

## مساله پوشش هاب تک تخصیصی بر روی شبکه ستاره‌ای، مدل بندی، خطی سازی و یافتن کران مناسب برای آن

سمیه سادات سجادی<sup>۱</sup>، فروغ معین مقدس<sup>۲\*</sup>، حسین کریمی<sup>۳</sup>

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

۲- استادیار، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

۳- استادیار، دانشگاه بجنورد، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی صنایع، بجنورد، ایران

رسید مقاله: ۱۳ تیر ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۲۰ دی ۱۳۹۶

### چکیده

هاب و  $p$  در این مقاله دو مساله پوشش هاب تک تخصیصی با ساختار ستاره‌ای که شامل دو مساله ماکزیمم پوشش پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ساختار ستاره‌ای شبکه به گونه‌ای است که یک هاب مرکزی با مکان مشخص وجود دارد و سایر هاب‌ها به طور مستقیم به هاب مرکزی متصل می‌شوند. در مساله هاب و تخصیص هر مشتری به حداکثر یک هاب است به طوری که کل تقاضای انتقال یافته  $p$  اول هدف انتخاب مکان بین مشتریان ماکزیمم شود. هدف مساله دوم حداقل سازی مجموع هزینه ثابت احداث هاب‌ها و هزینه انتقال جریان بین گره‌های شبکه است به طوری که پوشش کامل در شبکه ایجاد شود. در هر دو مساله اتصال مشتریان به مراکز هاب و هاب‌ها به هاب مرکزی به گونه‌ای خواهد بود که فاصله مبادی تا مقاصد با در نظر گرفتن فاکتور تخفیف برای اتصال بین هاب و هاب مرکزی از مقدار از پیش تعیین شده کم‌تر یا مساوی است. در هر دو مساله پس از ارایه مدل ریاضی، به خطی سازی آن‌ها و سپس استفاده از آزادسازی لاگرانژ برای یافتن کران‌های مناسبی پرداخته شده است. علاوه بر این، در مساله دوم نامساوی‌های معتبری معادل دو محدودیت مساله اریه شده است. در نهایت، نتایج حاصل از حل مدل‌های خطی،  $CAB$  غیرخطی و به کارگیری آزادسازی لاگرانژ بررسی و مقایسه شده است. بررسی این نتایج بر روی مجموعه داده‌های بیانگر آن است که مدل‌های خطی هم از لحاظ مقدار بهینه تابع هدف و هم زمان اجرا بسیار مطلوب‌تر از مدل‌های غیرخطی است. همچنین با توجه به نتایج، کران‌های به دست آمده از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ فاصله کمی با جواب بهینه مسایل دارد.

**کلمات کلیدی:** مساله پوشش هاب، مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب، شبکه ستاره‌ای، خطی سازی، آزادسازی لاگرانژ.

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: f.moeen@ub.ac.ir

## ۱ مقدمه و مرور ادبیات

هاب‌ها تسهیلاتی ویژه‌ای هستند که جریان ارسالی از مبادی مختلف را جمع‌آوری و پس از سازماندهی مجدد، آن‌ها را به سمت مقاصد ارسال می‌کنند. مساله مکان‌یابی هاب شامل انتخاب مکان هاب‌ها و تخصیص مشتریان به آن‌ها برای تعیین مسیر جریان بین گره‌های مبدأ و مقصد می‌باشد.

کاربرد عمده این مسایل در سه زمینه سوئیچینگ<sup>۱</sup>، سیستم‌های حمل و نقل<sup>۲</sup> و مراکز مرتب کردن<sup>۳</sup> است [۱]. در شبکه‌هایی که تعداد زیادی از نقاط عرضه و تقاضا وجود دارند، استفاده از مراکز هاب موجب صرفه‌جویی فراوان در اتصالات مورد نیاز برای انتقال جریان (یا کالا) در شبکه خواهد شد. هریک از این مسایل از لحاظ تخصیص به دو دسته تک‌تخصیصی<sup>۴</sup> و چندتخصیصی<sup>۵</sup> تقسیم می‌شود. در مساله تک‌تخصیصی هر مشتری حداکثر به یک هاب متصل می‌شود؛ ولی در مساله چندتخصیصی مشتریان می‌توانند از بیش از یک هاب خدمات دریافت کنند. مسایل مکان‌یابی هاب از لحاظ اتصال بین هاب‌ها نیز به دو دسته، شبکه هاب کامل<sup>۶</sup> و ناکامل<sup>۷</sup> تقسیم بندی می‌شود. در شبکه کامل بین هر جفت هاب اتصال و ارتباط برقرار است و در شبکه ناکامل ممکن است بین یک جفت هاب اتصال مستقیم برقرار نباشد. معمولاً در مسایل هاب سه فرض اصلی لحاظ می‌شود. اولاً شبکه هاب کامل فرض می‌شود. ثانیاً برای اتصالات بین هاب‌ها فاکتور تخفیف<sup>۸</sup> لحاظ می‌شود. این پارامتر مزایای اقتصادی و کاهش هزینه‌ها از طریق نقل و انتقالات بین هاب‌ها را نشان می‌دهد و به کارگیری آن باعث ایجاد رغبت بیشتر در مشتریان برای استفاده از مراکز هاب می‌شود. ثالثاً هیچ‌گونه ارتباط مستقیمی بین دو گره غیرهاب وجود ندارد؛ البته لزومی ندارد که در تمام موارد، این سه فرض لحاظ شده باشد، زمانی که خلاف این فرض‌ها در نظر گرفته شود باید به آن اشاره کرد.

مساله مکان‌یابی هاب<sup>۹</sup> نخستین بار توسط اوکلی در سال ۱۹۸۶ معرفی شد [۲]. او در سال ۱۹۸۷ نخستین مدل‌های ریاضی را برای این مسایل ارائه نمود [۳]. به علاوه اینکه او نخستین بار مفهوم فاکتور تخفیف را در مسایل مکان‌یابی هاب معرفی و به کار برد. کمبل در سال ۱۹۹۴ سه نوع اصلی از این مسایل به صورت میانه  $p$ -هاب<sup>۱۰</sup>، مرکز  $p$ -هاب<sup>۱۱</sup> و پوشش هاب<sup>۱۲</sup> را ارائه داد. او مساله پوشش هاب را به دو مساله پوشش مجموعه‌ای هاب<sup>۱۳</sup> ( $HSCP$ ) و ماکزیمم پوشش هاب<sup>۱۴</sup> ( $HMCP$ ) تقسیم‌بندی و مدل‌های درجه دوم برای آن‌ها ارائه

<sup>1</sup> Switching

<sup>2</sup> Transportation system

<sup>3</sup> Sorting point

<sup>4</sup> Single assignment

<sup>5</sup> Multiple assignment

<sup>6</sup> Complete

<sup>7</sup> Incomplete

<sup>8</sup> Discount factor

<sup>9</sup> Hub location problem

<sup>10</sup> P-hub median

<sup>11</sup> P-hub center

<sup>12</sup> Hub covering

<sup>13</sup> Hub set covering problem

<sup>14</sup> Hub maximal covering problem

داد[۴]. در سال ۲۰۰۳ کارا و تنسل، یک مدل ترکیبیاتی و یک مدل عدد صحیح برای مساله پوشش هاب ارایه دادند. آن‌ها سه روش خطی‌سازی برای مدل‌های موجود و یک روش خطی‌سازی برای مدل خودشان ارایه و نشان دادند که مساله *HSCP* یک مساله *NP-hard* است [۵]. سپس در سال ۲۰۰۵ ارنست و همکارانش یک فرمول‌بندی جدید برای مساله *HSCP* با در نظر گرفتن مفهوم شعاع پوشش و فرض چندتخصیصی بودن ارایه و مساله را با یک روش شمارش ضمنی حل نمودند [۶]. ونگ و همکاران در سال ۲۰۰۶ یک فرمول‌بندی جدید برای مساله *HMCP* چندتخصیصی ارایه و روشی بر اساس الگوریتم ژنتیک<sup>۱</sup> و جستجوی ممنوعه<sup>۲</sup> برای حل مدل خود به کار بردند [۷]. تان و کارا کاربرد مساله پوشش هاب را برای نمونه واقعی تحویل بار ترکیه مورد بررسی قرار دادند [۸]. واگنر در سال ۲۰۰۸ مدل‌های بهتری برای مساله پوشش هاب تک و چندتخصیصی ارایه کرد [۹]. آلمار و کارا در سال ۲۰۰۸ مساله پوشش هاب با فرض مینیمم‌سازی کل هزینه‌های احداث و انتقال کالا در شبکه را بررسی کردند. شبکه هاب در نظر گرفته شده در این مقاله شبکه ناکامل بود [۱۰]. کالیک و همکارانش یک فرمول‌بندی جدید برای مساله پوشش هاب تک‌تخصیصی با شبکه غیرکامل هاب ارایه و از روش جستجوی ممنوعه برای حل مدل خود استفاده کردند [۱۱]. در همان سال کیو و ونگ یک روش اتصال مجدد مسیر<sup>۳</sup> را برای حل مساله *HMCP* به کار بردند [۱۲]. قدسی و همکارانش در سال ۲۰۱۰ یک مدل فرمول‌بندی عدد صحیح آمیخته<sup>۴</sup> (*MIP*) برای مساله تک‌تخصیصی پوشش هاب ارایه و مدل خود را با روش فراابتکاری رقابت استعماری<sup>۵</sup> حل کردند [۱۳]. هوانگ و لی در سال ۲۰۱۲ مدل‌هایی برای مساله تک و چندتخصیصی *HMCP* ارایه کردند. مدل‌های آن‌ها نسبت به مدل‌های موجود تا آن زمان دارای ابعاد کوچک تری از لحاظ تعداد متغیرها و قیدها بود. آن‌ها مدل‌های خود را با روش ابتکاری<sup>۶</sup> حل کردند [۱۴]. در همان سال جبل‌عاملی و همکارانش دو مدل ریاضی خطی جدید برای مساله تک‌تخصیصی ماکزیمم پوشش هاب ارایه و مدل‌های خود را با روش شبیه‌سازی تبرید<sup>۷</sup> (*SA*) حل کردند [۱۵]. کریمی و بشیری در سال ۲۰۱۱ مدل‌هایی برای دو مساله *HSCP* و *HMCP* با نوع متفاوت شعاع پوشش ارایه و روش‌های ابتکاری برای حل مدل‌های خود بکار بردند [۱۶]. فاضل زرنندی و همکارانش نیز در سال ۲۰۱۲ مساله *HSCP* با فرض تخصیص چندگانه و پوشش پشتیبان<sup>۸</sup> و فاصله اجباری بین هاب‌ها را مدل‌بندی و حل کردند [۱۷].

به تدریج با بهبود مدل‌های ارایه شده، رویکردهای جدیدتری در مسایل مکان‌یابی هاب خصوصاً مسایل مکان‌یابی پوشش هاب ارایه شد. محمدی و همکارانش در سال ۲۰۱۱ مساله پوشش هاب در سیستم‌های پر ازدحام<sup>۹</sup> با ظرفیت محدود برای لینک‌های متصل کننده مشتریان به هاب‌ها و محدودیت طول صف ایجاد شده در

<sup>1</sup> Genetic algorithm

<sup>2</sup> Tabu search algorithm

<sup>3</sup> Path relinking

<sup>4</sup> Mixed integer programming

<sup>5</sup> Imperialist competitive

<sup>6</sup> Heuristic method

<sup>7</sup> Simulated annealing

<sup>8</sup> Backup coverage

<sup>9</sup> Busy systems

هاب‌ها را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مدل خود را با روش رقابت استعماری حل کردند [۱۸]. اقبالی‌زارچ و همکارانش در سال ۲۰۱۳ مساله پوشش هاب با چند نوع کالا<sup>۱</sup> و چند سطح<sup>۲</sup> سرویس را مدل‌بندی و مدل‌شان را با الگوریتم تکاملی تفاضلی<sup>۳</sup> حل کردند [۱۹]. قدرت‌نما و همکارانش در سال ۲۰۱۴ مساله پوشش هاب چند دوره‌ای<sup>۴</sup> را فرمول‌بندی و مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله، تقاضای مشتریان، ظرفیت هاب‌ها و ظرفیت ماشین‌های انتقال کالا در دوره‌های متفاوت ممکن است تغییر کند. هزینه‌هایی نیز برای باز کردن و فعال‌سازی مجدد هاب‌ها در نظر گرفته شده است. در این مقاله از رویکرد بهینه‌سازی استوار<sup>۵</sup> برای حل مساله استفاده شده است [۲۰]. صادقی و همکارانش در سال ۲۰۱۵ مساله پوشش هاب جدیدی را به منظور افزایش ایمنی بیش تر لینک‌ها مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله لینک‌های بین مشتریان و هاب‌ها دارای ظرفیت (از نوع تصادفی) است و برای افزایش ایمنی، قیدهای احتمالی برای ظرفیت کالای منتقل شده بین مشتریان و هاب‌ها به مساله افزوده شده است [۲۱]. قلی‌زاده و فضل‌الله تبار در سال ۲۰۱۵ مساله مکان‌یابی پوشش هاب را با فرض امکان تغییر تقاضای مشتریان و تخصیص مشتریان به هاب‌ها با توجه به ظرفیت محدود آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند [۲۲]. پیکر و کارا در سال ۲۰۱۵ مساله ماکزیمم پوشش هاب را با در نظر گرفتن شعاع پوشش تدریجی<sup>۶</sup> مدل‌بندی و حل کردند. آن‌ها نشان دادند که مدل آن‌ها به نسبت مدل‌های کمبل [۴] و هوانگ و لی [۱۴] عملکرد بهتری را نشان می‌دهد [۲۳]. سیلوا و کان‌ها در سال ۲۰۱۷ روش جستجوی ممنوعه را برای حل مدل ارائه شده توسط پیکر و کارا [۲۳] به کار بردند. آن‌ها توانستند برای نخستین بار مساله ماکزیمم پوشش هاب را برای داده‌های با ابعاد بالا (۲۰۰ نقطه‌ای)<sup>۷</sup>  $AP^y$  مورد بررسی قرار دهند [۲۴]. حسن‌زاده و همکارانش در سال ۲۰۱۶ مساله پوشش هاب تک تخصیصی با هدف مینیمم کردن کل هزینه‌های احداث هاب‌ها، استقرار سرورها، هزینه‌های نقل و انتقالات و هزینه‌های انتظار در صف را مورد مطالعه قرار دادند. در مدل آن‌ها تعداد هاب‌ها و تعداد سرورها در هر مرکز هاب جز متغیرهای تصمیم مساله است و محدودیت‌هایی برای طول صف در هر مرکز هاب و شعاع پوشش هاب وجود دارد [۲۵].

از جمله دیگر مباحث ارائه شده در خصوص مسایل مکان‌یابی هاب، رویکرد مسایل مکان‌یابی هاب با ساختار سلسله مراتبی<sup>۸</sup> است. اغلب این مسایل دارای ساختار سه سطحی<sup>۹</sup> می‌باشند. به این ترتیب که مشتریان با تقاضای انتقال کالا در پایین‌ترین سطح (سطح سوم) قرار دارند و توسط لینک‌هایی به مراکز هاب که در سطح بالاتر (سطح دوم) هستند، متصل می‌شوند. هاب‌ها اتصال مستقیمی با یکدیگر ندارند؛ بلکه با اتصال به هاب‌هایی در سطح بالاتر (سطح اول) موسوم به هاب‌های مرکزی، با یکدیگر ارتباط برقرار می‌کنند. هیچ لینک مستقیمی

<sup>1</sup> Multi-product

<sup>2</sup> Multi-level

<sup>3</sup> Differential evolution algorithm

<sup>4</sup> Multi-period

<sup>5</sup> Robust optimization

<sup>6</sup> Gradual coverage

<sup>7</sup> Australia Post

<sup>8</sup> Hierarchical

<sup>9</sup> Three levels

بین هاب‌ها در سطح دوم و همین طور بین مشتریان در سطح سوم وجود ندارد و در اغلب این مسایل فرض می‌شود که شبکه هاب مرکزی، شبکه‌ای کامل است. اگر شبکه شامل تنها یک هاب مرکزی در سطح اول باشد ساختار ایجاد شده ساختاری ستاره‌ای خواهد شد. از جمله مهم‌ترین کاربردهای این شبکه‌ها در سیستم‌های حمل و نقل و ارتباط از راه دور است [۲۶]. ترکستانی و همکارانش در سال ۲۰۱۶ مروری بر مسایل مکان‌یابی هاب با ساختار سلسله‌مراتبی داشته‌اند [۲۷].

از جمله نخستین پژوهش‌های صورت گرفته بر روی مسایل مکان‌یابی هاب سلسله‌مراتبی، پژوهش انجام شده توسط لیب و یامان در سال ۲۰۰۸ است. آن‌ها در مقاله خود مساله طراحی شبکه ارتباط از راه دور با ساختار ستاره‌ای را مورد بررسی قرار دادند. همچنین دو فرمول‌بندی برای مساله مکان‌یابی هاب با هدف مینیمم‌سازی هزینه‌های تعیین مکان هاب‌ها، تخصیص مشتریان به هاب‌ها و هزینه‌های نقل و انتقالات بین هاب‌ها و هاب‌های مرکزی ارایه و مدل‌های خود را با یک روش ابتکاری بر اساس آزادسازی لاگرانژین<sup>۱</sup> حل کردند [۲۶]. یامان در سال ۲۰۰۹ مساله میانه هاب سلسله‌مراتبی با ساختار سه سطحی و محدودیت‌هایی بر روی تحویل بارها را مدل‌بندی و مورد بررسی قرار داد. هدف این مدل تعیین مکان هاب‌های معمولی و مرکزی و تخصیص مشتریان به آن‌هاست به گونه‌ای که کل هزینه‌های نقل و انتقالات در شبکه مینیمم شود [۲۸]. یامان و الومی در سال ۲۰۱۲ دو مساله مرکز p-هاب و میانه p-هاب ستاره‌ای با محدودیت بر روی طول مسیرها را مدل‌بندی و بررسی کردند. در مساله اول هدف مینیمم کردن طول طولانی‌ترین مسیر در شبکه و در مساله دوم هدف مینیمم‌سازی کل هزینه‌های نقل و انتقالات می‌باشد. نویسندگان برای هر دو مساله مدل‌بندی‌هایی ارایه و کارایی مدل‌های خود را با به کارگیری روش شاخه و برش<sup>۲</sup> مورد ارزیابی قرار دادند [۲۹]. آلومار و همکارانش در سال ۲۰۱۲ مساله پوشش هاب سلسله‌مراتبی با دو نوع هاب و لینک بین‌هابی (زمینی و هوایی) را بررسی کردند. آن‌ها با تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای داده‌های ترکیه نشان دادند که می‌توان با هزینه نه خیلی زیاد، کیفیت سرویس را با بکارگیری شبکه‌های چند مدی<sup>۳</sup> افزایش داد [۳۰]. کورانی و صحرائیان در سال ۲۰۱۳ مساله پوشش هاب سلسله‌مراتبی با محدودیت‌هایی برای شعاع پوشش و زمان تحویل کالا را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها همچنین یک روش جدید برای محاسبه شعاع‌های پوشش برای تخصیص ارایه دادند [۳۱]. ارشدی خمسه و دوست محمدی در سال ۲۰۱۴ مساله مرکز هاب سه سطحی را بررسی کردند. آن‌ها دو حالت جداگانه شبکه کامل و شبکه غیرکامل برای هاب‌های مرکزی را مورد مطالعه قرار دادند [۳۲]. کریمی و همکارانش در سال ۲۰۱۴ مساله تک‌تخصیصه پوشش هاب سلسله‌مراتبی ظرفیت‌دار را مدل‌بندی و مورد مطالعه قرار دادند. مدل آن‌ها مشابه مدل مقاله [۲۸] است با این تفاوت که ظرفیت برای هاب‌های معمولی و هاب‌های مرکزی وجود دارد. آن‌ها عملکرد مدل خود را برای داده‌های هواپیمایی ایران<sup>۴</sup> (IAD) بررسی کردند [۳۳]. رجبی و آواخ دارستانی در سال ۲۰۱۵ مساله پوشش هاب

<sup>1</sup> Lagrangean relaxation

<sup>2</sup> Branch and cut method

<sup>3</sup> Multi-mode

<sup>4</sup> Iranian airport data

سلسله مراتبی با فرض وجود فاصله اجباری برای هاب‌های مرکزی و محدودیت‌هایی بر روی شعاع پوشش هاب‌ها را مورد بررسی قرار دادند [۳۴].

در این مقاله، مساله طراحی شبکه هاب با ساختار ستاره‌ای سه سطحی را در مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنا بر جستجوهای صورت گرفته، علی‌رغم کاربردی بودن این مسایل، این دو مساله تا کنون در مرجعی مورد مطالعه قرار نگرفته است. مکان هاب مرکزی ( $o$ ) مشخص و ظرفیتی برای آن لحاظ نمی‌شود. گره‌های هاب به طور مستقیم به هاب مرکزی متصل می‌شوند و هیچ گونه ارتباط مستقیمی بین هاب‌ها وجود ندارند، مشتریان که در سطح سوم قرار دارند، به هاب‌ها متصل می‌شوند و به طور مشابه لینک مستقیمی بین هیچ کدام از مشتریان وجود ندارد. این مقاله دو مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب<sup>۱</sup> ( $PHMCLP$ ) و مساله پوشش هاب ( $HCLP$ )<sup>۲</sup> با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان بر روی شبکه ستاره‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهد. برای افزایش عملکرد و همین‌طور رضایت‌مندی بیشتر مشتریان، محدودیت‌هایی نیز برای فاصله (یا زمان یا هزینه) انتقال کالا بین هر جفت مبدأ و مقصد در دو مساله در نظر گرفته شده است. در هر دو مساله فرض می‌شود که تخصیص مشتریان به مراکز هاب به صورت تک‌تخصیصی است. هدف مساله اول، انتخاب مکان  $p$  هاب و تخصیص مشتریان به مراکز هاب است به طوری که کل تقاضای انتقال یافته بین هر جفت گره مبدأ و مقصد ماکزیمم شود. در مساله دوم تمایل داریم کل تقاضای بین هر جفت مبدأ و مقصد را با کم‌ترین هزینه ممکن، پوشش دهیم. در این مساله تابع هزینه شامل هزینه‌های ثابت احداث هاب‌ها و هزینه انتقال جریان بین گره‌های شبکه است که بایستی مینیمم شود. در هر دو مساله نحوه اتصال نقاط تقاضا به مراکز هاب به گونه‌ای باید باشد که فاصله هر جفت مبدأ و مقصد که کالا بین آن‌ها منتقل می‌شود از مقدار از پیش تعیین شده کم‌تر یا مساوی باشد. چون در عمل اغلب هزینه انتقال کالا بین گره‌های هاب و هاب مرکزی کم‌تر از هزینه انتقال بین گره هاب و گره غیرهاب است، در هر دو مساله، برای حرکت بین هاب‌ها و هاب مرکزی فاکتور تخفیف در نظر گرفته شده است.

ادامه مقاله به این صورت سازماندهی شده است: در بخش ۲ مدل ریاضی مساله اول ارایه و با توجه به غیرخطی بودن آن، روشی برای خطی‌سازی آن پیشنهاد می‌شود. در بخش ۳ مدل ریاضی مساله دوم و بعد روشی برای خطی‌سازی و در ادامه نامساوی‌های معتبری برای این مساله ارایه می‌شود. در بخش ۴ نحوه یافتن یک کران مناسب برای هر دو مساله را به کمک آزادسازی لاگرانژ تشریح می‌کنیم. نتایج حاصل از حل مدل‌های خطی و غیرخطی و عملکرد روش آزادسازی لاگرانژ در محیط نرم‌افزار  $GAMS$  در بخش ۵ ارایه و در نهایت، در بخش ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای محققین ارایه می‌گردد.

<sup>1</sup> p-hub maximal covering location problem

<sup>2</sup> Hub covering location problem

## ۲ مساله ماکزیمم پوشش $p$ -هاب بر روی شبکه ستاره‌ای

در این مساله هدف تعیین مکان  $p$  مرکز هاب و تخصیص مشتریان به آن هاست به گونه‌ای که با توجه به مفروضات و محدودیت‌های مساله، میزان کل تقاضای منتقل شده ماکزیمم مقدار شود. ابتدا مدل ریاضی مساله را ارائه و سپس روشی برای خطی‌سازی مدل ارائه خواهیم داد.

### ۲-۱ مدل‌سازی مساله ماکزیمم پوشش $p$ -هاب بر روی شبکه ستاره‌ای

در این بخش مدل ریاضی مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب بر روی شبکه ستاره‌ای را ارائه می‌دهیم. در ابتدا مفروضات، پارامترها و متغیرهای مساله را بیان می‌کنیم.

#### • مفروضات مدل:

- ✓ شبکه مورد بررسی، شبکه سه سطحی با ساختار ستاره‌ای است. در شبکه یک هاب مرکزی به نام  $O$  با مکان مشخص وجود دارد.
- ✓ با توجه به ساختار مذکور، اگر جفت گره مبدأ و مقصد  $i$  و  $m$  به هاب یکسان  $z$  متصل شوند آن گاه مسیر انتقال کالا از گره مبدأ  $i$  به گره مقصد  $m$  به صورت  $i \rightarrow z \rightarrow m$  است و اگر جفت گره مبدأ و مقصد  $i$  و  $m$  به هاب‌های متفاوت  $z$  و  $l$  متصل شوند، آن گاه مسیر انتقال کالا از گره مبدأ  $i$  به گره مقصد  $m$  به صورت  $i \rightarrow z \rightarrow l \rightarrow m$  است.
- ✓ هر نقطه تقاضا یک مکان کاندید برای هاب شدن است.
- ✓ می‌توان حداکثر  $p$  هاب از میان نقاط کاندید انتخاب کرد.
- ✓ هر نقطه تقاضا حداکثر به یک مرکز هاب متصل است (تک تخصیصی)
- ✓ نحوه اتصال نقاط تقاضا به گره‌های هاب به گونه‌ای باید باشد که فاصله هر دو نقطه تقاضا از مقدار از پیش تعیین شده کم تر یا مساوی شود.

#### • پارامترها:

$I$ : مجموعه نقاط تقاضا ( $|I| = n$ )

$O$ : هاب مرکزی

$w_{im}$ : مقدار جریان (کالا) درخواستی برای انتقال از مشتری  $i \in I$  به مشتری  $m \in I$  (فرض می‌شود  $w_{ii} = 0$ )

$d_{ij}$ : فاصله ی گره  $i \in I \cup \{o\}$  تا گره  $j \in I \cup \{o\}$ . (فرض می‌شود  $d_{ij} = d_{ji}$  و  $d_{ii} = 0$ )

$\beta$ : حداکثر فاصله مجاز برای اتصال هر جفت مبدأ و مقصد

$\alpha$ : فاکتور تخفیف بین هاب‌ها و هاب مرکزی ( $0 < \alpha \leq 1$ )

$p$ : تعداد هاب‌های انتخاب شده

#### • متغیرهای تصمیم:

$x_{ij}$ : یک است اگر گره  $i \in I$  به هاب  $j \in I$  متصل شود و در غیر این صورت صفر

$x_{jj}$ : یک است اگر گره  $j \in I$  هاب باشد و در غیر این صورت صفر

مدل ریاضی مساله به صورت زیر است:

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{m \in I} \sum_{j \in I} \sum_{l \in I} w_{im} x_{ij} x_{ml} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{j \in I} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in I} x_{jj} = p, \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall i, j \in I; i \neq j, \quad (4)$$

$$d_{ij} x_{ij} + d_{mj} x_{mj} \leq \beta, \quad \forall i, m, j \in I; i < m, \quad (5)$$

$$(d_{ij} + \alpha d_{jo}) x_{ij} + (\alpha d_{ol} + d_{lm}) x_{ml} \leq \beta, \quad \forall i, m, j, l \in I; i < m, j \neq l, \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in I. \quad (7)$$

تابع هدف (۱) میزان کل کالای منتقل شده را ماکزیمم می‌کند. محدودیت (۲) بیان می‌کند هر گره تقاضا حداکثر به یک هاب متصل می‌شود. محدودیت (۳) تصریح می‌کند  $p$  هاب باید انتخاب شود. با توجه به محدودیت (۴)، گره  $i$  به گره  $j$  متصل می‌شود اگر  $j$  هاب باشد. با توجه به مفروضات مساله، فاصله دو گره تقاضای  $i$  و  $m$  از مقدار از پیش تعیین شده  $\beta$  کم تر یا مساوی است که این فرض در حالتی که دو گره تقاضا به هاب یکسان  $j$  متصل شوند در محدودیت (۵) و در حالتی که دو گره تقاضا به دو هاب متمایز  $j$  و  $l$  متصل شوند در محدودیت (۶) گنجانده شده است و در نهایت محدودیت (۷) باینری بودن متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهد.

مدل ریاضی این مساله از نوع برنامه‌ریزی عدد صحیح و البته غیرخطی و شامل  $O(n^2)$  متغیر و  $O(n^4)$  محدودیت است. اگر در مساله فوق محدودیتی برای طول مسیر در نظر گرفته نشود، مساله به صورت تعیین  $p$  مرکز هاب و تخصیص نقاط باقی‌مانده به هاب‌ها خواهد شد به گونه ای که کل تقاضای پوشش داده شده ماکزیمم شود. این مساله معادل مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب است؛ یعنی مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب حالت خاصی از مساله فوق است. پیکر و کارا [۲۳] نشان دادند که مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب یک مساله  $NP$ -hard است، پس مساله مورد نظر نیز  $NP$ -hard است. در ادامه این بخش یک روش برای خطی‌سازی مدل ارائه می‌شود.

## ۲-۲ خطی‌سازی مدل مساله ماکزیمم پوشش $p$ -هاب بر روی شبکه ستاره‌ای

تاکنون روش‌های متفاوتی برای خطی‌سازی مدل‌های مسایل پوشش هاب ارائه شده است. از جمله خطی‌سازی کارا و تنسل [۵]، تان و کار [۸]، کریمی و بشیری [۱۶]، یامان و الومی [۲۹] و ابراهیمی‌زاده و همکاران [۳۵] می‌باشد. ما برای خطی‌سازی مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب بر روی شبکه ستاره‌ای از ایده به کار رفته در [۳۵] استفاده می‌کنیم. با توجه به تابع هدف امکان انتقال جریان بین دو گره مبدأ  $i$  و مقصد  $m$  وجود دارد اگر مبدأ و مقصد  $i$  و  $m$  به طور همزمان به شبکه هاب متصل شوند و این امکان‌پذیر است اگر محدودیت (۵) یا (۶) (به



ترتیب در حالتی که مبدأ و مقصد به هاب یکسان یا متفاوتی متصل شوند) برای آن‌ها برقرار باشد؛ بنابراین برای خطی سازی مدل غیر خطی ارایه شده، متغیر باینری  $y_{im}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$y_{im}$  : برابر یک است اگر دو گره تقاضای  $i$  و  $m$  به طور همزمان به شبکه هاب متصل شوند و در غیر این صورت صفر می‌باشد.

با تعریف متغیر  $y_{im}$  محدودیت‌های زیر به مدل اضافه می‌شود:

$$2y_{im} \leq \sum_{j \in I} x_{ij} + \sum_{l \in I} x_{ml} \quad \forall i, m \in I \quad (8)$$

$$y_{im} \in \{0, 1\} \quad \forall i, m \in I \quad (9)$$

محدودیت (۸) ارتباط بین متغیرهای مساله را نشان می‌دهد. با توجه به این محدودیت، اگر  $y_{im}$  یک باشد آن گاه مبدأ و مقصد  $i$  و  $m$  به طور همزمان به شبکه هاب متصل هستند؛ بنابراین با توجه به محدودیت (۲) سمت راست نامساوی (۸) برابر سمت چپ آن و برابر ۲ است. اگر  $y_{im}$  صفر باشد به دلیل این که سمت راست نامساوی (۸) در هر صورت بزرگتر مساوی صفر است، این نامساوی برقرار است. به طور کلی محدودیت‌های (۵) تا (۹) به طور همزمان فرض (۶) از مفروضات اصلی مساله را تضمین می‌کنند؛ بنابراین با تعریف متغیر  $y$  و افزودن محدودیت (۸) و (۹) به محدودیت‌های مساله، تابع هدف به صورت زیر خطی می‌شود:

$$\sum_{i \in I} \sum_{m \in I} w_{im} y_{im} \quad (10)$$

با توجه به رابطه (۱۰)، امکان انتقال جریان بین دو گره مبدأ  $i$  و مقصد  $m$  وجود دارد اگر مبدأ و مقصد  $i$  و  $m$  به طور همزمان به شبکه هاب متصل شوند و این امکان‌پذیر است اگر محدودیت (۵) یا (۶) و (۸) برقرار باشد. در نهایت مدل خطی سازی شده مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب به صورت زیر است که آن را  $PI$  می‌نامیم.

$$PI: \max \sum_{i \in I} \sum_{m \in I} w_{im} y_{im}$$

$s.t \quad (2)-(9)$

### ۳ مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان بر روی شبکه ستاره‌ای

در این مساله، هدف مینیم سازی مجموع هزینه‌های احداث هاب‌ها و هزینه انتقال جریان (یا کالا) بین گره‌های شبکه است به طوری که پوشش کامل با در نظر گرفتن مفروضات و محدودیت‌های مساله ایجاد شود. در این بخش پس از ارایه مدل ریاضی مساله به خطی سازی آن و ارایه نامساوی‌های معتبر برای مدل خواهیم پرداخت.

#### ۱-۳ مدل سازی مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان بر روی شبکه ستاره‌ای

مفروضات مساله همان مفروضات مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب است به جز این که فرض ۴ جز مفروضات این مساله نمی‌باشد و فرض ۵ نیز به صورت هر نقطه تقاضا دقیقاً به یک هاب متصل است، تغییر می‌کند. پارامترها و متغیرهای اصلی مساله، همان پارامترها و متغیرهای مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب (بخش ۲-۱) است. علاوه بر آن‌ها دو پارامتر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$c_{ij}: \text{ هزینه انتقال هر واحد جریان (یا کالا) از گره } i \in I \cup \{0\} \text{ به گره } j \in I \cup \{0\}$$

$f_j$ : هزینه ثابت احداث هاب در گره  $j \in I$

بنابراین مدل ریاضی مساله به صورت زیر است:

$$\min \sum_{j \in I} f_j x_{jj} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \left( c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im} + c_{ji} \sum_{m \in I} w_{mi} \right) x_{ij} + \quad (11)$$

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \sum_{m \in I \setminus \{i\}} \alpha (c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} (1 - x_{mj})$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in I} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I, \quad (12)$$

(۴)-(۷).

تابع هدف کل هزینه‌های ثابت احداث و هزینه‌های نقل و انتقالات در شبکه است که خود شامل سه جمله است: جمله اول در این عبارت، کل هزینه احداث هاب‌هاست. جمله دوم در عبارت (۱۱)، کل هزینه‌های انتقال جریان بین هر گره تقاضا مانند  $i$  و گره هاب متصل به آن‌هاست. اگر گره  $i$  به هاب  $j$  متصل شود، آن‌گاه مجموع جریان منتقل شده از  $i$  به  $j$  برابر با کل جریان خروجی از  $i$  ( $\sum_{m \in I} w_{im}$ ) است که با در نظر گرفتن هزینه هر واحد انتقال جریان، کل هزینه جریان خارج شده از  $i$  به هاب  $j$  برابر  $c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im}$  می‌شود. به طور مشابه برای جریان ورودی به  $i$  همین بحث انجام می‌شود. جمله سوم، مجموع هزینه انتقال جریان بین هر هاب  $j$  و هاب مرکزی ( $o$ ) با در نظر گرفتن فاکتور تخفیف است به طوری که مجموع جریان منتقل شده از هاب  $j$  به هاب مرکزی برابر است با مجموع جریان از همه گره‌های متصل به هاب  $j$  تا گره‌هایی که به هاب‌های دیگر متصل‌اند یعنی  $\sum_{i \in I} \sum_{m \in I \setminus \{i\}} w_{im} x_{ij} (1 - x_{mj})$ . به طور مشابه جریان منتقل شده از هاب مرکزی به هاب  $j$  برابر  $\sum_{i \in I} \sum_{m \in I \setminus \{i\}} w_{mi} x_{ij} (1 - x_{mj})$  است. که در نهایت با در نظر گرفتن هزینه هر واحد انتقال جریان از هاب  $j$  به هاب مرکزی و برعکس، جمله سوم تابع هدف نتیجه می‌شود. محدودیت (۱۲) بیان می‌کند هر گره دقیقاً به یک هاب اختصاص دارد. سایر محدودیت‌ها مشابه مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب (بخش ۲-۱) است. این مساله نیز به واسطه غیرخطی بودن جمله سوم تابع هدف، یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی و شامل  $O(n^4)$  متغیر و  $O(n^4)$  محدودیت است. مجدداً اگر در مساله فوق محدودیتی برای طول مسیر و هزینه‌های بین هاب‌ها و هاب‌های مرکزی در نظر گرفته نشود (مقاله [۲۹] را ببینید)، مساله معادل تعیین  $p$  مرکز هاب و تخصیص نقاط باقی‌مانده به هاب‌ها به گونه‌ای که کل هزینه‌های احداث و تخصیص مینیمم شود. این مساله معادل مساله پوشش هاب است. کارا و تسلسل [۵] نشان دادند که مساله  $HSCP$  یک مساله  $NP$ -hard است؛ بنابراین مساله فوق نیز  $NP$ -hard است.

توجه داشته باشید که می‌توان با ساده‌سازی جمله سوم تابع هدف برای هر  $i = j$  و  $i \neq j$ ، آن را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha (c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \alpha (c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} -$$

$$\sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha (c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} x_{mj} - \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \alpha (c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} x_{ij}$$

پس از ساده‌سازی، تابع هدف را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in I} f_j x_{jj} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} ((c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im} + c_{ji} \sum_{m \in I} w_{mi}) - \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij})) + \\ & \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{i\}} \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} - \\ & \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} x_{mj} \end{aligned} \quad (13)$$

اکنون پس از ساده‌سازی، ملاحظه می‌شود که جمله آخر عبارت (۱۳) غیرخطی باقی می‌ماند؛ بنابراین مدل همچنان از نوع مسایل برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی است.

### ۳-۲ خطی‌سازی مدل مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان بر روی شبکه ستاره‌ای

برای خطی‌سازی مدل مساله از تکنیک مرسوم تغییر متغیر جدید، ارائه شده در [۲۹] استفاده می‌کنیم. برای هر  $j \in I$  و  $i, m \in I \setminus \{j\}$  متغیر باینری  $z_{imj} = x_{ij} x_{mj}$  تعریف می‌کنیم. با این جایگزینی تابع هدف به صورت زیر خطی می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in I} f_j x_{jj} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} ((c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im} + c_{ji} \sum_{m \in I} w_{mi}) - \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij})) + \\ & \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{i\}} \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} - \\ & \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) z_{imj} \end{aligned} \quad (14)$$

علاوه بر این برای برقراری ارتباط صحیح بین متغیر جدید  $z_{imj}$  با  $x_{ij}$  ها، دو محدودیت زیر را به مساله اضافه می‌کنیم:

$$z_{imj} \leq x_{ij} \quad \forall i, m, j \in I : i < m, i \neq j, m \neq j \quad (15)$$

$$z_{imj} \leq x_{mj} \quad \forall i, m, j \in I : i < m, i \neq j, m \neq j \quad (16)$$

توجه کنید که در این مساله نیازی به دو محدودیت

$$z_{imj} \geq x_{ij} + x_{mj} - 1 \quad \forall i, m, j \in I \quad (17)$$

$$z_{imj} \geq 0 \quad \forall i, m, j \in I \quad (18)$$

ذکر شده در [۲۹] نیست؛ زیرا برای هر  $i, j \in I$ ، اگر  $x_{ij} = 0$  یا  $x_{mj} = 0$  و یا هر دو برابر صفر باشند، آن‌گاه بنا به تعریف  $z_{imj}$ ، باید  $z_{imj} = 0$  باشد؛ اما با توجه به قیدهای (۱۵) و (۱۶) داریم  $z_{imj} \leq 0$  و با توجه به ساختار تابع هدف و منهای پشت عبارت شامل  $z_{imj}$ ،  $z_{imj} = 0$  خواهد شد. همچنین برای  $i, j \in I$ ، اگر داشته باشیم  $x_{ij} = 1$  و  $x_{mj} = 1$ ، آن‌گاه بنا به تعریف باید  $z_{imj} = 1$  باشد. که از قیدهای (۱۵) و (۱۶) داریم  $z_{imj} \leq 1$ . با توجه به مینیمم سازی بودن تابع هدف و منهای پشت عبارت شامل  $z_{imj}$ ، مقدار  $z_{imj}$  به سمت بیش‌ترین مقدار

ممکن خود یعنی یک پیش می‌رود؛ یعنی مقدار  $z_{imj} = 1$  خواهد شد؛ بنابراین در هر دو حالت محدودیت (۱۷) و (۱۸) برقرار است و به دلیل زاید بودن از آوردن آن‌ها در مدل خطی خودداری می‌کنیم.

### ۳-۳ ارابه نامساوی معتبر برای مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان

در این قسمت در نظر داریم محدودیت معتبری را برای بهبود مدل و کاهش تعداد محدودیت‌های مورد بررسی جایگزین محدودیت‌های (۵) و (۶) مساله کنیم. برای این منظور از ایده به کار گرفته شده در [۹] استفاده می‌کنیم. با توجه به مفروضات مساله، بین هر دو گره ارتباط برقرار می‌شود (با توجه به محدودیت (۱۲) و ساختار شبکه) و فاصله بین هر دو گره (با در نظر گرفتن مسیر اتصال آن‌ها) باید کم‌تر یا مساوی مقدار از پیش تعیین شده  $\beta$  باشد (محدودیت‌های (۵) و (۶))؛ بنابراین مجموعه  $VA$ <sup>۱</sup> به عنوان مجموعه تخصیص‌های معتبر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$VA = \left\{ (i, j) \mid i, j \in I \text{ و } d_{ij} \leq \beta \right. \\ \left. d_{ij} + \alpha \max_{k \neq j} (d_{jo} + d_{ok}) \leq \beta \right\}$$

با توجه به مجموعه  $VA$ ، اگر محدودیت‌های (۵) و (۶) برقرار نباشند آن‌گاه برای هر  $(i, j), (m, l) \in VA$  به طور همزمان نباید  $x_{ij}$  و  $x_{ml}$  برابر یک شوند؛ بنابراین مجموعه  $IA$ <sup>۲</sup> شامل مجموعه چهارتایی‌های ناسازگار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$IA = \left\{ (i, j, m, l) \mid \begin{array}{ll} (i, j), (m, l) \in VA, & i < m \\ d_{ij} + d_{mj} > \beta & \text{if } l = j \\ d_{ij} + \alpha(d_{jo} + d_{ol}) + d_{ml} > \beta & \text{else} \end{array} \right\}$$

با تعریف دو مجموعه  $VA$  و  $IA$  نامساوی زیر برای مساله معتبر است:

$$x_{ij} + x_{ml} \leq 1 \quad \forall (i, j, m, l) \in IA \quad (19)$$

زیرا با توجه به مجموعه‌های تعریف شده  $VA$  و  $IA$ ، هر چهارتایی  $(i, j, m, l)$  که در نامساوی (۱۹) صدق نکند محدودیت طول مسیر برای مسیر نظیر آن چهارتایی برقرار است؛ بنابراین می‌توان نامساوی (۱۹) را جایگزین دو محدودیت (۵) و (۶) کرد؛ بنابراین مدل نهایی مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان به صورت زیر است این مدل را  $P2$  می‌نامیم.

$$P2: \quad \min \quad \sum_{j \in I} f_j x_{jj} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} ((c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im} + c_{ji} \sum_{m \in I} w_{mi}) - \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) + \\ \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi})) x_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{i\}} \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} - \\ \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) z_{imj} \\ s.t. \quad x_{ij} + x_{ml} \leq 1, \quad \forall (i, j, m, l) \in IA \quad (19)$$

<sup>1</sup> Valid assignment

<sup>2</sup> Incompatible assignment<sup>41</sup>

$$\sum_{j:(i,j) \in VA} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I, \quad (20)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad \forall i, j \in VA; i \neq j, \quad (21)$$

$$z_{imj} \leq x_{ij}, \quad \forall i, m, j \in I : (i, j), (m, j) \in VA, i \neq j, m \neq j, \quad (22)$$

$$z_{imj} \leq x_{mj}, \quad \forall i, m, j \in I : (i, j), (m, j) \in VA, i \neq j, m \neq j, \quad (23)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in VA, \quad (24)$$

$$z_{imj} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j), (m, j) \in VA. \quad (25)$$

به طور کلی محدودیت‌های (۲۰) تا (۲۵) همان محدودیت‌های ارایه شده در مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان (بخش ۳-۲) است، با این تفاوت که بعضی از متغیرهای  $x_{ij}$  هرگز نمی‌توانند یک شوند. به عبارت دیگر انتخاب گره‌های هاب و تخصیص گره‌های غیرهاب به هاب‌ها از بین جفت گره‌هایی امکان‌پذیر است که در مجموعه  $VA$  وجود دارند.

#### ۴ روش آزادسازی لاگرانژ

روش آزادسازی لاگرانژ یکی از روش‌های ابتکاری پرکاربرد در حل مسایل بهینه‌سازی است. این روش اغلب برای حل مسایل مکان‌یابی و طراحی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۶]. روش آزادسازی لاگرانژ جواب‌های قابل قبولی ایجاد می‌کند که عمدتاً این جواب‌ها به عنوان یک کران بالا (در مساله ماکزیم‌سازی) یا کران پایین (در مساله مینیم‌سازی) برای مساله اصلی است. برای به دست آوردن بهترین کران، مساله دوگان لاگرانژ را حل می‌کنیم. یکی از روش‌های کارآمد برای حل مساله دوگان لاگرانژ استفاده از الگوریتم زیرگرادیان<sup>۱</sup> است [۳۶]. لیب و یامان در سال ۲۰۰۸ روش ابتکاری بر اساس آزادسازی لاگرانژ برای مسایل مکان‌یابی هاب با ساختار ستاره‌ای ارایه دادند [۲۶]. یامان مساله میانه  $p$ -هاب ستاره‌ای با ظرفیت محدود برای کمان‌ها را در سال ۲۰۰۸ با روش ابتکاری بر اساس آزادسازی لاگرانژ حل نمود [۳۷]. ایوان کانتزرز و همکاران در سال ۲۰۰۹ این روش را برای حل مساله مکان‌یابی هاب تک تخصیصی ظرفیت دار به کار بردند [۳۸]. کریمی و ستاک در سال ۲۰۱۳ از این روش برای حل مساله هاب در شبکه‌های ناکامل استفاده کردند [۳۹].

#### ۴-۱ یافتن کران بالا برای مساله ماکزیم پوشش $p$ -هاب به کمک آزادسازی لاگرانژ

مساله  $P_1$  بخش (۲-۲) را در نظر بگیرید. در این مساله محدودیت (۸) را با ضریب لاگرانژ  $\delta_{im}$  آزاد می‌کنیم؛ بنابراین مدل آزادسازی شده به صورت زیر می‌شود:

$$k(\delta) = \max \sum_{i \in I} \sum_{m \in I} (w_{im} - 2\delta_{im}) y_{im} + \sum_{i \in I} \sum_{m \in I} \delta_{im} \left( \sum_{j \in I} x_{ij} + \sum_{l \in I} x_{ml} \right) \quad (26)$$

$s.t$  (۹) و (۷)-(۲)

<sup>1</sup> Subgradient algorithm

به ازای  $\delta \geq 0$  مفروض،  $K(\delta)$  یک کران بالا برای مساله  $P1$  به ما می‌دهد. برای به دست آوردن بهترین کران بالا دوگان لاگرانژ<sup>۴۵</sup> را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$D1): \quad \min_{\delta \geq 0} \quad k(\delta) \quad (27)$$

برای حل مساله  $D1$  از روش بهینه‌سازی زیرگرادیان استفاده می‌کنیم. فرض کنیم بازای  $\delta \geq 0$  مفروض،  $x(\delta)$  و  $y(\delta)$  جواب بهینه  $k(\delta)$  باشد. آنگاه زیرگرادیان  $k(\delta)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(\delta) = - \left( 2y_{im}(\delta) - \sum_{j \in I} x_{ij}(\delta) - \sum_{l \in I} x_{ml}(\delta) \right)_{i,m} \quad (28)$$

#### ۲-۴ الگوریتم زیرگرادیان برای یافتن بهترین کران بالا برای مساله ماکزیمم پوشش $p$ -هاب با ساختار ستاره‌ای

الگوریتم زیرگرادیان برای مساله ماکزیمم پوشش  $p$ -هاب شامل گام‌های زیر است:

**گام ۱:** یک کران پایین (جواب شدنی) به طور تصادفی تعیین می‌کنیم و آن را  $LB$  می‌نامیم. سپس یک مقدار بسیار بزرگ (مثلاً  $+\infty$ ) به عنوان جواب بهینه اولیه انتخاب می‌کنیم و آن را  $UB^*$  می‌نامیم. پارامتر  $\theta$  که پارامتری برای محاسبه طول گام است برابر ۲ قرار می‌دهیم. پارامتر  $m$  که نشان‌دهنده تعداد تکرارهای متوالی است که بهبودی در کران به دست آمده ایجاد نشده، برابر ۰ قرار می‌دهیم. پارامتر  $r$  را به عنوان یک کران بالا برای  $m$  برابر ۲ قرار می‌دهیم. همچنین ضرایب لاگرانژ اولیه را با محاسبه دوگان لاگرانژ متناظر با محدودیت آزاد شده محاسبه می‌کنیم. سپس به گام ۲ می‌رویم.

**گام ۲:** مساله آزاد شده را حل می‌کنیم و مقدار آن را  $UB$  قرار می‌دهیم سپس  $x^*$  را محاسبه می‌کنیم و به گام ۳ می‌رویم.

**گام ۳:** اگر  $UB < UB^*$  آن گاه  $UB^* := UB$ . در غیر این صورت قرار می‌دهیم  $m = m + 1$ . اگر  $m = r$  آن گاه پارامتر  $\theta$  را نصف می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $m = 0$ . سپس به گام ۴ می‌رویم.

**گام ۴:** طول گام  $k$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم ([۲۶] و [۳۸]):

$$k = \theta \frac{UB^* - LB}{\sum_{i \in I} \sum_{m \in I} (2y_{im}(\delta) - \sum_{j \in I} x_{ij}(\delta) - \sum_{l \in I} x_{ml}(\delta))^2} \quad (29)$$

در محاسبه طول گام مخرج کسر برابر است با مجموع مجذور محدودیت‌های آزاد شده به ازای  $x^*$ . سپس ضرایب لاگرانژ را به صورت زیر بروزرسانی می‌کنیم و به گام ۵ می‌رویم.

$$\delta_{im} = \max \left( 0, \delta_{im} + k \left( 2y_{im}(\delta) - \sum_{j \in I} x_{ij}(\delta) - \sum_{l \in I} x_{ml}(\delta) \right) \right) \quad (30)$$

**گام ۵:** اگر شرط توقف برقرار بود آن گاه توقف کنید در غیر این صورت به گام ۲ رجوع کنید. (در این مساله شرط توقف به صورت زیر در نظر گرفته شده است؛ یعنی ماکزیمم اختلاف ضریب لاگرانژ در دو تکرار متوالی کم تر از ۱۰۰ باشد.)

$$\max(\delta_{i+1,m+1} - \delta_{im}) < 100 \quad (31)$$

### ۳-۴ یافتن کران پایین برای مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان به کمک آزادسازی لاگرانژ

مساله  $P2$  بخش (۳-۲) را در نظر بگیرید. در این مساله محدودیت‌های (۲۲) و (۲۳) را برای هر  $(i, j), (m, j) \in VA$  به ترتیب با ضرایب لاگرانژ نامنفی  $\lambda_{imj}$  و  $\mu_{imj}$  آزاد می‌کنیم؛ بنابراین مدل آزادسازی شده به صورت زیر می‌شود:

$$L(\lambda, \mu) = \min \sum_{j \in I} f_j x_{jj} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} ((c_{ij} \sum_{m \in I} w_{im} + c_{ji} \sum_{m \in I} w_{mi}) - \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij})) + \sum_{m \in I \setminus \{i, j\}} \alpha(c_{jo} w_{im} + c_{oj} w_{mi}) x_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{i\}} \alpha(c_{jo} w_{ji} + c_{oj} w_{ij}) x_{jj} - \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in I \setminus \{j\}} \lambda_{imj} (z_{imj} - x_{ij}) + \sum_{j \in I} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \sum_{m \in I \setminus \{j\}} \mu_{imj} (z_{imj} - x_{mj}) \quad (32)$$

$s.t. \quad (19)-(21), (24), (25)$

بازای  $\lambda \geq 0$  و  $\mu \geq 0$  مفروض،  $L(\lambda, \mu)$  یک کران پایین برای مساله  $P2$  می‌دهد. برای به دست آوردن بهترین کران پایین دو گان لاگرانژ<sup>۱</sup> را محاسبه می‌کنیم:

$$D2: \quad \max_{\lambda \geq 0, \mu \geq 0} L(\lambda, \mu) \quad (34)$$

برای حل مساله  $D2$  مشابه بخش قبلی از بهینه‌سازی زیرگرادیان استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $x(\lambda, \mu)$  و  $z(\lambda, \mu)$  جواب بهینه  $L(\lambda, \mu)$  باشد. آنگاه زیرگرادیان  $L(\lambda, \mu)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\xi(\lambda, \mu) = (z_{imj}(\lambda) - x_{ij}(\lambda), z_{imj}(\mu) - x_{mj}(\mu))_{i,m,j} \quad (35)$$

طول گام برای این مساله در الگوریتم زیرگرادیان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k = \theta \frac{LB^* - UB}{\sum_{i \in I} \sum_{m \in I} \sum_{j \in I} (h_{imj}(\lambda) - x_{ij}(\lambda))^2 + \sum_{i \in I} \sum_{m \in I} \sum_{j \in I} (h_{imj}(\mu) - x_{mj}(\mu))^2} \quad (36)$$

که در آن  $UB$  یک کران بالا (جواب شدنی) از مساله اصلی است و به طور تصادفی انتخاب می‌شود.  $LB^*$  نیز جواب بهینه به دست آمده در هر تکرار الگوریتم زیرگرادیان است. در این الگوریتم ضریب لاگرانژ به صورت زیر به روز رسانی می‌شود:

$$\lambda_{imj} = \max(0, \lambda_{imj} + k (h_{imj}(\lambda) - x_{ij}(\lambda))) \quad (37)$$

$$\mu_{imj} = \max(0, \mu_{imj} + k (h_{imj}(\mu) - x_{mj}(\mu))) \quad (38)$$

و شرط توقف  $\theta < 10^{-3}$  در نظر گرفته شده است.

<sup>1</sup> Duality lagrangean

## ۵ نتایج محاسباتی

در این بخش، نتایج محاسباتی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. ابتدا نتایج حاصل از حل مدل‌های ارایه شده (مدل‌های  $P_1$  و  $P_2$ ) در این مقاله به کمک نرم‌افزار *GAMS* ارایه می‌شود. سپس برای سنجش عملکرد این مدل‌ها، نتایج حاصل از حل مدل‌های غیرخطی (بخش‌های ۱-۲ و ۱-۳) ارایه و با نتایج حاصل از حل مدل‌های خطی مقایسه می‌شود. در پایان کارکرد روش آزادسازی لاگرانژ برای حل مدل‌های خطی‌سازی شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که حل‌کننده مدل‌های خطی *CPLEX* و مدل‌های غیر خطی *BONMIN* می‌باشد و کلیه محاسبات عددی به وسیله یک رایانه شخصی با مشخصات *RAM 6 GB* و *CPU 2.4 GHz core i5* انجام شده است.

برای حل مدل‌ها از مجموعه داده‌های *CAB*<sup>۱</sup> مربوط به تحقیقات اوکلی استفاده می‌کنیم [۳]. این داده‌ها بر اساس مسافرت‌های هوایی در آمریکا در سال ۱۹۷۰ است. داده‌های *CAB* برای ۲۵ گره ارایه شده که شامل میزان جریان (تقاضا یا کالا)، فاصله (زمان پیمودن مسیر یا هزینه) بین هر دو گره می‌باشد، ماتریس مربوط به آن‌ها متقارن است. در این نمونه هزینه بین نقاط را برابر فواصل میان آن‌ها در نظر می‌گیریم؛ یعنی  $d_{ij} = c_{ij}$ . به دلیل در اختیار نداشتن هزینه‌های ثابت احداث هاب در گره  $j$  در داده‌های *CAB، این پارامتر به صورت آنچه در [۴۰] آمده محاسبه شده است؛ یعنی  $f_j = \frac{(10^4 \times dem(j))}{qq(j)}$  که در آن  $dem(j) = \sum_i w_{ij}$  و  $qq(j) = \max_i c_{ji}$  می‌باشد. از میان ۲۵ گره داده‌های *CAB* ۸ گره از جمله گره‌هایی است که به مرکز نزدیک تر است به همین دلیل به عنوان هاب مرکزی انتخاب شده است. در هر دو مساله فرض شده است که فاصله بین هر دو گره کم تر یا مساوی مقدار از پیش تعیین شده  $\beta$  باید باشد. برای به دست آوردن پارامتر  $\beta$  از حل مساله مرکز  $p$ -هاب ستاره‌ای [۲۹] با در نظر گرفتن مقادیر مختلف  $\alpha$  استفاده می‌کنیم. هدف این مساله انتخاب  $p$  مکان هاب و تخصیص هر گره به یک هاب است به طوری که بیشترین فاصله بین دو گره شبکه، کمترین مقدار ممکن شود. نتایج حاصل از حل این مساله در جدول ۱ آورده شده است.*

جدول ۱. نتایج حاصل از حل مساله مرکز  $p$ -هاب ستاره‌ای به‌ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $p$

$\alpha$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
۰/۲	۲۰۴۹/۴۹۰	۱۷۷۵/۱۶۰	۱۵۷۵/۰۰۱	۱۳۷۳/۹۸۶
۰/۴	۲۴۵۵/۲۳۷	۲۰۷۷/۶۵۷	۱۹۷۵/۲۱۳	۱۸۱۹/۸۰۷
۰/۶	۲۷۵۴/۷۵۶	۲۴۰۰/۶۸۳	۲۲۴۸/۵۹۹	۲۱۴۸/۹۰۹
۰/۸	۲۸۶۲/۰۰۷	۲۶۱۹/۱۷۰	۲۵۱۱/۹۱۹	۲۵۱۰/۰۱۳
۱	۳۰۱۰/۲۴۵	۲۹۳۴/۴۰۹	۲۸۲۷/۱۵۸	۲۸۲۷/۱۵۸

با توجه به جدول ۱، همان‌گونه که انتظار داریم برای مقادیر ثابت  $\alpha$  با افزایش  $p$  مقدار تابع هدف ( $\beta$ ) کاهش می‌یابد و با‌ازای مقادیر ثابت  $p$  با افزایش  $\alpha$  مقدار تابع هدف ( $\beta$ ) افزایش می‌یابد.

<sup>1</sup> Civil aeronautics board



نتایج حاصل از حل مساله ماکزیمیم پوشش  $p$ -هاب خطی شده (مدل  $PI$ ) با مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  در جدول ۲ آمده است. در این جدول مقادیر  $\beta$  مطابق جدول ۱ قرار داده شده است. مقدار بهینه تابع هدف مساله  $PI$  است. گره‌هایی که به عنوان هاب انتخاب شده‌اند در ستون  $hub$  آورده شده و  $CPU$  زمان اجرا به ثانیه است.

جدول ۲. نتایج حاصل از حل مساله خطی‌سازی ماکزیمیم پوشش  $p$ -هاب (مدل  $PI$ ) به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$

$\alpha$	$\beta$	$p$	$Z_{opt}$	$hub$	$CPU$
۰/۲	۲۰۴۹/۴۹۰	۲	۷۸۱۱۹۴۰	۵,۲۲	۴/۰۳۵
	۱۷۷۵/۱۶۰	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۹,۱۶,۲۲	۳/۸۲۲
	۱۵۷۵/۰۰۱	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱۲,۱۳,۱۷,۲۳۲	۳/۶۵۰
	۱۳۷۳/۹۸۶	۵	۷۸۱۱۹۴۰	۱۲,۱۷,۲۱,۲۴,۲۵	۵/۰۲۵
	۲۴۵۵/۲۳۷	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۲۱,۲۲	۵/۳۸۰
۰/۴	۲۰۷۷/۶۵۷	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۵,۱۲,۲۳	۵/۰۳۵
	۱۹۷۵/۲۱۳	۴	۷۸۸۸۵۸۴	۱,۱۲,۲۲,۲۳	۵/۰۰۵
	۱۸۱۹/۸۰۷	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۲,۱۸,۲۳,۲۴	۵/۰۱۰
	۲۷۵۴/۷۵۶	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۲	۶/۷۰۰
	۲۴۰۰/۶۸۳	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱۲,۲۱,۲۳	۶/۰۶۵
۰/۶	۲۲۴۸/۵۹۹	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱۹,۲۱,۲۲,۲۳	۵/۶۵۰
	۲۱۴۸/۹۰۹	۵	۷۸۱۱۹۴۰	۷,۱۲,۱۹,۲۱,۲۲	۶/۰۰۲
	۲۸۶۲/۰۰۷	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۲۲	۵/۶۳۰
	۲۶۱۹/۱۷۰	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۲۲,۲۳	۴/۷۶۰
	۲۵۱۱/۹۱۹	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۲,۲۲,۲۳	۴/۷۱۰
۰/۸	۲۵۱۰/۰۱۳	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱۲,۱۹,۲۱,۲۲,۲۳	۴/۷۱۸
	۳۰۱۰/۲۴۵	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۳	۵/۶۶۰
	۲۹۳۴/۴۰۹	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۲۲,۲۳	۴/۶۹۵
	۲۸۲۷/۱۵۸	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۹,۲۲,۲۳	۴/۷۲۰
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱۱,۱۲,۲۱,۲۲,۲۳	۴/۷۵۵

با توجه به جدول ۲ نتایج زیر را داریم:

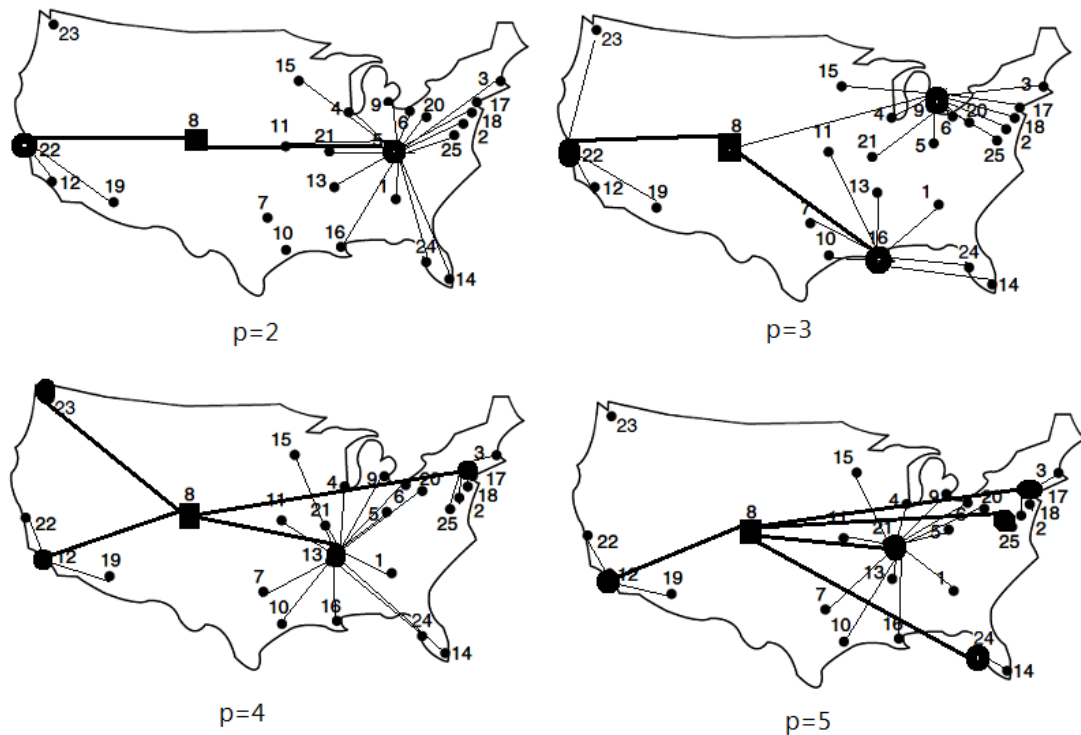
- به ازای مقادیر ثابت  $\alpha$  با افزایش تعداد هاب‌ها (و در نتیجه کاهش  $\beta$ )، به جز چند مورد مقدار تابع هدف ثابت است. یعنی در بیش تر موارد بازای مقادیر متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$ ، ماکزیمیم جریان بین گره‌های شبکه منتقل می‌شود.

- به ازای مقادیر ثابت  $\alpha$  با افزایش تعداد هاب‌ها (و در نتیجه کاهش  $\beta$ )، در اکثر مواقع مقدار تابع هدف ثابت است؛ ولی در هر حالت گره‌هایی که به عنوان هاب انتخاب می‌شود، متفاوتند.

- به ازای مقادیر ثابت  $\alpha$  و افزایش تعداد هاب‌ها (و در نتیجه کاهش  $\beta$ )، زمان اجرا در اکثر مواقع کاهش می‌یابد.

- به ازای مقادیر ثابت  $p$  با افزایش  $\alpha$ ، در اکثر موارد ماکزیمم جریان بین گره‌های شبکه منتقل می‌شود و زمان اجرا در اکثر موارد افزایش می‌یابد.

برای درک بهتر نتایج محاسباتی و تحلیل آن‌ها، به عنوان نمونه روند تغییر مکان هاب‌های تعیین شده و نحوه تخصیص گره‌های غیرهاب به هاب‌ها را برای  $\alpha = 0.2$  و مقادیر متفاوت  $p$  برای داده‌های CAB در شکل ۱ آورده‌ایم. با توجه به شکل ۱ به دلیل کاهش  $\beta$  و محدود شدن تخصیص‌ها برای  $\alpha = 0.2$  جریان منتقل شده برای  $p = 5$  نسبت به  $p = 3$  و  $p = 4$  کاهش یافته است. یعنی برای  $p$  برابر ۲ و ۵، گره ۲۳ به هیچ هابی متصل نیست به همین دلیل امکان انتقال جریان از ۲۳ به هیچ گره‌ای امکان‌پذیر نیست؛ اما برای  $p = 3$  و  $p = 4$  امکان انتقال جریان بین همه گره‌های شبکه امکان‌پذیر است. در ادامه به بررسی مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان می‌پردازیم. نتایج حاصل از حل این مساله در جدول ۳ آمده است.



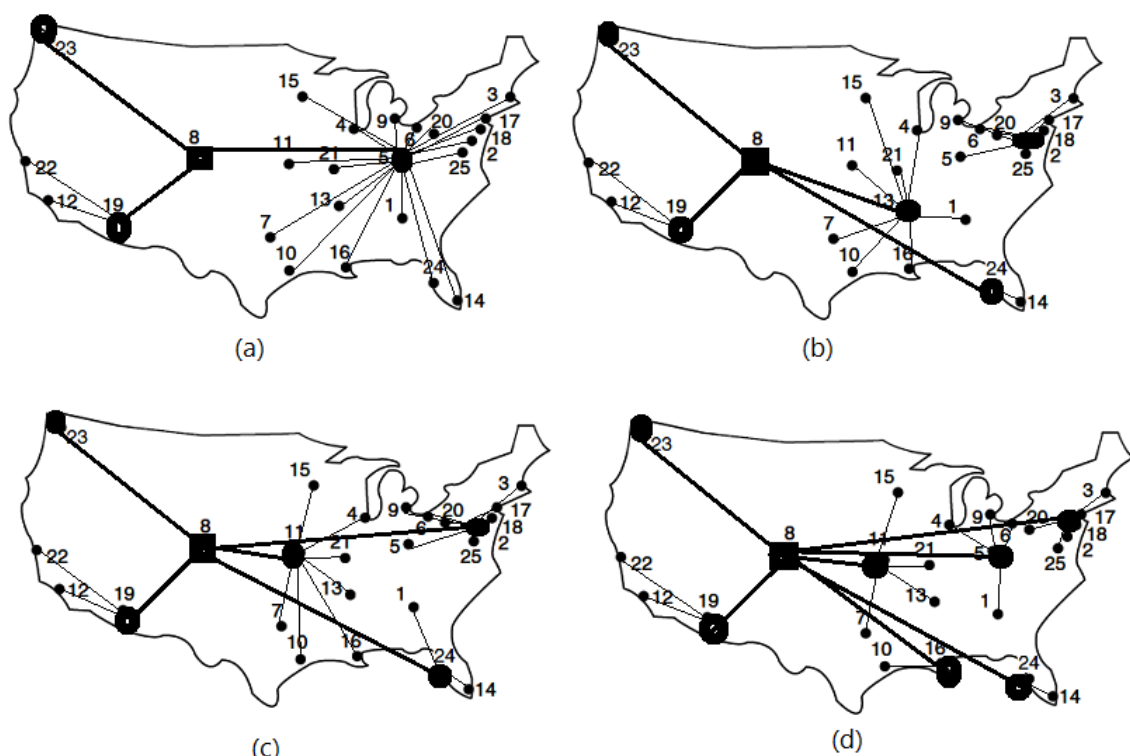
شکل ۱: گره‌های هاب انتخاب شده و تخصیص سایر گره‌ها به هاب‌ها به ازای  $\alpha = 0.2$  و مقادیر مختلف  $p$

جدول ۳. نتایج حاصل از حل مساله خطی سازی شده پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان (مدل  $P2$ ) به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$

$\alpha$	$\beta$	$Z_{opt}$	hub	CPU
۰/۲	۲۰۴۹/۴۹۰	۲/۶۶۳۷۱e+۱۰	۵,۱۹,۲۳	۵/۶۷۵
	۱۷۷۵/۱۶۰	۳/۵۹۵۵۵e+۱۰	۲,۱۳,۱۹,۲۳,۲۴	۴/۵۵۰
	۱۵۷۵/۰۰۱	۴/۱۷۸۰۸e+۱۰	۲,۱۱,۱۹,۲۳,۲۴	۴/۳۵۵
	۱۳۷۳/۹۸۶	۶/۱۴۹۹۸e+۱۰	۵,۱۱,۱۶,۱۸,۱۹,۲۳,۲۴	۴/۸۵۰
۰/۴	۲۴۵۵/۲۳۷	۲/۷۲۷۹۶e+۱۰	۵,۱۹,۲۳	۶/۰۰۰
	۲۰۷۷/۶۵۷	۳/۸۲۳۹۶e+۱۰	۲,۱۳,۱۹,۲۳,۲۴	۶/۲۵۰
	۱۹۷۵/۲۱۳	۴/۳۸۸۷۶e+۱۰	۲,۱۱,۱۹,۲۳,۲۴	۵/۱۶۰
	۱۸۱۹/۸۰۷	۵/۰۴۱۵۵e+۱۰	۱۱,۱۸,۱۹,۲۳,۲۴	۴/۷۶۰
۰/۶	۲۷۵۴/۷۵۶	۲/۷۹۲۰e+۱۰	۵,۱۹,۲۳	۶/۲۱۰
	۲۴۰۰/۶۸۳	۴/۳۶۸۶۷e+۱۰	۵,۱۹,۲۲,۲۳	۵/۴۲۰
	۲۲۴۸/۵۹۹	۵/۲۹۹۳۳e+۱۰	۱۹,۲۱,۲۲,۲۳	۵/۲۵۵
	۲۱۴۸/۹۰۹	۹/۰۶۵۰۱e+۱۰	۲,۳,۵,۱۱,۱۴,۱۹,۲۳,۲۴	۵/۴۰۵
۰/۸	۲۸۶۲/۰۰۷	۳/۶۶۵۶۲e+۱۰	۱۱,۱۹,۲۳	۶/۵۱۵
	۲۶۱۹/۱۷۰	۴/۷۵۱۷۴e+۱۰	۱۱,۲۲,۲۳	۵/۵۰۵
	۲۵۱۱/۹۱۹	۷/۱۰۱۳۸e+۱۰	۱۱,۱۲,۲۲,۲۳	۵/۳۵۰
	۲۵۱۰/۰۱۳	۷/۷۵۱۷۸e+۱۰	۱۲,۱۹,۲۱,۲۲,۲۳	۵/۲۹۵
۱	۳۰۱۰/۲۴۵	۲/۵۸۹۷۶e+۱۰	۱۱	۶/۵۲۰
	۲۹۳۴/۴۰۹	۴/۷۸۵۰۴e+۱۰	۱۱,۲۲,۲۳	۵/۵۰۵
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵/۳۰۹۸۳e+۱۰	۱۱,۱۹,۲۲,۲۳	۵/۴۹۰
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵/۳۰۹۸۳e+۱۰	۱۱,۱۹,۲۲,۲۳	۵/۴۹۰

از جدول ۳ نتایج زیر حاصل می شود:

- برای مقادیر ثابت  $\alpha$  با کاهش  $\beta$ ، مقدار بهینه تابع هدف افزایش می یابد.
- برای مقادیر ثابت  $\alpha$  با کاهش  $\beta$ ، تعداد مراکز هاب افزایش می یابد و در اکثر مواقع زمان حل کاهش می یابد.
- برای مقادیر ثابت  $\alpha$  با کاهش  $\beta$ ، در اکثر مواقع گره هایی که به عنوان هاب انتخاب شده اند، هاب باقی می ماند.
- به طور مشابه برای  $\alpha = 0/2$  و مقادیر مختلف  $\beta$ ، گره هایی که به عنوان هاب انتخاب شده اند و همچنین تخصیص سایر گره ها به هاب ها برای داده های CAB در شکل ۲ آورده شده است. هاب ها و تخصیص ها برای  $\beta = 2049/490$  در شکل (a)، برای  $\beta = 1775/160$  در شکل (b)، برای  $\beta = 1575/001$  در شکل (c) و برای  $\beta = 1373/986$  در شکل (d) نشان داده شده است. با توجه به شکل ۲ با کاهش مقدار  $\beta$ ، برای ایجاد پوشش کامل، گره های بیش تری لازم است به عنوان هاب انتخاب شوند و این باعث می شود مقدار کل هزینه ها افزایش یابد.



شکل ۲. گره‌های هاب و تخصیص سایر گره‌ها به هاب‌ها به ازای  $\alpha = 0/2$

برای بررسی عملکرد مدل‌های خطی‌سازی شده، مدل‌های غیرخطی را نیز به کمک نرم‌افزار *GAMS* حل کردیم. *GAMS* از حل‌کننده *BONMIN* برای حل مدل‌ها استفاده کرده است. در مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب به طور میانگین نرم‌افزار *GAMS* بعد از گذشت حدود ۱۰۰۰ ثانیه متوقف شد و این حل‌کننده به ازای مقادیر متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$ ، جواب شدنی صفر به دست آورد. در مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان، در ۶۰ درصد موارد جواب شدنی در کم‌تر از یک ساعت حاصل شد و در ۴۰ درصد باقیمانده نرم‌افزار *GAMS* بعد از گذشت بیش از سه ساعت متوقف شد ولی حل‌کننده *BONMIN* هیچ جواب شدنی به دست نیاورد. با توجه به نتایج به دست آمده از حل مدل‌های خطی و غیرخطی در هر دو مساله، عملکرد مدل‌های خطی هم از لحاظ مقدار بهینه تابع هدف و هم زمان اجرا بسیار مطلوب‌تر از مدل‌های غیرخطی است.

در ادامه نتایج حاصل از حل مسایل با روش آزادسازی لاگرانژ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در جدول ۴ نتایج حاصل از حل مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب به کمک آزادسازی لاگرانژ آمده است. در این الگوریتم شرط توقف  $\max(\delta_{i+1,m+1} - \delta_{im}) < 100$  قرار داده شده است. ستون‌های  $UB^*$ ،  $gap$  و  $CPU$  به ترتیب بهترین کران بالایی به دست آمده، تعداد تکرارها برای رسیدن به بهترین کران بالا، فاصله بین کران به دست آمده تا مقدار بهینه بر حسب درصد و زمان اجرا به ثانیه است. مقدار  $gap$  نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$gap = \left( \frac{UB^* - z_{opt}}{z_{opt}} \right) \times 100$$

جدول ۴. نتایج حاصل از حل مساله ماکزیم پوشش  $p$ -هاب (مدل *PI*) با آزادسازی لاگرانژ به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$

$\alpha$	$\beta$	$P$	$UB^*$	$Itr$	$gap$	$CPU$
۰/۲	۲۰۴۹/۴۹۰	۲	۷۹۷۰۲۱۳/۷۸۱	۲۴	۲,۰۲	۵۲/۲۹۸
	۱۷۷۵/۱۶۰	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۱۵۷۵/۰۰۱	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۴۲۰
	۱۳۷۳/۹۸۶	۵	۷۹۷۱۲۶۷/۹۹۴	۴۲	۲,۰۳	۱۲۶/۰۱۴
	۲۴۵۵/۲۳۷	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
۰/۴	۲۰۷۷/۶۵۷	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۹۰
	۱۹۷۵/۲۱۳	۴	۸۰۱۲۲۶۷/۲۰۰	۴۱	۱,۵۶	۳۹۲/۹۲۰
	۱۸۱۹/۸۰۷	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۵۵
	۲۷۵۴/۷۵۶	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۴۰۰/۶۸۳	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۶۰
۰/۶	۲۲۴۸/۵۹۹	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۱۴۸/۹۰۹	۵	۷۹۷۰۴۹۰/۶۶۰	۳۱	۲,۰۲	۳۸۵/۷۱۵
	۲۸۶۲/۰۰۷	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۶۱۹/۱۷۰	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۵۱۱/۹۱۹	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
۰/۸	۲۵۱۰/۰۱۳	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۳۰۱۰/۲۴۵	۲	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۹۳۴/۴۰۹	۳	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۸۲۷/۱۵۸	۴	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵	۸۱۲۴۳۵۲	۱	۰	۰/۳۷۵

با توجه به جدول ۴، به جز در چند مورد، در تکرار اول جواب بهینه در زمان کمتری نسبت به مدل خطی حاصل می‌شود که علاوه بر به دست آوردن جواب بهینه در زمان اجرایی کم‌تر، می‌تواند تائیدی بر نتایج حاصل از حل مدل خطی (جدول ۲) باشد. در سایر موارد نیز هر چند زمان اجرا بالا رفته است؛ ولی جواب‌های حاصل دارای  $gap$  محاسباتی بسیار پایین و قابل قبولی می‌باشد.

در جدول ۵ نیز نتایج حاصل از حل مساله پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان به کمک آزادسازی لاگرانژ ارایه شده است. در این جدول نیز  $LB^*$ ،  $Itr$ ،  $gap$  و  $CPU$  به ترتیب بهترین کران پایین به دست آمده، تعداد تکرارها برای رسیدن به بهترین کران پایین، فاصله بین کران به دست آمده و جواب بهینه مساله و زمان اجرا به ثانیه است. برای این مساله شرط توقف ( $\theta < 10^{-3}$ ) قرار داده شده است.

**جدول ۵.** نتایج حاصل از حل مساله P2 به کمک آزادسازی لاگرانژ به‌ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$

$\alpha$	$\beta$	$LB^*$	$Itr$	$gap$	$CPU$
۰/۲	۲۰۴۹/۴۹۰	۲/۶۶۳۷۱e+۱۰	۳۶	۰	۱۱۷/۷۸۱
	۱۷۷۵/۱۶۰	۳/۵۹۵۵۵e+۱۰	۴۶	۰	۱۶۳/۵۶۸
	۱۵۷۵/۰۰۱	۴/۱۷۸۰۸e+۱۰	۲۴	۰	۸۲/۲۹۷

	۱۳۷۳/۹۸۶	۶/۱۴۹۹۸e+۱۰	۲۲	۰	۸۲/۵۶۲
	۲۴۵۵/۲۳۷	۲/۷۲۷۹۶e+۱۰	۳۷	۰	۳۲۲/۰۳۱
۰/۴	۲۰۷۷/۶۵۷	۳/۸۲۳۹۶e+۱۰	۳۵	۰	۲۰۹/۹۲۶
	۱۹۷۵/۲۱۳	۴/۳۸۸۷۶e+۱۰	۳۷	۰	۲۱۵/۹۰۶
	۱۸۱۹/۸۰۷	۵/۰۴۱۵۵e+۱۰	۸	۰	۳۵/۳۱۰
	۲۷۵۴/۷۵۶	۲/۷۹۲۲۰e+۱۰	۳۷	۰	۴۱۸/۵۶۴
۰/۶	۲۴۰۰/۶۸۳	۴/۳۶۸۶۷e+۱۰	۴۰	۰	۲۳۷/۰۱۸
	۲۲۴۸/۵۹۹	۵/۲۹۹۳۳e+۱۰	۱۲	۰	۵۸/۳۱۲
	۲۱۴۸/۹۰۹	۹/۰۶۵۰۱e+۱۰	۵۰	۰	۲۱۳/۱۱۳
	۲۸۶۲/۰۰۷	۳/۶۶۵۶۲e+۱۰	۴۰	۰	۲۲۰/۷۱۸
۰/۸	۲۶۱۹/۱۷۰	۴/۷۵۱۷۴e+۱۰	۱۶	۰	۷۸/۹۰۶
	۲۵۱۱/۹۱۹	۷/۱۰۱۳۸e+۱۰	۱۲	۰	۵۸/۳۹۱
	۲۵۱۰/۰۱۳	۷/۷۵۱۷۸e+۱۰	۱۰	۰	۴۶/۶۲۵
	۳۰۱۰/۲۴۵	۲/۵۸۹۷۶e+۱۰	۶	۰	۳۲/۰۶۳
۱	۲۹۳۴/۴۰۹	۴/۷۸۵۰۴e+۱۰	۱۸	۰	۹۳/۱۰۸
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵/۳۰۹۸۳e+۱۰	۸	۰	۳۸/۹۸۵
	۲۸۲۷/۱۵۸	۵/۳۰۹۸۳e+۱۰	۸	۰	۳۸/۹۸۵

## ۶ نتیجه گیری

در این مقاله، دو مساله‌ی ماکزیمم پوشش  $P$ -هاب و پوشش هاب با در نظر گرفتن هزینه انتقال جریان مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا هر دو مساله مدل‌بندی شدند. نظر به غیر خطی بودن مدل‌ها، به کمک تکنیک‌هایی به خطی‌سازی هر یک پرداختیم و در نهایت چگونگی یافتن کران مناسب به کمک آزادسازی لاگرانژ را برای هر مساله توضیح دادیم. نتایج حاصل از حل مدل‌های خطی و غیرخطی در نرم‌افزار *GAMS* بر روی مجموعه داده‌های *CAB* بیانگر آن است که مدل‌های خطی هم از لحاظ مقدار بهینه تابع هدف و هم زمان اجرا بسیار مطلوب‌تر از مدل‌های غیرخطی است. همچنین با توجه به نتایج، کران‌های به دست آمده از روش آزادسازی لاگرانژ کران‌های مناسبی است. ارایه روش‌های مناسب‌تری برای به دست آوردن جواب‌هایی با کیفیت بالا در زمان کوتاه، نظیر روش‌های دقیق، ابتکاری و فراابتکاری می‌تواند به عنوان موضوعی برای تحقیقات آتی مد نظر قرار گیرد. همچنین حل دوگان لاگرانژ به کمک روش‌های دیگر و مقایسه نتایج به دست آمده از آن روش‌ها با روش زیرگرادیان ارایه شده در این پژوهش و ارایه تکنیک‌های کاراتر برای خطی‌سازی مدل‌های ارایه شده از جمله پیشنهادها برای محققان در آینده است.

## منابع:

- [1] Alumur, S., Kara, B.Y. (2008). Network hub location problems: the state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190, 1-21.
- [2] Okelly, M.E. (1986). The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20, 92-106.
- [3] Okelly, M.E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32, 393-404.
- [4] Campbell, J.F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72, 387-405.

- [5] Kara, B.Y., Tansel B.C. (2003). The single assignment hub covering problem: models and linearizations. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), 59-64.
- [6] Ernst, A., Jiang, H., Krishnamoorthy, M. (2005). Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problem. Unpublished Report, Csiro Mathematical and Information Science, Australia,
- [7] Weng, K., Yang, C., Ma, Y. (2006). Two artificial intelligence heuristics in solving multiple allocation hub maximal covering problem. *Lecture Notes in Computer Science*, DOI: 10.1007/11816157\_90, 737-744.
- [8] Tan, P.Z., Kara, B.Y. (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks*, DOI 10.1002/net.20139.
- [9] Wagner, B. (2008). Model formulations for hub covering problems. *The Journal of the Operational Research Society*, 59(7), 932-938.
- [10] Alumur, S., Kara, B.Y. (2008). A hub covering network design problem for cargo applications in Turkey. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 1349-1359.
- [11] Calik, H., Alumur, S., Kara, B., Karasan, O. (2009). A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. *Computers and Operations Research*, 36, 3088-3096.
- [12] Qu, B., Weng, K. (2009). Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1890-1894.
- [13] Ghodsi, R., Mohammadi, M., Rostami, H. (2010). Hub covering location problem under capacity constraints. *Fourth Asia International Conference on Mathematical/Analytical Modelling and Computer Simulation*, DOI 10.1109/AMS.2010.132.
- [14] Hwang, Y.H., Lee, Y.H. (2012). Uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. *Computers and Industrial Engineering*, 63, 382-389.
- [15] Jabalameh, M.S., Barzinpour, F., Sabouri, A., Ghaffari-Nasab, N. (2012). A simulated annealing-based heuristic for the single allocation maximal covering hub location problem. *Int. J. Metaheuristics*, 2(1), 15-37.
- [16] Karimi, H., Bashiri, M. (2011). Hub covering location problems with different coverage types. *Scientia Iranica*, 18(6), 1571-1578.
- [17] Fazel Zarandi, M.H., Davari, S., Haddad Sisakht, S.A. (2012). The Q-coverage multiple allocation hub covering problem with mandatory dispersion. *Scientia Iranica*, 19(3), 902-911.
- [18] Mohammadi, M., Tavakoli-Moghaddam, R., Tolouei, H., Yousefi, M. (2010). Solving a hub covering location problem under capacity constraints by a hybrid algorithm. *Journal of Applied Operational Research*, 2(2), 109-116.
- [19] Eghbali, M., Abedzadeh, M., Setak, M. (2013). Multi-objective reliable hub covering location considering customer convenience using NSGA-II. *Int J Syst Assur Eng Manag*, 5(3), 450-460.
- [20] Ghodrattnam, A., Tavakkoli-Moghaddam, R., Azaron, A. (2013). A fuzzy possibilistic bi-objective hub covering problem considering production facilities, time horizons and transporter vehicles. *Int J Adv Manuf Technol*, 66, 187-206.
- [21] Sadeghi, M., Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R., Rahimi, Y. (2015). A new stochastic approach for a reliable p-hub covering location problem, *Computers & Industrial Engineering*, DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2015.10.003>.
- [22] Gholizadeh, R., Fazlollahtabar, H. (2015). Capacitated Location-Allocation Hub Covering Problem in Manufacturing-Customer Interaction, *Applied and Computational Mathematics*, 4(5).
- [23] Peker, M., Kara, B.Y. (2015). The P-Hub maximal covering problem and extensions for Gradual Decay Functions, *Omega*, DOI : 10.1016/j.omega.2015.01.009.
- [24] Silva, M.R., Cunha, C.B. (2017). A tabu search heuristic for the uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem, *European Journal of Operational Research*, DOI: 10.1016/j.ejor.2017.03.066.
- [25] Hasanzadeh, H., Bashiri, M., Amiri, A. (2016). A new approach to optimize a hub covering location problem with a queue estimation component using genetic programming. *Soft Comput*, DOI: 10.1007/s00500-016-2398-1.
- [26] Labbe, M., Yaman, H. (2008). Solving the hub location problem in a star-star network. *Networks*, DOI 10.1002/net.20193.
- [27] Torkestani, S.S., Seyed hosseini, S.M., Makui, A., Shahanaghi, K. (2016). Hierarchical Facility Location and Hub Network Problems: A literature review, *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 9, 1-22.
- [28] Yaman, H. (2009). The hierarchical hub median problem with single assignment, *Transportation Research Part B*, 43, 643-658,

- [29] Yaman, H., Elloumi, S. (2012). Star p-hub center problem and star p-hub median problem with bounded path lengths. *Computers and Operations Research*, 39, 2725-2732.
- [30] Alumur, S.A., Yaman, H., Kara, B.Y. (2012). Hierarchical multimodal hub location problem with time-definite deliveries. *Transportation Research Part E*, 48, 1107-1120.
- [31] Korani, E., Sahraeian, R. (2013). The hierarchical hub covering problem with an innovative allocation procedure covering radiuses. *Scientia Iranica*, 20(6), 2138-2160.
- [32] Arshadi Khamseh, A., Doost Mohammadi, M. (2014). Complete/incomplete Hierarchical hub cover single assignment network problem. *Journal of Optimization in Industrial Engineering*, 14, 1-12.
- [33] Karimi, M., Eydi, A.R., Korani, E. (2014). Modeling of the capacitated single allocation hub location problem with a hierarchical approach, *International Journal of Engineering*, 27(4), 573-586.
- [34] Rajabi, Z., Avakh Darestani, S. (2015). Optimizing a hierarchical hub covering problem with mandatory distribution of central hubs, *International Journal of Operational Research*, 5(1), 17-28.
- [35] Ebrahimi Zade, A., Sadegheih, A., Lotfi, M.M. (2014). A modified NSGA-II solution for a new multi-objective hub maximal covering problem under uncertain shipments. *J Ind Eng Int*, 10, 185-197.
- [36] Fumero, F. (2001). A modified subgradient algorithm for lagrangean relaxation. *Computers and Operations Research*, 28, 33-52.
- [37] Yaman, H. (2008). Star p-hub median problem with modular arc capacities. *Computers and Operations Research*, 35, 3009-3019.
- [38] Contreras, I., Dlaz, J.A., Fernandez, E. (2009). Lagrangean relaxation for the capacitated hub location problem with single assignment. *OR Spectrum*, 31, 483-505.
- [39] Karimi, H., Setak, M. (2013). Proprietor and customer costs in the incomplete hub location-routing network topology, *Applied Mathematical Modeling*, 38, 1011-1023.
- [40] Gelaresh, S., Nickel, S. (2011). Hub location problems in transportation networks. *Transportation Research Part E*, 47, 1092-1111.