵۲
$۱ \to ۳ \to ۴ \to ۷ \to ۸ \to ۹ \to ۱۰$ $\{۱,۲\}\{۲\}\{\ \}\{۲,۳\}\{\ \}\{۱\}$	۵	۱۳/۸۶	۲/۵۴۸۲	۰/۸۱۶۲	۸/۱۴	۰/۷۰

در جدول ۳، مسیر بهینه، طرح‌های انتخاب شده به روی هر یال و همچنین کران بالا (UB)، مقدار کل کاهش زمان درطول مسیر(ReC) و زمان اجرای الگوریتم در نرم افزار متلب بر حسب ثانیه T برای زوج مبدأ و مقصد $(۲,۹)$ با بودجه ثابت $C = ۱۵$ آورده شد.

جدول۳. مسیر و طرح‌های بهینه برای زوج مبدأ و مقصد $(۲,۹)$ و $C = ۱۵$ ثابت

مسیر و طرح‌های اجرا شده روی یال	N	UB	ReC	T
$۲ \to ۳ \to ۴ \to ۷ \to ۸ \to ۹$ $\{۱,۲\}\{۱,۲\}\{۳\}\{۱,۲,۳,۴\}\{۱\}$	۴	۹/۴۶	۱۱/۵۴	۱/۱۳
$۲ \to ۵ \to ۹$ $\{۱,۲\}\{۱,۲\}$	۲	۱۰/۷۱	۵/۲۹	۵/۵۸
$۲ \to ۵ \to ۹$ $\{۱\}\{۱\}$	۱	۱۲/۶۵	۳/۳۶	۵/۵۶

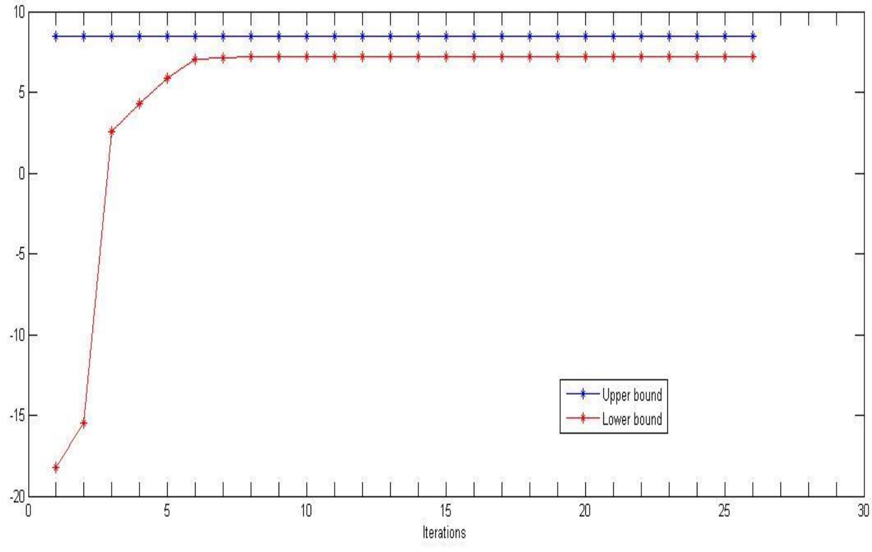
با توجه به جداول ۲ و ۳ مشاهده می‌شود که تغییرات بودجه و نیز تغییر عدد n در تعیین مسیر بهینه و طرح‌های اجرایی برای یک زوج مبدأ و مقصد مشخص مؤثر است. همچنین با توجه به جدول ۱ طرح‌هایی انتخاب شده اند که دارای بهبود زمان بیش‌تر و هزینه کم‌تر هستند.

در جدول (۴) به روزرسانی کران بالا (UB)، کران پایین (LB)، شکاف (Gap) و شکاف نسبی (RelativeGap) در ۱۰ تکرار اول برای زوج مبدأ و مقصد $(۱,۱)$ برای $n = ۳,\ C = ۱۵$ با مقدار اولیه ضرایب لاگرانژ $\beta = ۲$ و انتخاب α_{ij} به صورت اعداد تصادفی در بازه $[۰,۱]$ درج شده است. تغییرات کران بالا و پایین در هر تکرار در نمودار شکل ۳ نشان داده شده است. دقت داریم که مقادیر اولیه ضرایب لاگرانژی تصادفی انتخاب می‌شوند؛

ولی با انتخاب مقادیر مختلف و بررسی جواب نهایی، مشاهده شد که در این مثال، شکاف نهایی متناظر مقادیر اولیه $\beta = ۲$ و $\alpha_{ij} \in [۰,۱]$ کوچک‌تر از سایر انتخاب‌ها است.

جدول ٤. $C = ۱۵, n = ۳, \beta = ۲, ۰ < \alpha < ۱$

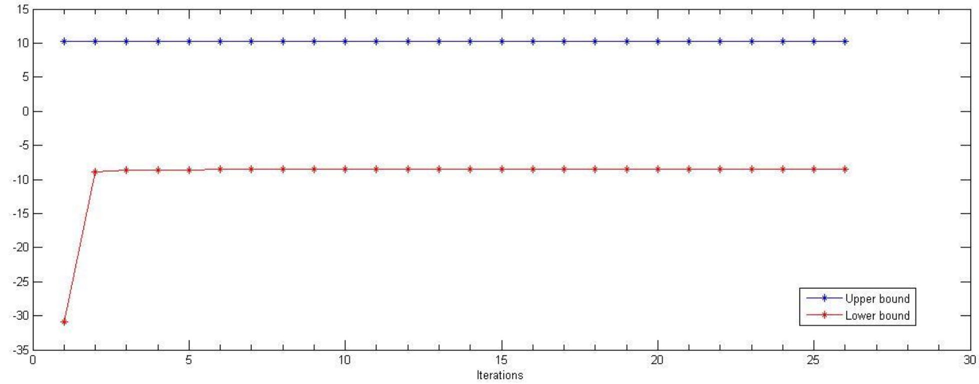
تکرار	LB	UB	Gap	RelativeGap
۱	−۱۸/۲۲۰۷	۸/۴۳۳۷	۲۶/۶۵۸۴	۳/۱۵۹۴
۲	−۱۵/۵۰۷۷	۸/۴۳۳۷	۲۳/۹۴۵۴	۲/۸۳۷۹
۳	۲/۵۴۶۵	۸/۴۳۳۷	۵/۸۹۱۲	۰/۶۹۸۲
۴	۴/۲۷۵۹	۸/۴۳۳۷	۴/۱۶۱۸	۰/۴۹۳۲
۵	۵/۸۹۰۸	۸/۴۳۳۷	۲/۵۴۶۹	۰/۳۰۱۸
۶	۷/۰۱۴۷	۸/۴۳۳۷	۱/۴۲۰۴	۰/۱۶۸۳
۷	۷/۱۳۳۴	۸/۴۳۳۷	۱/۳۰۴۳	۰/۱۵۶۴
۸	۷/۲۲۲۹	۸/۴۳۳۷	۱/۲۱۴۸	۰/۱۴۴۰
۹	۷/۲۲۲۹	۸/۴۳۳۷	۱/۲۰۸۰	۰/۱۴۳۲
۱۰	۷/۲۲۲۹	۸/۴۳۳۷	۱/۲۰۴۹	۰/۱۴۲۸



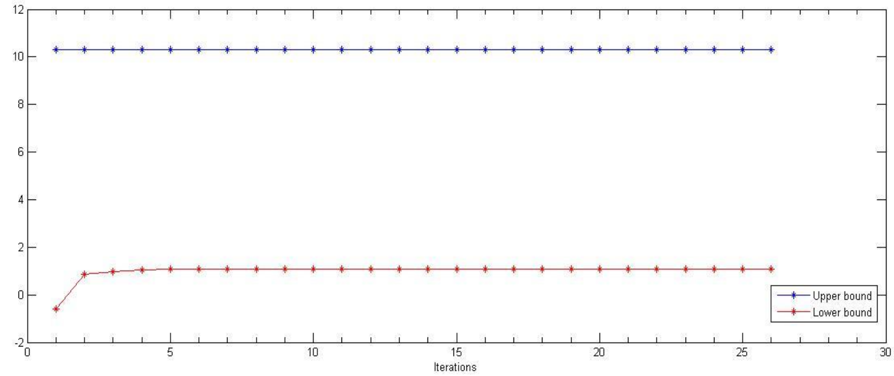
شکل ۳. نمودار به‌روزرسانی کران‌های بالا و پایین مربوط به جدول ۴

با توجه به جدول ۴ و شکل ۳ مشاهده می‌شود که در هر تکرار فاصله بین کران بالا و پایین کم‌تر شده، درنتیجه شکاف و شکاف نسبی در هر تکرار کاهش می‌یابد؛ ولی با توجه به این که مساله حالت گسسته دارد این فاصله صفر نمی شود و الگوریتم به جواب نزدیک به بهینه همگراست. برای بررسی تاثیر مقادیر اولیه α و β در شکاف نسبی جواب بهینه، مساله برای زوج مبدأ و مقصد $(۱,۱۰)$ با مقادیر α و β به‌ترتیب دو برابر و نصف مقادیر اولیه جدول ۴ حل شده است و تغییرات کران بالا و پایین در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود انتخاب اولیه α و β در مقدار شکاف نهایی تاثیر‌گذار است.

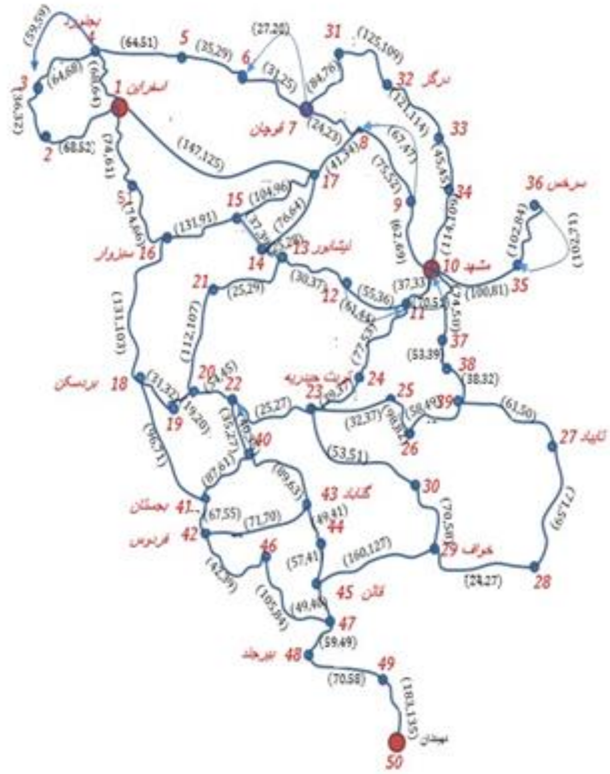
[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]



شکل ٤. نمودار به‌روزرسانی کران‌های بالا و پایین با مقادیر α و β دو برا بر مقادیر اولیه جدول ۴



شکل ٥. نمودار به‌روزرسانی کران‌های بالا و پایین با مقادیر α و β نصف مقادیر اولیه جدول ۴



شکل ٦. شبکه خراسان بزرگ

مثال ۲. در مثال دوم برای بررسی کارآیی الگوریتم (۱) یک شبکه واقعی با ۵۱ رأس و ۱۲۸ یال که مربوط به شهرهای استان خراسان بزرگ می باشند، درنظر گرفته شده است، شکل ۶ را ببینید. در شکل ۶ اغلب یال‌ها دو طرفه در نظر گرفته شده‌اند، به‌جز یال‌هایی که تفاوت طول و زمان پیمایش آنها در دو جهت به‌ترتیب بیش‌تر از ۷ کیلومتر و ۵ دقیقه است. برای چنین یال‌هایی، طرف دیگر یال نیز رسم شده است (برای مثال یال $(۴,۳)$ از بجنورد به شوقان و یال $(۳۶,۳۵)$ از سرخس به مزدآوند را ببینید). طول و زمان مربوط به هر یال به صورت یک زوج مرتب نشان‌داده شده است. این مقادیر به کمک نرم‌افزار Google map برای تمام یال‌ها به‌صورت جداگانه محاسبه شده‌اند.

تعداد کل طرح‌های ممکن برای هر یال عددی تصادفی بین ۱ تا ۱۰ انتخاب شده که مجاز به انتخاب حداکثر n طرح برای هر یال هستیم. هم‌چنین مقدار بودجه‌ی تخصیص یافته برای انجام طرح‌ها با متغیر C مشخص شده است. مقدار اولیه β و بازه مربوط به مقادیر اولیه α در جداول مشخص شده‌اند. هزینه اجرای هر طرح و مقدار بهبود زمان اجرای آن برای یال‌ها یعنی مقادیر c_{ij}^{k} و d_{ij}^{k} اعداد صحیح تصادفی در بازه $[۱,۵]$ انتخاب شده‌اند. نتایج اجرای این الگوریتم روی چند زوج مبدأ و مقصد متفاوت برای مقادیر مختلف C و n در جداول (۵)، (۶)، (۷) آورده شده است. در این جداول کران بالا UB، کران پایین LB، شکاف نسبی ReG و کاهش زمان مربوط به اجرای طرح‌های انتخابی ReC آورده شده است. مقدار تابع هدف و نیز میزان کاهش آن در نتیجه انتخاب طرح‌ها بر حسب زمان و با واحد دقیقه هستند. در این مثال نیز مقدار پارامتر λ_{μ} در هر تکرار عددی تصادفی بین $[۰,۲)$ انتخاب می‌شود.

جدول ۵. مسیر و طرح‌های انتخابی برای زوج مبدأ و مقصد اسفراین - فردوس با $n=۶$

مسیر و طرح‌های اجرا شده روی یال	C	UB	LB	ReG	ReC
$۱\rightarrow ۵۱\rightarrow ۱۶\rightarrow ۱۸\rightarrow ۴۱\rightarrow ۴۲$ $\{۱,۲,۴\}\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\}\{۱,۲,۳,۷,۸,۱۰\}\{۱,۳,۴\}\{۱,۲,۴,۵,۷\}$	۷۰	۲۶۹	۱۱۷/۴۶۱۴	۰/۵۶	۸۷
$۱\rightarrow ۵۱\rightarrow ۱۶\rightarrow ۱۸\rightarrow ۴۱\rightarrow ۴۲$ $\{۱,۲,۴\}\{۱,۲,۴,۶,۷\}\{۱,۳,۷,۸\}\{۱,۳,۴\}\{۱,۴,۶\}$	۴۰	۲۹۲	۱۷۷	۰/۳۹	۶۴
$۱\rightarrow ۵۱\rightarrow ۱۶\rightarrow ۱۸\rightarrow ۴۱\rightarrow ۴۲$ $\{۱,۲,۴\}\{۱,۲,۶\}\{۱,۳\}\{۱,۳,۴\}\{\ \}$	۲۰	۳۱۴	۲۳۹	۰/۲۴	۴۲

همان‌طور که در جدول ۵ دیده می‌شود، مسیر بهینه بین اسفراین و فردوس به صورت اسفراین- جوین - سبزوار - بردسکن - بجستان - فردوس می‌باشد. برای مثال مجموعه طرح‌های $\{۱,۲,۴\}$ برای اجرا روی یال اسفراین- جوین که اولین یال مسیر است، انتخاب شده است. با اجرای این طرح‌ها زمان عبور از یال اسفراین-جوین به اندازه $d_{۱,۵۱}^{۱}+d_{۱,۵۱}^{۲}+d_{۱,۵۱}^{۴}=۳+۵+۲=۹$ دقیقه کاهش می‌یابد. همچنین $c_{۱,۵۱}^{۱}+c_{۱,۵۱}^{۲}+c_{۱,۵۱}^{۴}=۱+۴+۱=۶$ واحد از بودجه کل مصرف می‌شود. در جدول ۶ مقدار کل بودجه در دسترس را ثابت در نظر گرفته، سپس با

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

انتخاب مقادیر مختلف برای n ، مسیر و طرح‌های بهینه برای زوج مبدأ و مقصد سنخواست و نصرآباد را به‌دست آورده‌ایم.

جدول ٦. مسیر و طرح‌های انتخابی برای زوج مبدأ و مقصد سنخواست و نصرآباد با $C = ۷۰$

مسیر و طرح‌های اجرا شده روی یال	n	UB	LB	ReG	*ReC*
۲ → ۳ → ۴ → ۱ → ۵ → ۶ → ۷ → ۸ → ۹ → ۱۰ → ۳۷ → ۳۸ {۴, ۵, ۶, ۷, ۸}{۱, ۲, ۳}{۱}{۱, ۲, ۳} {۱, ۴, ۵}{۱, ۲}{۱}{۳, ۶, ۷, ۹, ۱۰}	۵	۳۳۱	۱۳۸/۵۶۰۱	۰/۵۸۱۴	۱۰۸
۲ → ۳ → ۴ → ۱ → ۵ → ۶ → ۷ → ۸ → ۹ → ۱۰ → ۳۷ → ۳۸ {۶, ۷, ۸}{۱, ۲, ۳}{۱}{۱, ۲, ۴}{۱}{۱, ۲, ۳} {۱, ۴}{۱, ۲}{۱}{۶, ۷, ۹}	۳	۳۵۵	۱۵۱/۲۶۵۲	۰/۵۷۳۹	۸۴
۲ → ۱ → ۱۷ → ۸ → ۹ → ۱۰ → ۳۷ → ۳۸ {۱}{۱}{۵}{۱}{۱}{۷}	۱	۳۹۵	۱۶۰/۴۶۹۱	۰/۵۹۳۷	۲۷

در جدول ۷، مسیر و طرح‌های بهینه برای زوج مبدأ و مقصدهای مختلف با بودجه و حداکثر تعداد طرح ثابت محاسبه شده‌اند.

جدول۷ . مسیر و طرح‌های انتخابی برای زوج مبدأ و مقصد متفاوت با $n = ۳, C = ۷۰$

زوج مبدا و مقصد	مسیر و طرح‌های اجرا شده روی یال	UB	LB	ReG	ReC
مشهد به نهبندان	۱۰ → ۱۱ → ۲۴ → ۲۳ → ۲۲ → ۴۰ → → ۴۳ → ۴۴ → ۴۵ → ۴۷ → ۴۸ → ۴۹ → ۵۰ {۵, ۶, ۷}{۱, ۳}{۲}{۲, ۶}{۱, ۲, ۳}{۲, ۴} {۲, ۵, ۷}{۳, ۶, ۷}{۳}{۳, ۶, ۷}{۱, ۳, ۵}{۱, ۳}	۳۳۱	۱۳۸/۵۶۰۱	۰/۵۸۱۴	۱۰۸
بجنورد به کاشمر	۴ → ۱ → ۱۵ → ۱۶ → ۱۸ → ۱۹ → ۲۰ {۱, ۵, ۷}{۱, ۲, ۴}{۱, ۲, ۴}{۱, ۳, ۷}{۱}{۲, ۳, ۴}	۲۸۲	۱۱۲/۹۴۶۴	۰/۵۹۹۵	۶۴
قوچان به سرایان	۷ → ۸ → ۹ → ۱۰ → ۱۱ → ۲۴ → ۲۳ → ۲۲ → ۴۰ → ۴۱ → ۴۲ → ۴۶ {۲, ۳}{۴, ۵, ۱۰}{۱, ۲}{۵, ۶, ۷}{۱, ۳}{۲} {۲, ۶, ۷}{۱, ۲, ۳}{۲, ۳}{۱, ۲, ۴}{۲, ۵, ۶}	۳۷۳	۱۶۱/۷۸۲۰	۰/۵۶۶۳	۹۶

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مساله کوتاه‌ترین مسیر مقید با اجرای طرح‌های عمرانی روی یال‌های شبکه معرفی شده است. در این مساله روی هریک از یال‌های شبکه تعدادی طرح قابل اجرا است که باعث کاهش زمان عبور یال و درنتیجه زمان عبور مسیر گذرنده از یال خواهد شد. هم‌چنین اجرای هر طرح هزینه مشخصی دربرداشته و مجموع هزینه طرح‌های اجرایی نباید از بودجه دردسترس تجاوز کند. در این مقاله با آزادسازی دسته‌ای از محدودیت‌ها به کمک ضرایب لاگرانژ، مساله دوگان لاگرانژی متناظر مساله اصلی نوشته شده و سپس به دو زیر مساله فرعی تجزیه می شود. جواب زیرمساله اول که یک مساله کوتاه‌ترین مسیر معمولی است، با استفاده از الگوریتم تصحیح برچسب‌گذاری به‌دست می‌آید، در حالی‌که جواب بهینه مساله فرعی دیگر بدیهی است و به سادگی مشخص می‌شود. با استفاده از جواب‌های به‌دست آمده از این مسایل فرعی، جواب مساله دوگان لاگرانژی به‌صورت یک کران پایین برای مساله اصلی مشخص می‌شود. با محاسبه یک جواب شدنی برای مساله در هر تکرار یک کران بالا برای مساله به‌دست می‌آید. در نهایت با به‌کارگیری الگوریتم تکراری زیرگرادیان، فاصله بین کران بالا و کران پایین کاهش یافته و یک جواب نزدیک به بهینه برای مساله اصلی تعیین می‌شود.

منابع

[۱] عینی، ا.، عشقی، ک.، (۱۳۹۶). الگوریتم مستطیل آبشاری و ماتریس انتقال در شبکه های کوتاه ترین مسیر با دور. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۴(۴)، ۶۷–۸۷.

[۲] دره میرکی، م.، (۱۳۹۱). الگوریتم ابتکاری جدید برای حل مساله مسیریابی وسایل نقلیه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۴).

[3] Schrijver, A. (2012). On the history of the shortest path problem. Documenta Mathematica, Extra Volume, 155-167.

[4] Landahl, H. D., Runge, R. (1946). Outline of a matrix calculus for neural nets. Bulletin of Mathematical Biology, 8, 75–81.

[5] Ford L. R. (1956). Network flow theory. Rand Corporation, 923.

[6] Dantzig, G. B. (1957). Discrete-variable extremum problems. Operations Research, 5, 266-277.

[7] Bazaraa, M.S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D. (2011). Linear Programming and Network Flows. 4th Edition, Wiley.

[8] Floyd, R.W. (1962). Algorithm 97: shortest path. Communications of the ACM, 5, 345.

[9] Wang, H., Lu, X., Zhang, X., Wang, Q., Deng, Y. (2014). A Bio-Inspired Method for the Constrained Shortest Path Problem. The Scientific World Journal, DOI:10.1155/2014/271280.

[10] Witzgall, C., Goldman, A. J. (1965). Most profitable routing before maintenance. In Proceedings of the 27th national ORSA meeting: 13 (pp. B–82). boston, MA, USA .

[11] Garey, M. R., Johnson, D. S. (1990). Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freeman.

[12] Joksch, H. C. (1966). The shortest route problem with constraints. Journal of Mathematical and Analytical Applications, 14, 191–197.

[13] Handler, G.Y, Zang, I. (1980). A dual algorithm for the constrained shortest path problem. Networks, 10, 293–310.

[14] Magnanti, T. L., Wong, R. T. (1984). Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms. Transportation Science, 18, 1-93.

[15] Kalinowski, T., Matsypura, D., Savelsbergh, M. W. P. (2015). Incremental network design with maximum flows. European Journal of Operational Research, 242, 51–62.

[16] Baxter, M., Elgindy, T., Ernst, A.T., Kalinowski, T., Savelsbergh, M. W. P. (2014). Incremental network design with shortest paths. European Journal of Operational Research, 238, 675–684.

[17] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. (2006). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Third Edition, Wiley-Interscience.

[18] Boyd, S., Xiao, L., Mutapcic, A. (2003). Subgradient methods. lecture notes of EE392o, 28.

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.2.2.3]

[19] Fisher, M .L. (2004). The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. Management Science, 50, 1861–1871.
[20] Held, M., Wolfe, P., Crowder, H. P. (1974). Validation of sub-gradient optimization, Mathematical Programming, 6, 62–88.
[21] Wang, L., Yang, L., Gao, Z. (2016). The constrained shortest path problem with stochastic correlated link travel times. European Journal of Operational Research, 225, 43–57.