

تعیین نرخ بهینه بیمه‌نامه‌ها در گروه‌های همگن ریسک، مطالعه موردی

مهناز منطقی پور^۱، علیرضا غفاری حدیقه^{۲*}، امیر صفری^۳

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، گروه ریاضی کاربردی، تبریز، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، گروه ریاضی کاربردی، تبریز، ایران

۳- دکتری، سرپرست پژوهشکده بیمه وابسته به بیمه مرکزی ج.ا.ایران

رسید مقاله: ۳۱ فروردین ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۲۹ مرداد ۱۳۹۶

چکیده

تعیین نرخ منصفانه‌ی حق بیمه، یکی از مهم‌ترین موضوعات مورد مطالعه در متون بیمه‌ای است. در این مقاله، با مطالعه بر گروه‌های همگن ریسک در رشته بیمه‌باربری، نرخ‌های بهینه‌ی حق بیمه‌ی مربوط به هر گروه همگن را تعیین می‌کنیم. منظور از نرخ‌های بهینه نرخ‌هایی است که سود شرکت را بیشینه کند. به ازای قیمت‌های بالاتر، درآمد حاصل از یک بیمه‌نامه افزایش می‌یابد؛ اما در عین حال ممکن است موجب کاهش تعداد مشتریان و تعداد بیمه‌نامه‌های صادره شود؛ بنابراین تعیین کردن نرخ بهینه حایز اهمیت است. در این مطالعه، با برآورد توابع تقاضا، مدلی برای بیشینه کردن سود شرکت ارائه می‌دهیم. با توجه به نمایی بودن توابع تقاضا، مساله‌ی بهینه سازی نرخ حق بیمه‌ها، غیرخطی بوده و قید آن نمایی است. قید لحاظ شده در مساله موجب می‌شود که برای ریسک‌های با مقادیر ارزش در معرض خطر بیش‌تر، نرخ‌های بیش‌تری تعیین شود. با استفاده از روش نقطه درونی این مدل غیرخطی را حل کرده‌ایم. نتایج بررسی پایگاه داده‌های این مقاله نشان می‌دهد که کاهش قیمت‌ها برای ریسک‌های با ارزش در معرض خطر کم‌تر، کم‌تر است. به عبارتی دیگر با کاهش یکسان نرخ حق بیمه‌ی تمام ریسک‌ها، ریسک‌هایی که پتانسیل بیش‌تری برای ایجاد خسارت دارند، بیش‌تر جذب بالای میانگین نرخ ارزش در معرض خطر، تا سطحی معین، قیمت‌های بهینه را کاهش و می‌شوند. همچنین افزایش کران سود را افزایش می‌دهد.

کلمات کلیدی: ارزش در معرض خطر، تابع تقاضا، رگرسیون غیرخطی، ریسک، حق بیمه بهینه، روش خوشه بندی k - میانگین‌ها.

۱ مقدمه

در این مقاله از کلمات بیمه، بیمه‌گر، بیمه‌گذار و حق بیمه به دفعات استفاده می‌شود. از این رو در ابتدا مفاهیم این واژگان را ارائه می‌کنیم. بیمه عقدی است که طی آن خطر قریب‌الوقوعی را که ممکن است برای دارایی، فعالیت یا جان فردی پیش آید، به شرکت بیمه منتقل می‌کند تا در طول زمان بیمه‌نامه، زیان مادی ناشی از خطر

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hadigheha@azaruniv.edu

را جبران کند. در این فرآیند، فردی که خطر را منتقل می‌کند بیمه‌گذار و قبول‌کننده خطر را بیمه‌گر گویند. وجهی را که بیمه‌گذار به بیمه‌گر می‌پردازد حق بیمه و موضوعی که بابت آن عقد بیمه منعقد می‌گردد موضوع یا مورد بیمه گویند. ماده ۱ قانون بیمه مصوب سال ۱۳۱۶ بیمه را چنین تعریف می‌کند [۱]: «بیمه عقدی است که به موجب آن یک طرف تعهد می‌کند در ازای پرداخت وجه یا وجهی از طرف دیگر، در صورت وقوع یا بروز حادثه، خسارت وارده بر او را جبران کند و یا وجه معینی بپردازد. متعهد را بیمه‌گر، طرف تعهد را بیمه‌گذار، وجهی را که بیمه‌گذار به بیمه‌گر می‌پردازد حق بیمه و آنچه را بیمه می‌شود موضوع بیمه نامند.»

برای تعریف ریسک، بحث‌های بسیاری بین اقتصاددانان، آماردانان، نظریه‌پردازان حوزه‌ی تصمیم‌گیری و نظریه‌پردازان بیمه وجود دارد و تاکنون نتوانسته‌اند به تعریف مشترکی دست یابند. در تعریفی که برای بیمه ارایه کردیم، خطر قریب الوقوع، همان ریسک است که می‌توان آن را این‌گونه تعریف کرد [۲]. «ریسک، شرایطی است که در آن احتمال انحراف معکوس از نتیجه‌ی مطلوب مورد انتظار وجود دارد.»

به طور کلی، نرخ‌گذاری بیمه‌نامه‌ها بر اساس متوسط نرخ خسارت مورد انتظار انجام می‌شود. برای تعیین حق‌بیمه با استفاده از روش‌های متفاوت، امید ریاضی خسارت‌ها محاسبه می‌شود. معمولاً برای محاسبه قیمت نهایی بیمه‌نامه‌ها، از مجموع امید ریاضی خسارت‌ها و ضریبی از آن و یا ضریبی از شاخص‌های پراکندگی خسارت‌ها استفاده می‌شود. در این مدل‌ها، تقاضای بیمه‌نامه‌ها در نظر گرفته نمی‌شود و نرخ‌ها با افزودن ضریب سربار ریسک محاسبه می‌شوند [۳]. از طرفی، حفظ سودآوری و داشتن سهم مشخصی از بازار یکی از مهم‌ترین اهدافی هستند که شرکت‌های بیمه علاقه‌مند هستند در راهبرد قیمت‌گذاری خود در نظر بگیرند [۴ و ۵].

سود آوری همواره یکی از اهداف بنگاه‌های اقتصادی بوده است از این رو بهینه‌سازی قیمت با توجه به تابع تقاضا برای سودآوری در تمام بنگاه‌های اقتصادی، حایز اهمیت است. با هدف کسب سود بالاتر و جذب تعداد بیشتری از مشتریان، ارایه محصولات با نرخ‌های پایین‌تر روشی متداول است. سوالی که برای به کارگیری این روش می‌باید به آن پاسخ داد آن است که کاهش نرخ‌ها تا چه سطحی می‌تواند منجر به سودآوری شود. برای پاسخ به این سوال، در نظر گرفتن توابع تقاضا امری ضروری است. چنانچه تقاضا برای محصولی معین بیش‌تر باشد، بسیاری از مدیران تمایل دارند با کاهش حاشیه سود حاصل از فروش یک محصول و منتفع شدن از حجم بالاتر فروش، نرخ‌ها را کاهش دهند.

تعیین نرخ‌های بهینه در صنعت بیمه از اهمیت بالایی برخوردار است. به گفته مؤسسه‌ی اکچوئری استرالیا^۲ در یک گزارش پژوهشی [۶]، در غیاب سیستمی که بین اشخاص با خصوصیات متفاوت ریسک، تمایز قایل شود، بیمه‌گران در حال دادن یارانه به برخی بیمه‌گذاران هستند در حالی که از برخی دیگر هزینه‌های بیش‌تری دریافت می‌کنند. در یک بازار آزاد، اصول اقتصاد بیان می‌کند افرادی که نسبت به هزینه‌ای که پرداخت می‌کنند ریسک پایینی دارند، به این نتیجه خواهند رسید که محصولات بیمه‌ای گران قیمت هستند و بنابراین کم‌تر از بیمه استفاده کرده و یا به طور کلی آن را رها می‌کنند. در حالی که اشخاص با ریسک بالا نسبت به هزینه پرداختی، قیمت‌ها را

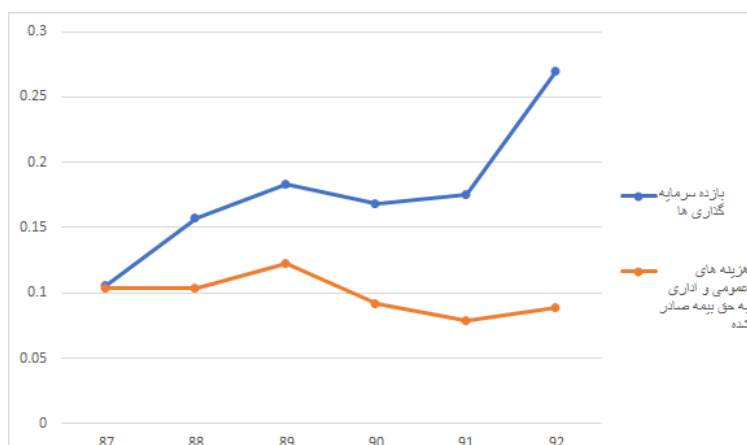
^۲ Institute of Australian Actuaries

جذاب می‌یابند و بیش‌تر از بیمه استفاده می‌کنند. در نتیجه، میانگین هزینه بیمه‌نامه‌ها بالا می‌رود و این خود به خود قیمت‌ها را افزایش می‌دهد و به دنبال آن افراد با ریسک پایین همچنان از فضای بیمه خارج می‌شوند و قیمت‌ها به افزایش خود ادامه می‌دهند. سرانجام، گروه بزرگی از بیمه‌گران و بیمه‌گذاران بازار را رها خواهند کرد و به مرور خرید محصولات بیمه‌ای توجیه منطقی نخواهد داشت.

نرخ بهینه در این پژوهش به نحوی گفته می‌شود که بتواند بیش‌ترین سود را برای شرکت ایجاد کند و در عین حال مطلوب است که قیمت‌ها به گونه‌ای تعیین شوند که در گروه‌های با خسارت بیش‌تر، نرخ حق بیمه‌ها بالاتر باشد [۷]. چنین نرخ‌هایی علاوه بر حفظ توان مالی شرکت‌های بیمه در پرداخت خسارت‌ها، مشتریان با نرخ خسارت کم‌تر را بیش‌تر جذب می‌کند. بیشینه کردن سود همواره مورد توجه سرمایه‌گذاران بوده است و مطالعات انجام شده نشان می‌دهد وقتی شرکت‌ها به یک دوره عدم سودآوری وارد می‌شوند، تعداد بیش‌تری از آن‌ها دچار معضل عدم توانگری شده و در صورت تداوم آن، با ورشکستگی مواجه می‌شوند [۸].

در این مقاله فرض کرده‌ایم که بیمه‌نامه‌ها بر اساس شباهتشان در نرخ خسارتی که به آن‌ها وارد می‌شود، به گروه‌های همگن ریسک با قابلیت بیمه شدن تقسیم‌بندی شده‌اند. منظور از همگن بودن یک گروه از ریسک‌ها آن است که اعضای آن گروه در نرخ خسارت‌ها رفتار مشابهی دارند و منظور از قابلیت بیمه شدن گروه همگن آن است که تعداد اعضای گروه به اندازه کافی زیاد است تا بتوان با مطالعه‌ی رفتار اعضای آن، برای آن گروه نرخ تعیین کرد. این مقاله بر گروه‌های همگن حاصل شده از داده‌های رشته بیمه‌باربری با استفاده از روش ارایه شده توسط منطقی‌پور و همکاران انجام شده است [۹]. با روش مذکور، ده گروه همگن ریسک تولید شده است. با مطالعه‌ی رفتار هر گروه، نرخ بهینه‌ی آن را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که بیش‌ترین سود را عاید شرکت کند و علاوه بر آن نرخ ریسک‌های با خسارت بیش‌تر، بیش‌تر باشد.

برای بیشینه نمودن سود شرکت نیاز است تا درآمدها و هزینه‌های شرکت محاسبه شوند. درآمدهای یک شرکت بیمه حاصل از حق بیمه‌های عاید شده و همچنین سرمایه‌گذاری‌های شرکت است و هزینه‌ها شامل مبالغ خسارت‌ها و هزینه‌های اداری و عمومی است. با کسر هزینه‌ها از درآمدها سود شرکت به دست می‌آید. برای محاسبه سود از میانگین شاخص نرخ بازده سرمایه‌گذاری‌ها و شاخص هزینه‌های اداری و عمومی به حق بیمه‌ی صادره استفاده کرده‌ایم. این دو شاخص توسط واحد نظارت بیمه مرکزی محاسبه شده‌اند و مقادیر آن‌ها در شکل ۱ مشاهده می‌شوند [۱۰]. میانگین شاخص بازده سرمایه‌گذاری‌ها برابر با ۱۷٪ و میانگین شاخص هزینه‌های اداری و عمومی به حق بیمه صادره طی این سال‌ها برابر با ۹٪ است. شرکت‌های بیمه با توجه به شرایط اقتصادی کشور و سیاست‌های خود می‌توانند مقادیر این شاخص‌ها را دقیق‌تر پیش‌بینی کنند در این مقاله از میانگین این شاخص‌ها استفاده شده است. لازم به ذکر است که شرکت‌های بیمه موظفند حد نصاب‌های ذکر شده در آیین‌نامه شماره ۶۰ مصوب شورای عالی بیمه [۱] را در سرمایه‌گذاری‌های خود رعایت کنند. بر اساس این آیین‌نامه سهم سرمایه‌گذاری‌ها در بخش‌های مختلف از جمله پروژه‌های ساختمانی، سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار، سهام شرکت‌های غیر بورسی و سایر موارد به تفکیک ذکر شده است.



شکل ۱. مقادیر شاخص هزینه‌های اداری و عمومی به حق بیمه صادره و شاخص بازده سرمایه‌گذاری‌های شرکت

در این مقاله تنها بر نرخ گذاری بحث می‌شود و سایر شرایط و سیاست‌های شرکت ثابت فرض می‌شود. به عنوان مثال، سیاست‌های شرکت در پرداخت خسارت و کیفیت ارائه خدمات را ثابت فرض کرده‌ایم. تغییر چنین متغیرهایی تابع تقاضا را نیز تغییر خواهند داد. در صورت ثابت بودن سایر متغیرها، با افزایش نرخ حق بیمه انتظار می‌رود که تعداد مشتریان شرکت کاهش یابد و با کاهش نرخ حق بیمه، مشتریان بیشتری به شرکت جذب شوند [۱۱]. در سال‌های اخیر در صنعت بیمه ایران، بر اساس آیین نامه شماره ۸۱ مصوب شورای عالی بیمه، به شرکت‌های بیمه اجازه داده شده است تا نرخ حق بیمه‌ها را خود تعیین کنند [۱] و این موضوع تبدیل به یکی از چالش‌های اساسی صنعت بیمه شده است. بسیاری از شرکت‌های بیمه با کاهش غیر اصولی نرخ‌ها به رقابت می‌پردازند در حالی که در بلند مدت، این موضوع منجر به کاهش سطح توانگری شرکت‌ها خواهد شد. در حالت کلی رقابتی‌تر شدن بازارها به نفع مصرف‌کنندگان است؛ اما در شرایطی که شرکت‌ها در پایین آوردن نرخ‌ها رقابت می‌کنند این خطر وجود دارد که در آینده نتوانند تعهدات خود را ایفا کنند و مهم‌ترین گروهی که در چنین وضعیتی متضرر می‌شوند، بیمه‌گذاران شرکت‌ها هستند.

در این تحقیق، برای تعیین نرخ‌های بهینه با استفاده از داده‌های واقعی یکی از بزرگ‌ترین شرکت‌های بیمه فعال در صنعت بیمه ایران، تابع تقاضا را در ده گروه همگن ریسک برآورد می‌کنیم؛ البته تعیین تابع تقاضا، در علم اقتصاد اغلب با در نظر گرفتن عامل‌های تاثیر گذار متفاوتی انجام می‌شود. از آنجا که برخی از داده‌ها در دسترس نیستند و شرکت‌ها به روشی سریع برای تصمیم‌گیری نیاز دارند، در این مطالعه از داده‌های گذشته استفاده شده است. در مدل ارائه شده فرض بر آن است که بیمه‌نامه‌ها به صورت نقدی فروخته می‌شوند و در نظر گرفتن فروش اقساطی، مدل را بسیار پیچیده‌تر می‌کند. مدل بهینه سازی نرخ ارائه شده در این مطالعه، که مدلی غیر خطی با قید غیرخطی است با روش نقطه درونی توسط بسته کاربردی بهینه سازی نرم افزار متلب حل شده است.

این مقاله در ۵ بخش ارایه شده است. در بخش ۲ پایگاه داده‌ها و گروه‌های همگن ریسک توصیف شده‌اند. در بخش ۳ تابع تقاضا در هر گروه همگن برآورد شده است. در بخش ۴ مدل بهینه‌سازی نرخ‌ها معرفی شده و نرخ‌های بهینه محاسبه شده است. بخش ۵ به جمع بندی و نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

۲ توصیف گروه‌های همگن ریسک

در این مقاله داده‌های ۹ سال بیمه‌نامه‌های باربری وارداتی را گروه‌بندی کرده‌ایم. تعداد بیمه‌نامه‌های صادر شده در این پایگاه داده‌ها، طی این سال‌ها برابر با ۳۵۴۸۲۰ بیمه‌نامه است. در پایگاه داده‌های این مقاله، هر بیمه‌نامه دارای شش خصوصیت مبدأ، مقصد، نوع وسیله حمل، نوع کالا و شرایط خصوصی است که این خصوصیات اسمی هستند. با استفاده از روش ارایه شده توسط منطقی پور و همکاران [۹] این داده‌ها بر اساس شباهت‌شان در ایجاد خسارت، به ده گروه همگن از بیمه‌نامه‌ها گروه‌بندی شده‌اند. در این روش خسارت وارد شده به بیمه‌نامه‌ها به عنوان برچسب در نظر گرفته شده است. با توجه به آنکه ممکن است دو بیمه‌نامه با خصوصیات یکسان، دارای خسارت‌های متفاوت باشند؛ بنابراین این برچسب‌ها متغیرهایی تصادفی هستند. گروه‌بندی بیمه‌نامه‌ها به گروه‌های همگن ریسک و قابل بیمه شدن به صورت مساله بهینه‌سازی زیر فرمول‌بندی شده است:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k w_{ij} \text{dist}(l(a^i), \bar{l}_j)$$

s.t

$$\sum_{j=1}^k w_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m w_{ij} \geq \gamma_0, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k,$$

که در آن a^i بیمه‌نامه i ام، $l(a^i)$ برچسب بیمه‌نامه a^i ، $\text{dist}(l(a^i), \bar{l}_j)$ فاصله برچسب بیمه‌نامه a^i با برچسب مرکز گروه j ام، γ_0 حداقل تعداد اعضای گروه‌ها و k تعداد گروه‌ها می‌باشد. w_{ij} ها و k متغیرهای تصمیم هستند. در جواب بهینه اگر w_{ij} برابر با ۱ باشد بیمه‌نامه a^i متعلق به گروه j ام است. این مساله به دنبال گروه‌هایی است که کم‌ترین فاصله بین برچسب اعضای آن که همان نرخ خسارت‌ها است، وجود داشته باشد. در عین حال تعداد اعضای گروه‌ها نباید از مقداری معین کم‌تر باشد تا بتوان با بررسی رفتار اعضای گروه‌ها برای آن‌ها نرخ تعیین نمود. برای حل این مساله در [۹] روشی ابتکاری ارایه شده است. در این روش فاصله بین متغیرهای تصادفی با استفاده از اعداد فازی محاسبه شده است و برای حل آن الگوریتم اصلاح شده k -میانگین‌ها معرفی شده است. در محاسبات این مقاله γ_0 که را برابر با ۵۰۰۰ در نظر گرفته‌ایم. با به کارگیری این روش بر داده‌های این مقاله ده گروه همگن ریسک تولید شده است. جدول ۱ میانگین نرخ خسارت‌ها را در هریک از این ده گروه نمایش می‌دهد. منظور از نرخ خسارت، نسبت خسارت وارد شده به بیمه‌نامه بر مقدار سرمایه بیمه شده

است. این نسبت علاوه بر فراهم کردن امکان مقایسه خسارت بیمه‌نامه‌های با سرمایه‌های متفاوت، امکان مقایسه آن‌ها را طی سال‌های متفاوت فراهم می‌کند و اثرات تورم را نیز خنثی می‌کند.

جدول ۱. میانگین خسارت‌ها در ده گروه همگن ریسک و تعداد اعضای گروه‌های همگن

شماره گروه	میانگین نرخ خسارت‌ها	تعداد اعضای گروه
۱	۰/۰۰۰۰۶۴۲۰	۶۰۳۴
۲	۰/۰۰۰۴۱۱۳۴	۴۲۶۲۹
۳	۰/۰۰۰۰۳۳۹۲	۳۴۲۸۴
۴	۰/۰۰۰۰۸۹۴۱	۲۳۱۴۹
۵	۰/۰۰۰۰۵۳۴۰	۹۶۹۰
۶	۰/۰۰۰۰۶۵۳۰	۱۴۲۱۶۸
۷	۰/۰۰۰۲۶۷۹۵	۵۹۰۲
۸	۰/۰۰۰۰۰۳۴۵	۱۴۸۹۰
۹	۰/۰۰۰۲۰۲۱۳	۲۱۶۰۷
۱۰	۰/۰۰۰۳۰۱۳۱	۵۴۴۶۷

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود گروه ۸ کمترین نرخ خسارت و گروه ۲ بیشترین نرخ خسارت را دارد. هر بیمه‌نامه به یکی از گروه‌های ۱ تا ۱۰ تعلق دارد. همچنین، گروه ۶ بیشترین تعداد اعضا را دارد و گروه ۱ کم‌جمعیت‌ترین گروه است. ادامه این تحقیق بر مبنای این ده گروه همگن انجام می‌شود.

در هر گروه همگن مقدار ارزش در معرض خطر^۳ که یک معیار اندازه‌گیری ریسک است را محاسبه می‌کنیم. اگر X متغیر تصادفی زیان، با تابع احتمال P و α مقداری حقیقی بین ۰ و ۱ باشد این معیار به صورت

$$VaR_{\alpha}(X) = \min\{c : P(X \leq c) \geq \alpha\},$$

تعریف می‌شود [۱۲]. در این مقاله α را برابر با ۰.۹۹٪ در نظر گرفته‌ایم. با استفاده از سوابق خسارت‌ها در داده‌ها تابع چگالی احتمال خسارت‌ها را در هر گروه برازش کرده‌ایم. برای آزمون برازش، از آزمون خی-دو استفاده کرده‌ایم. نوع تابع توزیعی که برای خسارت‌های هر گروه برازش نموده‌ایم و مقدار معیار ارزش در معرض ریسک در جدول ۲ مشاهده می‌شود.

۳ برآورد تابع تقاضا

شرکت بر اساس سیاست‌های خود، نرخ‌هایی را طی ۹ سال تعیین کرده است. در اینجا توابع تقاضا را با استفاده از نرخ‌های تعیین شده توسط شرکت استخراج می‌کنیم و برای خنثی کردن اثر تورم در محاسبات، از نسبت مبلغ حق بیمه دریافتی بر سرمایه بیمه شده استفاده می‌کنیم. این توابع که آن‌ها را توابع تقاضا می‌نامیم، ارتباط بین

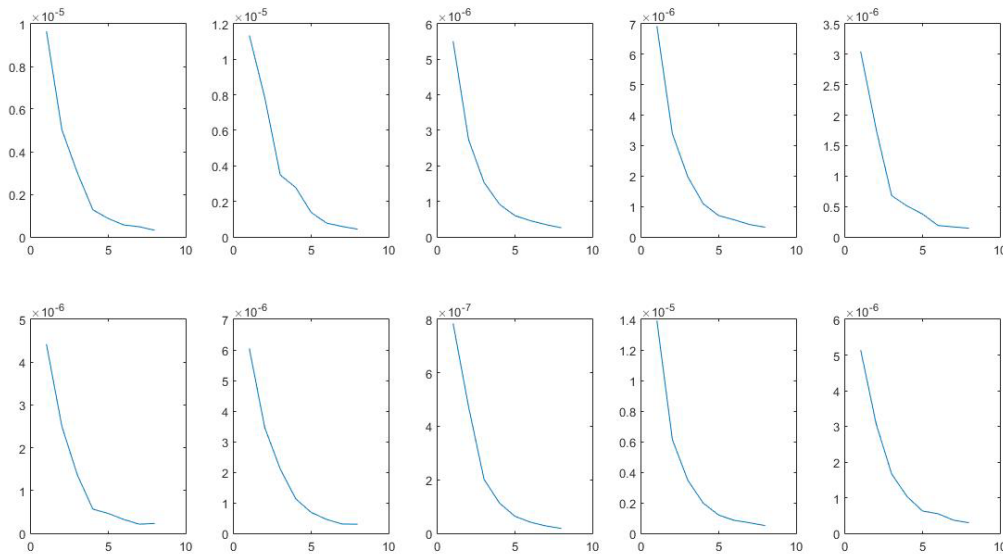
^۳ (VaR) Value at Risk

تعداد مشتریان و نرخ حق بیمه را مشخص می‌کنند. ایده‌ای که برای تعیین تابع تقاضا در هر گروه استفاده می‌کنیم به این صورت است: در هر گروه همگن، نرخ‌های شرکت را با کمک روش k -میانگین‌ها [۱۳] خوشه‌بندی می‌کنیم. با توجه به آن که در تمام گروه‌ها، با افزایش تعداد خوشه‌ها به بیش از ۵ خوشه، مقدار تابع هدف الگوریتم k -میانگین‌ها تغییر محسوسی ندارد، تعداد خوشه‌ها برابر با ۵ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲. نوع تابع توزیع خسارت‌ها و اندازه معیار ارزش در معرض ریسک

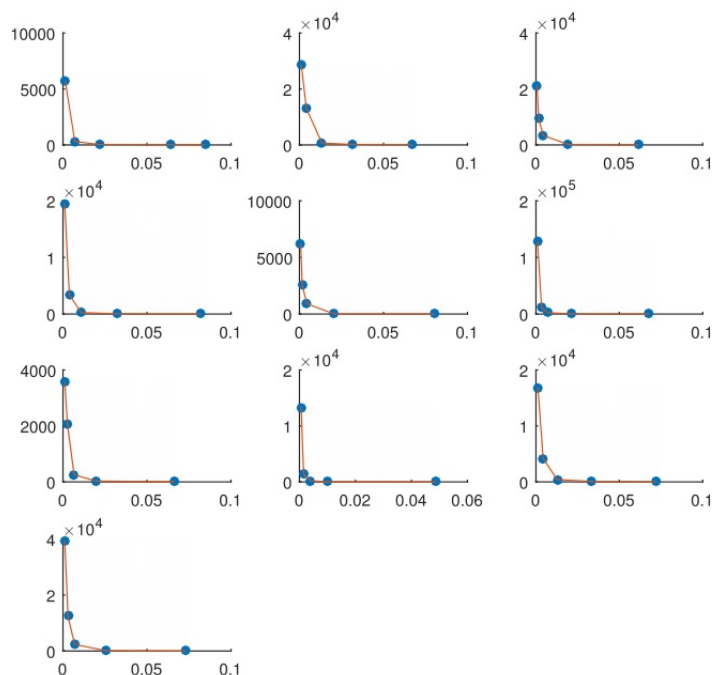
شماره گروه	تابع توزیع خسارت‌ها	ارزش در معرض ریسک
۱	توزیع گاما	۰/۱۲۸۲
۲	لگاریتم لجیستیک	۰/۶۵۳
۳	توزیع گاما	۰/۰۹۳۴
۴	توزیع گاما	۰/۱۲۴۸
۵	توزیع گاما	۰/۰۵۰۹
۶	توزیع گاما	۰/۰۶۲۷
۷	توزیع گاما	۰/۰۷۷۳
۸	توزیع گاما	۰/۰۲۴۷
۹	توزیع گاما	۰/۳۰۲۵
۱۰	توزیع نمایی	۰/۱۲۸۴

در نمودار شکل ۲، برای تمام گروه‌ها ارتباط بین تعداد خوشه‌های قیمتی، محور افقی و مقدار تابع هدف روش k -میانگین‌ها، محور عمودی، مشاهده می‌شود.



شکل ۲. مقدار تابع هدف الگوریتم k -میانگین‌ها و تعداد خوشه‌های قیمتی، از چپ به راست و از بالا به پایین متعلق به گروه‌های ۱ تا ۱۰.

در هر گروه همگن ریسک، مرکز هر خوشه قیمتی را به عنوان نماینده اعضای آن خوشه در نظر می‌گیریم. مرکز هر خوشه در واقع میانگین اعضای هر خوشه است. تعداد اعضای هر خوشه را به عنوان تقاضای مربوط به نرخ مرکز آن خوشه در گروه مربوطه در نظر می‌گیریم؛ بنابراین، ۵ نقطه از تابع تقاضا را در هر گروه همگن از ریسک‌ها داریم. در شکل ۳ نقاط مذکور را که با خط مستقیم به هم وصل شده‌اند نمایش داده‌ایم.



شکل ۳. تعداد بیمه‌نامه‌های هر گروه در مراکز خوشه‌های قیمتی، از چپ به راست و از بالا به پایین برای گروه‌های ۱ تا ۱۰.

با توجه به نقاط به دست آمده از توابع تقاضا در هر گروه، تابع تقاضا را برآورد می‌کنیم. به این منظور از مدل معرفی شده برای تابع تقاضا در مقاله [۱۴] استفاده می‌کنیم. تابع تقاضا برای یک رشته‌ی بیمه‌ای به صورت

$$d_i(x) = P_i e^{\left(1 - \frac{x}{\mu_i}\right)^{\lambda_i} P_i} \quad (1)$$

تعریف شده است که در آن، P_i مقدار تقاضا به ازای نرخ حق بیمه $x = \mu_i$ است، μ_i خسارت مورد انتظار و λ_i پارامتر کشش تقاضا برای گروه i ام است. پارامترهای P_i و λ_i ، با استفاده از تکنیک رگرسیون غیرخطی در نرم افزار R برآورد شده است [۸]؛ زیرا تابع (۱) نسبت به پارامترهای P_i و λ_i ضابطه غیرخطی دارد. نقاط به کار گرفته شده برای این برآورد، نقاط حاصل شده از خوشه‌بندی قیمتی هر گروه هستند. با افزایش تعداد نقاط تابع تقاضا، پارامترها با دقت بیشتری محاسبه می‌شوند؛ اما از آنجا که نقاط تابع تقاضا در این مقاله با استفاده از خوشه‌بندی قیمت‌های ارایه شده توسط شرکت، حاصل شده‌اند امکان افزایش بیشتر خوشه‌ها میسر نیست؛ زیرا با افزایش تعداد خوشه‌ها تعداد اعضای برخی خوشه‌ها بسیار کم می‌شود در حالی که مقدار تابع هدف روش k -

میانگین‌ها کاهش قابل توجهی ندارد. علاوه بر آن نقاطی که با تعداد خوشه‌های بیش‌تر تولید می‌شوند با تابع تقاضا رابطه (۱) به خوبی برازش نمی‌شوند.

برای برآورد پارامترهای رابطه (۱) از تکنیک رگرسیون غیر خطی در نرم افزار R استفاده کرده‌ایم [۱۵]. تکنیک رگرسیون غیرخطی برای برآورد پارامترها، به نقاط شروع اولیه نیاز دارد. نقاط شروع اولیه نباید از جواب بهینه، خیلی دور باشند؛ زیرا در آن صورت ممکن است روش گاوس-نیوتن که روش مورد استفاده نرم افزار R در رگرسیون غیر خطی است، همگرا نباشد؛ بنابراین برای تعیین نقاط شروع مناسب از رگرسیون خطی استفاده کردیم. برای این کار، ابتدا تابع تقاضا را به صورت $d_i = P_i^0 e^{-x}$ در نظر گرفتیم و مقادیر P_i^0 را برآورد کردیم. سپس برای گروه همگن i ، با استفاده از رگرسیون غیرخطی با نقطه شروع P_i^0 و $\lambda_i = 0.5$ پارامترهای تابع d_i ، رابطه (۱)، را برآورد کرده‌ایم. مقادیر برآورد شده در جدول ۳ آورده شده است. دقت همگرایی رگرسیون غیر خطی و تعداد تکرارهای الگوریتم گاوس-نیوتن برای رسیدن به جواب بهینه در جدول ۴ مشاهده می‌شوند. تعداد تکرارهای کم و دقت همگرایی بالا نشان از انتخاب مناسب نقاط شروع اولیه دارد. مقادیر به دست آمده p -value نشان می‌دهند که ضرایب رگرسیون غیرخطی معنادار هستند و فرض صفر آزمون T، که صفر بودن پارامتر است، در تمام گروه‌ها رد می‌شود.

پارامتر λ_i معرف تغییرات تقاضا در گروه i ام نسبت به تغییرات قیمت x می‌باشد. نسبت تغییرات نسبی تقاضا به تغییرات نسبی قیمتی تقاضا می‌نامیم [۱۴]. تابع کشش قیمتی تابع تقاضای d_i رابطه (۱)، به صورت

$$\text{کشش قیمتی} = \left| \frac{\frac{\partial d_i(x)}{d_i}}{\frac{\partial x}{x}} \right| = \left| \frac{\partial \ln[d_i(x)]}{\partial \ln x} \right| = \lambda_i \left(\frac{x}{\mu_i} \right)^{\lambda_i}, \quad (2)$$

محاسبه می‌شود. با افزایش قیمت، تقاضا کاهش می‌یابد؛ بنابراین مقدار کشش قیمتی تابع تقاضا منفی است. در متون علمی اغلب بر اندازه کشش بحث می‌شود، به همین علت در رابطه (۲)، برای صرف نظر کردن از علامت منفی از قدر مطلق استفاده شده است.

در شکل ۴، توابع کشش قیمتی که از جایگزینی مقادیر پارامترهای برآورد شده در جدول ۳ در رابطه (۲) به دست آمده‌اند، در بازه‌ی به دست آمده از قیمت‌ها، رسم شده‌اند. در این شکل، ده نمودار دیده می‌شود که به ترتیب از چپ به راست و از بالا به پایین به گروه‌های ۱، ۲، ... ۱۰ مربوط هستند. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود بزرگ‌ترین مقادیر کشش قیمتی مربوط به گروه ۹ است، در حالی که این گروه از بین ده گروه همگن، چهارمین گروه از نظر بزرگی نرخ خسارت و دومین گروه از نظر بزرگی ارزش در معرض خطر است. در عین حال کم‌ترین مقادیر کشش قیمتی، مربوط به ریسک‌های گروه ۳ است که این گروه شامل ریسک‌های با ارزش در معرض خطر نسبتاً کمی می‌باشد. تنها با این نتایج، نمی‌توان در مورد رابطه بین اندازه کشش قیمتی و نوع ریسک‌ها نتیجه‌گیری کرد؛ اما نتایج محاسبات داده‌های این تحقیق نشان می‌دهد که ریسک‌های با پتانسیل کم‌تر

در ایجاد خسارت، اندازه کسش قیمتی کم‌تری دارند. نکته دیگری که به وضوح در این شکل مشاهده می‌شود آن است که با افزایش قیمت، اندازه کسش قیمتی نیز افزایش می‌یابد؛ اما این توابع مقعر هستند و بنابراین میزان رشد کسش در حال کاهش است.

جدول ۳. مقادیر برآورد شده پارامترهای توابع تقاضا در ده گروه

شماره گروه	پارامتر	مقادیر برآورد شده	انحراف معیار	t-value	p-value
۱	P_1	۵۶۱۵۰	۱۶۲۶	۵۳/۳۴	۳۴/۵e-۰۵
	λ_1	۰/۳۸۸۷	۰/۰۰۲۸	۱۳۶/۸	۸/۶۱e-۰۷
۲	P_2	۴۵۷۹۰	۳۷۶۶	۱۲/۱۶	۰/۰۰۱۲۰
	λ_2	۰/۳۸۱۲	۰/۰۰۳۰۲	۱۲/۶۲	۰/۰۰۱۰۷
۳	P_3	۹۶۹۷	۳۰۷۹	۳۱/۵۰	۷/۰۳e-۰۵
	λ_3	۰/۳۰۵۶	۰/۰۰۳۴	۸۸/۱۸	۳/۲۱e-۰۶
۴	P_4	۹۶۹۱۰	۱۰۳۹	۹۳	۲/۷۴e-۰۶
	λ_4	۰/۳۹۳	۰/۰۰۱۵۶	۲۵۱/۱	۱/۳۹e-۰۷
۵	P_5	۲۷۱۰۰	۲۳۰۰	۱۱/۷۸	۰/۰۰۱۳۱
	λ_5	۰/۳۵	۰/۰۰۱۰۹	۳۱/۸۴	۶/۸۱e-۰۵
۶	P_6	۱۱۲۴۰۰	۳۱۴۹	۳۵/۷	۴/۸۳e-۰۵
	λ_6	۰/۴۳	۰/۰۰۳۲	۱۳۴/۴	۹/۰۸e-۰۷
۷	P_7	۷۴۰۶	۱۰۱۵	۷/۲۹۵	۰/۰۰۵۳۲
	λ_7	۰/۳۹	۰/۰۰۳۸	۱۰/۲۶۲	۰/۰۰۱۹۷
۸	P_8	۱۷۶۴۰۰	۱۹۰۳۰	۹/۲۶۹	۰/۰۰۲۶۶
	λ_8	۰/۳۴۶۲	۰/۰۰۳۵	۹۷/۶۹۲	۲/۳۶e-۰۶
۹	P_9	۴۷۷۱	۸۴۶	۵۶/۴۰	۱/۲۳e-۰۵
	λ_9	۰/۴۰۵۴	۰/۰۰۰۴	۹۹/۷۵	۲/۲۲e-۰۶
۱۰	P_{10}	۸۵۹۹	۱۶۱۰۰۰	۵۳/۴۱	1/45 e-۰۵
	λ_{10}	۰/۴۷۱۸	۰/۰۰۶۱۷	۷۶/۳۶	۴/۹۵e-۰۶

۴ تعیین نرخ بهینه در هر خوشه

در این بخش نرخ‌های بهینه را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که سود حاصل از صدور بیمه‌نامه توسط شرکت بیشینه شود و همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، سایر سیاست‌های شرکت را بدون تغییر در نظر می‌گیریم. سود شرکت بیمه را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم [۱۶]:

درآمدهای حاصل از سرمایه‌گذاری‌ها + هزینه‌های عمومی و اداری - خسارت واقع شده شده - حق بیمه صادر شده = سود

برای ساختن تابع هدف که برابر با سود حاصل شده از صدور بیمه‌نامه می‌باشد، فرض می‌کنیم x_i متوسط نرخ گروه i ام، κ متوسط شاخص هزینه‌های عمومی و اداری به حق بیمه صادره، ρ متوسط نرخ بازده سرمایه‌گذاری‌ها، C متوسط نرخ خسارت کل، c_i متوسط نرخ خسارت گروه i ام، m تعداد گروه‌ها، l_i و u_i کم‌ترین و بیش‌ترین قیمت‌های هر گروه است که با توجه نرخ‌های تعیین شده توسط شرکت مشخص شده‌اند. این نرخ‌ها به نوعی عرف نرخ‌های بازار هستند. در آن صورت داریم:

$$\text{حق بیمه صادر شده} = \sum_{i=1}^m d_i(x_i)x_i,$$

$$\text{خسارت واقع شده} = \sum_{i=1}^m d_i(x_i)c_i,$$

$$\text{هزینه‌های اداری و عمومی} = \sum_{i=1}^m \kappa d_i(x_i)x_i.$$

جدول ۴. دقت و تعداد تکرارهای رگرسیون غیر خطی

شماره گروه	انحراف معیار مانده‌ها	تعداد تکرارها	دقت همگرایی
۱	۱۶/۶۹	۱۰	۷/۲۲۵۵-۰۶
۲	۱۶/۷۴	۱۴	۲/۸۵۶۵-۰۶
۳	۲۱۶/۸	۸	۴/۹۱۳۵-۰۷
۴	۵۳/۶۶	۷	۵/۳۱۳۵-۰۶
۵	۱۶۴/۷	۸	۵/۱۹۳۵-۰۶
۶	۵۳۲/۱	۹	۴/۱۶۱۵-۰۷
۷	۲۸۳	۱۰	۸/۱۱۱۵-۰۶
۸	۹۴/۱۸	۱۳	۵/۴۲۱۵-۰۷
۹	۱۲۱/۷	۸	۲/۵۲۲۵-۰۷
۱۰	۳۸۹/۲	۸	۸/۲۹۳۵-۰۷

بنابراین، سود حاصل از صدور بیمه‌نامه با نرخ‌های x_i برابر است با:

$$\text{سود} = \sum_{i=1}^m (d_i(x_i)x_i - d_i(x_i)c_i - d_i(x_i)\kappa + d_i(x_i)(x_i - c_i - \kappa)\rho).$$

برای به دست آوردن بیشینه سود مساله بهینه‌سازی (۳) را تعریف کرده‌ایم که در آن تابع هدف برابر با سود است. همچنین، با استفاده از کم‌ترین و بیش‌ترین نرخ ارایه شده توسط شرکت در هر گروه همگن، برای نرخ‌ها کران تعیین کرده‌ایم. مساله‌ی (۳)، با توجه به نمایی بودن توابع تقاضا یک مساله‌ی غیرخطی است. این مساله را با کمک نرم‌افزار متلب و بسته‌ی کاربردی بهینه‌سازی [۱۷] حل کرده‌ایم. برای حل مساله

$$\text{Max} \sum_{i=1}^m (d_i(x_i)x_i - d_i(x_i)c_i - d_i(x_i)\kappa + d_i(x_i)(x_i - c_i - \kappa)\rho) \quad (3)$$

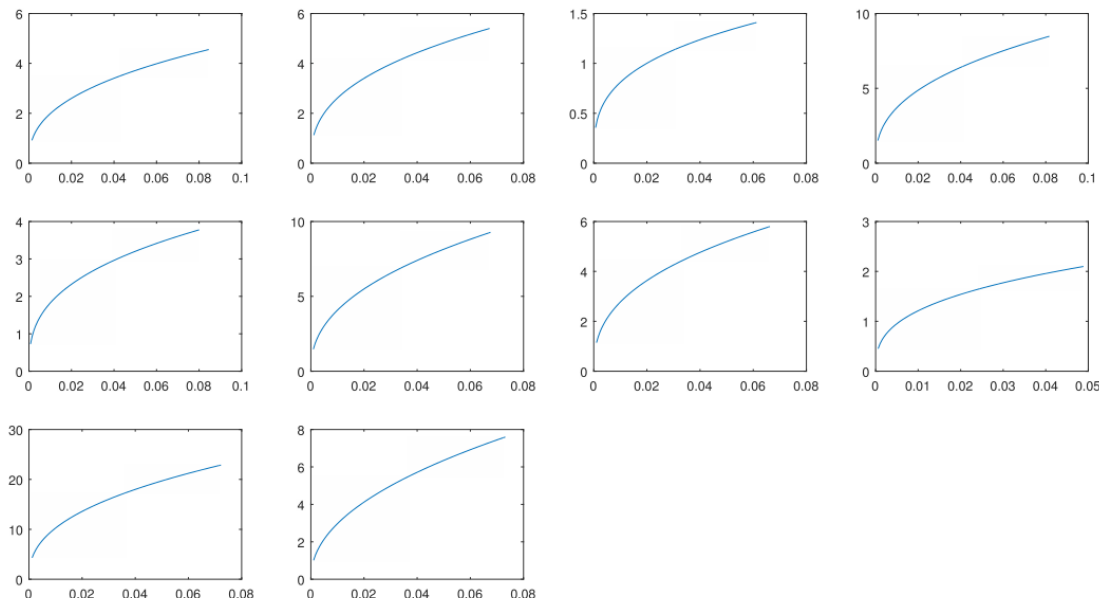
s.t :

$$l_i \leq x_i \leq u_i,$$

از روش نقطه درونی استفاده شده است. مقدار بیشینه‌ی مساله (۳) به ازای مقادیر نرخ خسارت گروه‌ها، c_i ها، که در جدول ۱ آورده شده، محاسبه شده است. مقادیر $\rho = 0/17$ و $\kappa = 0/09$ میانگین بازده سرمایه‌گذاری‌های و میانگین هزینه‌های عمومی و اداری به حق بیمه صادره است که با توجه به سوابق عملکرد شرکت در سال‌های گذشته تقریب زده شده است. مقدار بهینه‌ی تابع هدف با ۱۷ تکرار روش نقطه درونی برابر با ۲۷۷/۰۳۹ می‌باشد. نقطه شروع برای استفاده از این روش را نقطه (l_1, l_2, \dots, l_m) در نظر گرفته‌ایم که یک نقطه شدنی بوده است. همچنین، میانگین نرخ خسارت کل بیمه‌نامه‌ها برابر است با:

$$\frac{\sum_{i=1}^m d(x_i)c_i}{\sum_{i=1}^m d(x_i)}. \quad (4)$$

مقدار میانگین نرخ خسارت کل که با جایگزینی جواب‌های بهینه (۳) در رابطه (۴) حاصل شده است برابر است با ۰/۰۰۰۱۰۲.



شکل ۴. توابع کشش قیمتی در ده گروه همگن ریسک

برای گزینش بهتر ریسک‌ها، قید کنترل معیار ارزش در معرض ریسک را به مساله اضافه می‌کنیم با اضافه کردن این قید به مساله، ریسک‌های با ارزش در معرض خطر کم‌تر، نرخ بهینه‌ی کم‌تر و بنابراین در تعداد بیش‌تری

صادر خواهند شد. با استفاده از رابطه (۴)، قیدی به مساله اضافه می‌کنیم و کران بالایی مقدار متوسط ارزش در معرض خطر را در آن تعیین می‌کنیم. این قید به صورت

$$\frac{\sum_{i=1}^m d_i(x_i) VaR_i}{\sum_{i=1}^m d_i(x)} \leq V, \quad (5)$$

می‌باشد؛ بنابراین مساله (۶) را خواهیم داشت. در این رابطه مقدار V ، با توجه به سیاست‌های شرکت تعیین می‌شود. با جای گذاری جواب‌های بهینه مساله (۳)، مقدار سمت چپ نامساوی (۵) برابر با ۰/۱۰۵۱ است.

$$Max \sum_{i=1}^m (d_i(x_i)x_i - d_i(x_i)c_i - d_i(x_i)\kappa_i + d_i(x_i)(x_i - c_i - \kappa_i)\rho)$$

s.t.

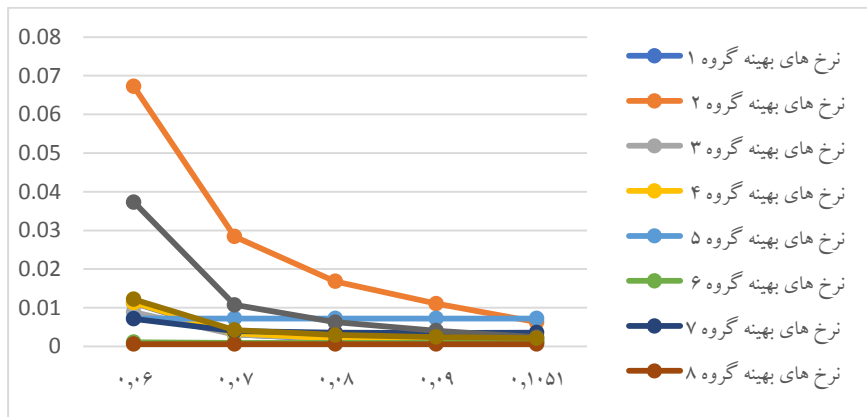
$$\frac{\sum_{i=1}^m d_i(x_i) VaR_i}{\sum_{i=1}^m d_i(x)} \leq V, \quad (6)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i.$$

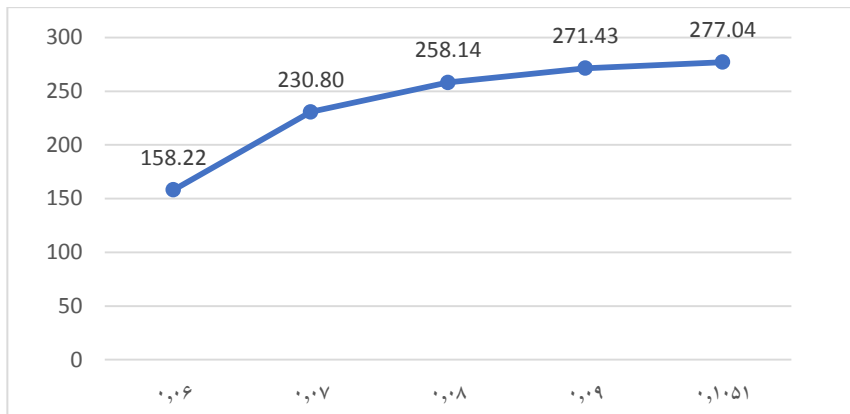
در مدل طراحی شده‌ی (۶)، فرض‌هایی در نظر گرفته شده است، از جمله فرض شده است که فقط درآمدها سرمایه‌گذاری می‌شوند. در عمل ممکن است این فرض درست نباشد و با توجه به برآوردی که از تاریخ سررسید خسارت‌ها انجام می‌شود ممکن است کسری از حق بیمه‌های تولید شده سرمایه‌گذاری شود. این موضوع در رشته‌های بیمه عمر اهمیت بیش‌تری است. با توجه به این که بیمه‌نامه‌های رشته باربری، بیمه‌نامه‌های کوتاه‌مدت هستند و تاریخ سررسید خسارت‌های آن‌ها بلند مدت نیست، این فرض در این مدل صرف نظر شده است. فرض دیگر آن است که تمام حق بیمه‌های صادر شده، دریافت می‌شوند.

برای بررسی نحوه تاثیر مقدار V بر جواب‌های بهینه، مساله را به ازای مقادیر مختلف آن حل کرده‌ایم. برای مقادیر V بزرگ‌تر از ۰/۱۰۵۱ ناحیه شدنی مساله بزرگ‌تر می‌شود و بنابراین مقدار بهینه برابر با مقدار بهینه‌ی مساله، بدون در نظر گرفتن قید کنترل معیار ارزش در معرض خطر است و به ازای مقادیر کوچک‌تر از ۰/۱۰۵۱، جواب‌های بهینه را محاسبه کرده‌ایم. شکل ۵ تغییرات قیمت‌ها را در هر یک از ده گروه همگن نشان می‌دهد. گروه ۸ که مطابق جدول ۱ کم‌ترین میانگین نرخ خسارت و همچنین کم‌ترین مقدار ارزش در معرض خطر را داراست، کم‌ترین نرخ‌های بهینه را دارد. همچنین، گروه ۲ با بیش‌ترین نرخ خسارت و بیش‌ترین ارزش در معرض خطر در مقایسه با سایر گروه‌ها، نرخ‌های بهینه‌ی بیش‌تری دارد.

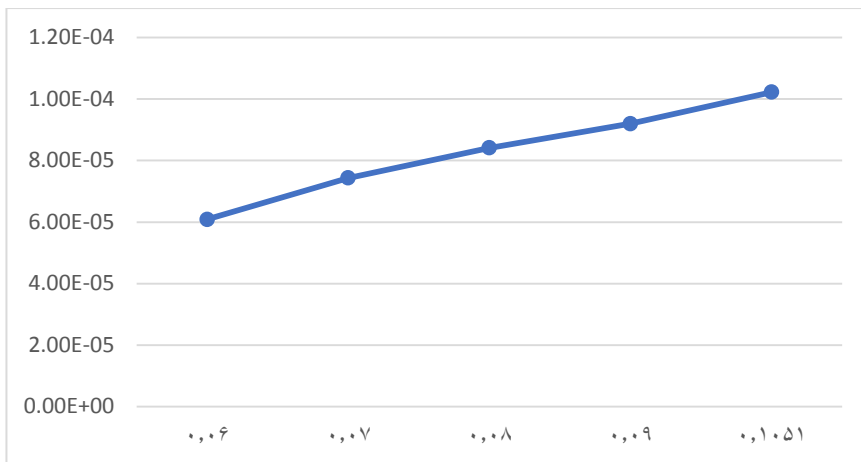
در نمودار شکل ۶، تغییرات مقدار بهینه‌ی تابع هدف به ازای مقادیر مختلف V مشاهده می‌شود. با کاهش مقدار V ناحیه شدنی مساله کوچک‌تر می‌شود و بنابراین مقدار بهینه تابع هدف کوچک‌تر می‌شود. با جای‌گذاری جواب بهینه مساله (۶) در رابطه (۴) متوسط نرخ خسارت کل بیمه‌نامه‌ها به ازای مقادیر مختلف V به دست می‌آید، این مقادیر در نمودار شکل ۷ مشاهده می‌شوند. با افزایش میانگین مقادیر ارزش در معرض خطر به صورت خطی مقادیر ضریب خسارت نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۵. تغییرات قیمت‌های بهینه در گروه‌ها با تغییر میانگین معیار ارزش در معرض ریسک



شکل ۶. تغییرات تابع هدف با تغییر کران بالای میانگین معیار ارزش در معرض ریسک



شکل ۷. تغییرات میانگین ضریب خسارت کل با تغییر کران بالای میانگین معیار ارزش در معرض ریسک

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، با مطالعه رفتار گروه‌های همگن ریسک، تابع تقاضا را در هر گروه برآورد کرده و با در نظر گرفتن توابع تقاضا، نرخ‌های بهینه را مشخص نموده‌ایم. با استفاده از تابع تقاضای معرفی شده برای گروه‌های همگن بیمه‌نامه‌ها و بهره‌گیری از روش‌های رگرسیون، پارامترهای توابع تقاضا را در هر گروه برآورد کرده‌ایم. برای برآورد تابع تقاضا نیاز به داده‌هایی داریم که بتوانیم ارتباط بین قیمت و تعداد بیمه‌نامه‌ها را بیابیم. برای به دست آوردن چنین داده‌هایی، نرخ‌های ارایه شده توسط شرکت را در هر گروه همگن خوشه‌بندی کردیم و تعداد بیمه‌نامه‌های هر خوشه را به عنوان تقاضا برای مرکز آن خوشه در نظر گرفتیم. نتایج رگرسیون نشان دادند که مدل استفاده شده به خوبی با داده‌ها هماهنگ هستند و ضرایب معنادار هستند. برای بررسی این موضوع، از آزمون T برای ضرایب رگرسیون استفاده کردیم. همچنین با بررسی تابع کشش قیمتی در ده گروه همگن، مشاهده شد که ریسک‌های با نرخ خسارت و ارزش در معرض خطر بیشتر، اندازه کشش قیمتی بیش‌تری دارند. سپس، مدلی ساختیم که سود حاصل از صدور بیمه‌نامه‌ها را بیشینه می‌کند و در عین حال با استفاده از قید مساله، برای ریسک‌های با ارزش در معرض خطر کم‌تر، نرخ‌های کم‌تری تعیین کردیم؛ البته این موضوع با توجه به هدف بیشینه کردن سود در نظر گرفته شده است. نتایج نشان دادند که برای مقادیر بالاتر ارزش در معرض خطر تا آستانه‌ای معین، سود بیشینه‌ی شرکت بیشتر می‌شود. مقدار متوسط این نرخ اندازه‌گیری ریسک با توجه به سیاست‌ها و راهبردهای شرکت‌ها تعیین می‌شود. از طرفی دیگر، هر چه بازده سرمایه‌گذاری‌ها بالاتر باشد شرکت می‌تواند با ارزش در معرض خطر بالاتری نرخ‌ها را تعیین کند. برای انجام محاسبات مدل از میانگین بازده سرمایه‌گذاری‌های شرکت استفاده کرده‌ایم. در مدل بهینه‌سازی ارایه شده، فرض‌هایی در نظر گرفته شده است، از جمله آن‌که سرمایه‌گذاری‌ها بر مبالغ کل درآمدهای به دست آمده انجام می‌شود و همچنین کل حق بیمه‌های صادره دریافت می‌شوند. در مطالعات آینده با در نظر گرفتن دوره سررسید خسارت‌ها و دوره بازده سرمایه‌گذاری‌ها می‌توان مدل را کامل‌تر کرد.

منابع

- [۱] ثبات، غلامعلی، (۱۳۸۷). مجموعه کامل مصوبات شورای عالی بیمه به همراه قوانین و ضوابط صنعت بیمه، پژوهشکده بیمه.
- [۱۰] جعفری، علی (۱۳۹۴). واحد نظارت بیمه مرکزی، بیمه مرکزی جمهوری اسلامی ایران.
- [2] Vaughan E.J., Vaughan T., (2007). Fundamentals of risk and insurance, Wiley.
- [3] Mikosch, T., (2009). Non-life insurance mathematics, Springer.
- [4] Yeo A. C, Smith K. A, Willis R. J, and Brooks M. ,(2001) . Modeling the effect of premium changes on motor insurance customer retention rates using neural networks. In: Computational Science-ICCS 2001. Springer. pp 390-399.
- [5] Yeo A. C, Smith K. A , Willis R. J, and Brooks M., (2003). A comparison of soft computing and traditional approaches for risk classification and claim cost prediction in the automobile insurance industry. In: Soft Computing in Measurement and Information Acquisition. Springer. pp 249-261.
- [6] Guy, R., (2009). Demand elasticity, risk classification and loss coverage: when can community rating work?, Austin Bulletin, 39(2), 403-428.

- [7] Pantelous, A. A., & Passalidou, E. (2015). Optimal premium pricing strategies for competitive general insurance markets, *Applied Mathematics and Computation*, 259, 858-874.
- [8] Leadbetter D., Dibrsa S., (2008). Why insurer fail: The dynamics of property and casualty insurance insolvency in Canada. *The International Association for the study of insurance Economics*, 33(3), 464-488.
- [9] Manteqipour, M., Ghaffari-Hadigheh, A., Mahmoodvand, R. Safari, A., (2018). Grouping objects to homogenous classes satisfying requisite mass, *Journal of AI and Data mining*, 6(2), 163-175.
- [11] Santoni, A. , Alvado, F. G., (2007). Sophisticated price optimization methods, 2008 CAS Ratemaking seminar.
- [12] Richt'arik, P., (2015) Optimization methods in finance, lecture notes.
- [13] Wu, J. (2012). *Advances in K-means clustering: a data mining thinking*, Springer Science & Business Media.
- [14] Jong, D. , P., Ferris, S., (2006). Adverse selection spirals, *Astin Bulletin*, 36, 589-628.
- [15] Gentleman R., Hornik K., Parmigiani G., (2011). *Nonlinear Regression with R*, Springer, 93-108.
- [16] Ekundayo, O. A., (2012). The Impact of Risk Pricing on Profit Maximization of Insurance Companies, *International Journal of Academic Research in Economics and Management Sciences*, 1(4), 21.
- [17] Beck, A., (2014). *Introduction to nonlinear optimization: Theory, algorithms, and applications with MATLAB*, Society for Industrial and Applied Mathematics.