مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۲)، پاییز ۹۸، ص ص۳۶-۲۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

توسعه یک مدل برنامه‌ریزی امکانی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام

مجتبی فرخ[1*]، محمد مهدی فلاح[2]
۱- استادیار، دانشکده مدیریت، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه یزد، یزد، ایران

رسید مقاله: ۷ خرداد ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۱۳ خرداد ۱۳۹۸

چکیده
مساله انتخاب سبد سهام یکی از مهم‌ترین مسایل در حوزه مدیریت مالی است که در آن به تخصیص سرمایه به دارایی‌های مختلف با کنترل همزمان بازده و ریسک پرداخته می‌شود. در مقاله حاضر، موضوع انتخاب سبد سهام بهینه با درنظرگرفتن محدودیت‌های تعداد سهام و نسبت هر سهم در سبد سرمایه‌گذاری مورد بررسی قرار گرفته است. برای کنترل بازده فازی سبد، یک مدل برنامه‌ریزی امکانی چند هدفه جدید برای حداکثرسازی ممکن‌ترین مقدار بازدهی، حداقل‌سازی ریسک نامطلوب و حداکثرسازی ریسک مطلوب توسعه داده شده و از دو رویکرد متفاوت برای تبدیل آن به مدل تک‌هدفه استفاده شده است. نتایج حاصل از بررسی عملکرد مدل پیشنهادی با استفاده از داده‌های مارکویتز و بورس اوراق بهادار تهران نشان می‌دهد که این مدل قادر است با بهینه‌سازی همزمان بازده و ریسک، سبد سهام مناسب را با توجه به گرایش‌ها و استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاران ارایه دهد.

کلمات کلیدی: سبد سهام، برنامه‌ریزی امکانی، برنامه‌ریزی چندهدفه، بازده فازی، ریسک.

۱ مقدمه
مساله انتخاب سبد سهام همواره یکی از موضوعات جذاب و کاربردی در بازارهای مالی بوده است. مفاهیم بهینه‌سازی سبد سهام و تنوع بخشی آن به‌عنوان ابزاری کارآمد در راستای توسعه بازارهای مالی و کمک به تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران در آمده‌اند. در مساله انتخاب سبد سهام ثروت اشخاص بین انواع مختلفی از دارایی به‌گونه‌ای تقسیم می‌شود که اهداف سرمایه‌گذاری تحقق یابد. یکی از مهم‌ترین مسایل مربوط به انتخاب سبد سهام در نظر گرفتن عدم اطمینان حاکم بر آن است. نوسان قیمت سهام یکی از این موارد است که در بازارهای سرمایه به زیان‌های قابل توجهی برای عوامل فعال در آن‌ها منجر شده است. به‌دلیل اینکه فعالیت در بازارهای مالی با عدم اطمینان و ریسک همراه است، اندازه‌گیری میزان ریسک در سبدهای سرمایه‌گذاری برای

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: farrokh@khu.ac.ir

سرمایه‌گذاران حایز اهمیت است، به طوری‌که بررسی و اندازه‌گیری ریسک‌های نامطلوب برای موسسات مالی و فعالان بازار سرمایه از اهمیت خاصی برخوردار بوده است [۱]. نظریه غالب سبد سرمایه‌گذاری که نخستین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۲) مطرح شد [۲]، پارادایم سازمان‌یافته‌ای را به سوی تشکیل سبد سهام با بالاترین نرخ بازده مورد انتظار در سطح معینی از ریسک به‌وجود آورد. متدولوژی میانگین-واریانس برای مساله انتخاب سبد سهام که نخستین بار توسط مارکویتز پیشنهاد شد، نقش مهمی را در توسعه تئوری انتخاب سبد سهام داشته است. مارکویتز پیشنهاد کرد که سرمایه‌گذاران ریسک و بازده را به صورت همزمان در نظر بگیرند و میزان تخصیص سرمایه بین فرصت‌های سرمایه‌گذاری گوناگون را بر اساس تعامل بین این دو انتخاب کنند [۳].

بیش‌تر مدل‌های بهینه‌سازی توسعه یافته مبتنی بر تئوری احتمال هستند. فرض اصلی مدل میانگین – واریانس مارکویتز این است که می‌توان حالات آینده بازدهی دارایی را با داده‌های تاریخی مربوط به بازده دارایی به صورت صحیح منعکس کرد. به‌رغم اینکه تئوری احتمال یکی از تکنیک‌های اصلی مورد استفاده در تحلیل عدم اطمینان در مباحث مالی است، رفتار بازارهای مالی اغلب با چندین عامل غیر احتمالی مانند ابهام و سربستگی متاثر است [۴]. در بیشتر موارد، داده‌های تاریخی برای تخمین توزیع احتمال مقادیر وجود ندارد یا تهیه آن‌ها هزینه زیادی را خواهد داشت [۵]. در واقع، ضعف اساسی مدل مارکویتز این است که تخمین دقیقی برای بازده سهام و واریانس (ریسک) آن‌ها در نظر گرفته است. با معرفی تئوری مجموعه‌های فازی توسط لطفی‌زاده [۶]، تعدادی از محققان به این نتیجه رسیدند که می‌توان از این تئوری برای مدیریت سبد سهام در نوع دیگری از فضای تصمیم‌گیری به نام محیط فازی استفاده کرد. در این زمینه محققان روش‌های مختلفی را با رویکرد برنامه‌ریزی امکانی برای مساله سبد سهام توسعه داده‌اند [۷-۹]. برنامه‌ریزی فازی شامل دو رویکرد برنامه‌ریزی انعطاف‌پذیر[1] و برنامه‌ریزی امکانی[2] است. در رویکرد اول با در نظر گرفتن توابع عضویت اقناع برای توابع هدف و محدودیت‌ها در قالب تابع مطلوبیت، مساله در غالب یک مساله تک هدفه مدلسازی می‌شود. از جمله کاربردهای این رویکرد در بهینه‌سازی مسایل برنامه‌ریزی چند هدفه است. در رویکرد برنامه‌ریزی امکانی مقادیر توابع هدف و محدودیت‌های مساله در غالب توابع توزیع امکانی همچون توابع احتمال مدل‌سازی می‌شوند [۱۰]. مطابق با تئوری سبد سرمایه‌گذاری، اهداف حداکثرسازی میانگین نرخ برگشتی، حداقل‌سازی واریانس نامطلوب و حداکثرسازی چولگی راست باید در مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام مورد بررسی قرار گیرند. با این حال در بیش‌تر مدل‌های امکانی پیشنهادی، با وجود در نظر گرفتن میانگین و ریسک نامطلوب بازدهی سبد سهام، چولگی سمت راست بازدهی در نظر گرفته نمی‌شود. چولگی سمت راست بازدهی امکان کسب بازدهی بیش‌تر از بازدهی متوسط را نشان می‌دهد.

از طرف دیگر، تلاش‌های زیادی برای حل و توسعه مدل مارکویتز برای کاربردی کردن آن‌ها صورت گرفته است. محدود نگاه داشتن تعداد دارایی‌ها در سبد سهام با متغیرهای صفر و یک (محدودیت‌های اصلی[3]) و

[1] Flexible programming
[2] Possibilistic programming
[3] Cardinality constraints

تعیین حدود پایین و بالا (محدودیت‌های آستانه[1]) بر روی نسبتی از سرمایه که در هر دارایی سرمایه‌گذاری می‌شود از جمله محدودیت‌های کاربردی هستند که معرفی شده‌اند [۱۱]. این موارد ناشی از خواسته‌های سرمایه‌گذاران است که برای کنترل ریسک غیرسیستماتیک سبد سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شوند؛ روشن است که بالا بودن تعداد دارایی‌ها به‌دلیل هزینه‌های معاملاتی، در نظر گرفتن حداقل اندازه‌های دسته‌های معاملاتی، پیچیدگی مدیریت، یا سیاست شرکت‌های مدیریت دارایی مطلوب نیست.

بنابراین با توجه به شرایط فازی که بر سبد سرمایه‌گذاری حاکم است و همچنین وجود گرایش‌ها و استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاران، در این تحقیق یک مدل ریاضی مبتنی بر برنامه‌ریزی امکانی برای کنترل متوسط بازده، ریسک نامطلوب و چولگی راست با در نظر گرفتن محدودیت‌های تعداد و نسبت سهام توسعه داده می‌شود. در قسمت ۲ به بررسی مبانی و ادبیات مدل‌های سبد سهام و سپس در قسمت ۳ بعد از تشریح مفاهیم مورد نیاز، رویکرد پیشنهادی را ارایه خواهیم کرد. در قسمت ۴، عملکرد رویکرد پیشنهادی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. درنهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادها مطرح می‌شود.

۲ پیشینه تحقیق

انسان‌ها همواره به دنبال راه‌هایی برای افزایش درآمد منظم خود از طریق سرمایه‌گذاری مناسب بوده و هستند. هر فرد پیش از سرمایه‌گذاری باید به دو معیار اساسی توجه کند. نخست اینکه سرمایه‌گذاری انجام شده بیشترین سود را برایش به ارمغان بیاورد و دوم اینکه بازده کسب شده روند پایداری داشته باشد. به عبارتی دیگر، ریسک سرمایه‌گذاری کم‌ترین میزان ممکن باشد. مدل‌هایی که توسط پژوهشگران، یکی پس از دیگری و به‌منظور انتخاب سبد سهام معرفی می‌شوند، همگی به‌دنبال برطرف کردن نواقص مدل‌های پیشین و بهبود نتایج حاصل از آن‌ها هستند و می‌کوشند اهداف مدنظر سرمایه‌گذاران را به بهترین شکل ممکن برآورده کنند [۱۲]. همان‌طورکه پیش‌تر اشاره شد، مسایل بهینه‌سازی سبد سهام از اوایل ۱۹۵۲ با پیشگامی مارکویتز مورد توجه محققان قرار گرفت. مارکویتز در مدل خود علاوه بر در نظر گرفتن بازده سرمایه‌گذاری، به مفهوم ریسک در انتخاب دارایی‌ها نیز توجه کرد. همچنین مارکویتز نخستین کسی بود که مفهوم کاهش ریسک از طریق ایجاد تنوع در سبد سرمایه‌گذاری را مطرح کرد. در ابتدا، مدل انتخاب سبد سهام به‌صورت تک دوره‌ای و به همان صورتی که در مدل اولیه مارکویتز معرفی شده بود مورد استفاده قرار می‌گرفت، این درحالیست که سرمایه‌گذاران سبد سهام خود را در طول یک افق برنامه‌ریزی چند دوره‌ای نگهداری می‌کنند و این امکان را دارند که از طریق بازنگری و تعدیل در سبد سهام، بازده بیش‌تری کسب کنند [۱۲-۱۳].

پس از مارکویتز، پژوهشگران زیادی مدل وی را توسعه دادند. برای مثال یان و همکاران [۱۴] به‌جای واریانس از نیمه واریانس به‌صورت اندازه ریسک نامطلوب برای بررسی مساله انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کرد. پینار [۱۵] از اندازه ریسک نامطلوب در مساله انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کرد. چانگ

[1] Threshold constraints

و همکاران [۱۶] از الگوریتم ژنتیک برای حل مسایل بهینه‌سازی سبد سهام در مدل‌های میانگین- واریانس، نیمه واریانس و انحراف مطلق استفاده کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که سبد سهامی با اندازه کوچک‌تر کارایی بیش‌تری در مقایسه با سبد سهام با اندازه‌های بزرگ‌تر خواهد داشت. هاو و لیو [۱۷] بر اساس نظریه مارکویتز در مدل میانگین-واریانس، چند مدل جدید میانگین-واریانس برای مسایل انتخاب سبد سهام با بازده سرمایه‌گذاری تصادفی فازی توسعه دادند. ژانگ و همکاران [۱۸] و لیو و همکاران [۱۹] با در نظرگرفتن هزینه معاملاتی خطی، درجه تنوع بخشی سبد سهام و چولگی، به ترتیب از الگوریتم ژنتیک و الگوریتم تکاملی هوشمند برای انواع مدل‌های انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای استفاده کردند.

در زمینه برنامه‌ریزی امکانی، واتادا [۹] و لئون و همکاران [۱۰] مساله انتخاب سبد سهام را با استفاده از تئوری تصمیم فازی مورد بررسی قرار دادند. تاناکا و گائو [۲۰] دو نوع مدل انتخاب سبد سهام را با استفاده از احتمالات فازی و توزیع‌های امکانی نمایی پیشنهاد کردند. اینگوچی و تانینو [۲۱] رویکرد برنامه‌ریزی امکانی برای مساله انتخاب سبد سهام تحت معیارهای تاسف[1] minimax را معرفی کردند. لای و همکاران [۲۲]، وانگ و زو [۲۳] و گیو و همکاران [۲۴] مدل‌های برنامه‌ریزی بازه‌ای را برای انتخاب سبد سهام توسعه دادند. ایدا [۲۵] مساله انتخاب سبد سهام را با ضرایب بازه‌ای و فازی مورد بررسی قرار داد و دو نوع از جواب‌های کارا را معرفی کرد که شامل جواب کارای امکانی به‌صورت جواب خوشبینانه و جواب کارای الزامی به صورت جواب بدبینانه بودند. کارلسون و همکاران [۲۶] با این فرض که بازدهی دارایی‌ها به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای هستند، یک رویکرد امکانی برای انتخاب سبد سهام با بالاترین مقدار مطلوبیت پیشنهاد کرد. علاوه بر این، لاکاگنینا و پکورلا [۶] یک برنامه‌ریزی فازی را با محدودیت‌های نرم تصادفی چند مرحله‌ای با بازگشت برای در نظر گرفتن همزمان عدم اطمینان تصادفی و فازی برای حل یک مساله مدیریت سبد سهام پیشنهاد کردند. هوانگ [۷] با استفاده از معیار شانس اندازه الزام دو مدل انتخاب سبد سهام با بازدهی فازی را پیشنهاد کرد. ژانگ و همکاران [۱۸] مدل‌های انتخاب سبد سهام مبتنی بر میانگین‌های امکانی فوقانی و تحتانی و واریانس‌های امکانی اعداد فازی را معرفی کردند. در مدل ژانگ و ژانگ [۱۱] انحراف مطلق به‌صورت یک محدودیت تعریف می‌شود و حد فوقانی آن توسط ترجیحات تصمیم‌گیرندگان تعیین می‌شود. ساباریدو و همکاران [۲۷] از یک مدل میانگین ریسک نامطلوب با در نظر گرفتن چولگی بازدهی برای انتخاب سبد سهام استفاده کردند. آن‌ها همزمان متوسط بازدهی، ریسک نامطلوب و چولگی سبد سهام را بهینه کردند و محدودیت‌های بودجه و محدودیت‌های آستانه را در نظر گرفتند. لیو و ژانگ [۲۸] از یک تکنیک تصمیم‌گیری فازی برای بیان ترجیحات سرمایه‌گذاران استفاده کردند و یک مدل میانگین نیمه واریانس چند دوره‌ای با در نظر گرفتن دسته‌های معاملاتی را در چهارچوب تئوری برنامه‌ریزی امکانی توسعه دادند. گو و همکاران [۲۹] یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه فازی با در نظر گرفتن افق‌های سرمایه‌گذاری مختلف را در چهارچوب تئوری برنامه‌ریزی امکانی توسعه دادند. آن‌ها یک مدل میانگین-واریانس با هدف حداکثرسازی بازدهی نهایی را فرمول‌بندی کردند. گین [۳۰] از متغیرهای فازی

[1] Regret

تصادفی برای بررسی بازدهی تصادفی دارایی‌های با اطلاعات مبهم استفاده کرد. وی انحراف مطلق متغیر فازی تصادفی را تعریف و سپس از آن به عنوان شاخص ریسک در مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام مبتنی بر میانگین انحراف مطلق استفاده کرد. لیو و ژانگ [۳۱] یک مدل میانگین نیمه واریانس امکانی برای انتخاب سبد سهام فازی با در نظر گرفتن هزینه معاملاتی متغیر و ثابت، محدودیت‌های آستانه سرمایه‌گذاری و حداقل دسته معاملاتی پیشنهاد کردند.

شریفی سلیم و همکاران [۳۲] در پژوهشی، برنامه‌ریزی چند هدفه را برای انتخاب سبد سهام مورد بررسی قرار دادند. در آن پژوهش از مدل برنامه‌ریزی توافقی با محدودیت تصادفی برای انتخاب سبد سهام استفاده شد. نتایج این پژوهش نشان داد برنامه‌ریزی تصادفی سازگاری بیش‌تری با خواسته‌های مشتری دارد و با سادگی و قابلیت کاربردی‌ای که دارد، می‌تواند در حل سایر مسایل تصادفی نیز مورد استفاده قرار گیرد. سلیمی فرد و همکاران [۳۳] مدل توسعه‌یافته میانگین ـ نیم واریانس مارکویتز را در قالب یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفهٔ عدد صحیح آمیخته با محدودیت‌های کاردینال، حد آستانه، بخش سرمایه‌گذاری، آنتروپی و نیز با در نظر گرفتن هزینهٔ معاملاتی پیشنهاد دادند. برای بررسی کاربردپذیری مدل پیشنهادی در مساله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام، با استفاده از اطلاعات قیمت ده سهم پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار مرز کارای سرمایه‌گذاری به‌دست آمد. نوری و محمدی [۳۴] به بهینه‌سازی سبد سهام در حالت عدم قطعیت با کمک رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی پرداختند و از برنامه‌ریزی توافقی برای تک هدفه کردن مدل خود استفاده کردند. آن‌ها از اطلاعات مربوط به ۲۰ شرکت دارویی از بازار بورس تهران برای اعتبارسنجی مدل استفاده کردند.

۳ روش‌شناسی پژوهش

۳-۱ مقدمات و تعاریف

در رویکرد پیشنهادی، مفاهیم میانگین بازدهی، امکان کسب بازدهی بالاتر از میانگین به‌عنوان ریسک مطلوب و امکان کسب بازدهی پایین‌تر از میانگین به‌عنوان ریسک نامطلوب مربوط به بازده فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در قسمت زیر بعد از معرفی برخی از تعاریف مورد نیاز به تشریح مدل پیشنهادی و نحوه حل آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱ عدد فازی $\tilde{A}$ یک عدد فازی از نوع LR، $\tilde{A}=(\underline{a},\overline{a},\alpha,\beta)_{LR}$، بوده که دارای تابع عضویت زیر است [۱۰]:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\underline{a}-x}{\alpha}\right) & \underline{a}-\alpha\le x\le \underline{a} \\ ۱ & \underline{a}\le x\le \overline{a} \\ R\left(\dfrac{\overline{a}-x}{\beta}\right) & \overline{a}\le x\le \overline{a}+\beta \end{cases} \qquad (۱)$$

تعریف ۲ فرض کنید $\tilde{B}=[\underline{a},\bar{a}]$ یک بازه فازی باشد، مساله حداکثرسازی با تابع هدف بازه‌ای به صورت زیر است [۳۵]:

$$\max \tilde{B} \quad s.t.\ \tilde{B}\in\chi \tag{۲}$$

که معادل مساله برنامه‌ریزی ریاضی چند هدفه زیر است:

$$\max \left\{ \underline{a}, \frac{\underline{a}+\bar{a}}{۲} \right\} \quad s.t.\ \tilde{B}\in\chi \tag{۳}$$

χ مجموعه محدودیت‌هایی است که مقدار متغیر $\tilde{B}$ باید در آن محدود شود.

۳-۲ برنامه‌ریزی امکانی

در مساله انتخاب سبد سهام استاندارد، یک سرمایه‌گذار درخصوص نسبتی از کل ثروت خود که به دارایی j ام (x_j) تخصیص می‌دهد، تصمیم‌گیری می‌کند. با فرض اینکه $\tilde{R}_j=(\underline{a}_j,\bar{a}_j,\alpha_j,\beta_j)$ بازدهی فازی دارایی j ام باشد، مقدار بازدهی فازی یک سبد سرمایه‌گذاری را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\tilde{R}=(\sum_j \underline{a}_j x_j,\sum_j \bar{a}_j x_j,\sum_j \alpha_j x_j,\sum_j \beta_j x_j)_{LR}=(\underline{R}(x),\bar{R}(x),\alpha(x),\beta(x))_{LR} \tag{۴}$$

متغیر $\tilde{R}$ طبق اصل گسترش لطفی‌زاده [۳۶] یک عدد فازی ذوزنقه‌ای از نوع LR است. در این صورت، مساله برنامه‌ریزی خطی امکانی سبد سرمایه‌گذاری به‌صورت مدل زیر است:

$$\max \tilde{R}=(\underline{R}(x),\bar{R}(x),\alpha(x),\beta(x))_{LR} \tag{۵}$$

$$s.t.\ \sum_{j=۱}^{n} x_j=۱ \tag{۶}$$

$$\sum_{j=۱}^{n} z_j=N \tag{۷}$$

$$z_j l_j \le x_j \le u_j z_j,\quad j=۱,\dots,n \tag{۸}$$

$$z_j\in\{۰,۱\},\quad j=۱,\dots,n \tag{۹}$$

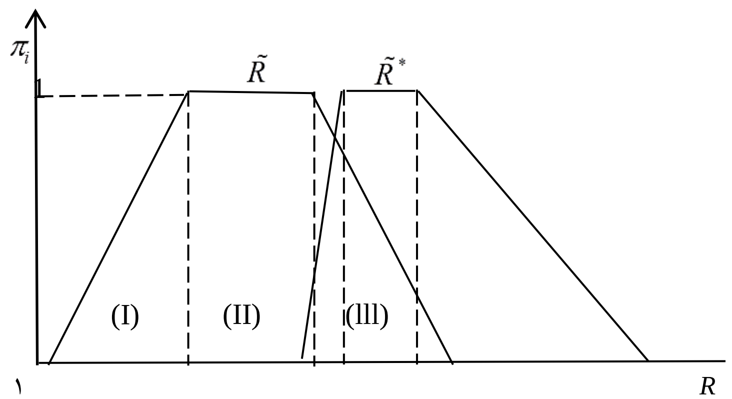
محدودیت ۷ و ۸ سرمایه‌گذاری بر روی N دارایی را با در نظر گرفتن حدود بالا و پایین آن‌ها، تضمین می‌کند. این محدودیت برای کنترل در نظر گرفته شده است. مقادیر l_j و u_j به ترتیب حداقل و حداکثر نسبت سرمایه‌گذاری بر روی دارایی‌ها را نشان می‌دهند. همچنین فرض می‌کنیم شروط متنوع‌سازی سبد سهام نسبت سرمایه‌ای است که در هر دارایی سرمایه‌گذاری می‌شود (حدود بالا و پایین) که توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود، روشن است این محدودیت‌ها برای تنوع‌بخشی به سبد سهام حاصل از تسهیم ثروت بر روی دارایی‌های

مختلف برای کنترل ریسک غیرسیستماتیک سبد سرمایه‌گذاری به‌کار می‌روند. تابع هدف یک تابع نادقیق با توزیع امکانی ذوزنقه‌ای است که محتمل‌ترین مقدار آن بازه $[\underline{R}(x),\bar{R}(x)]$ و پهنای چپ و راست آن نیز به ترتیب با $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ مشخص می‌شود.

برای حداکثرسازی تابع هدف باید مقادیر $\underline{R}(x)$، $\bar{R}(x)$ و $\beta(x)$ حداکثر و مقدار $\alpha(x)$ حداقل گردد. با این حال، برای حفظ شکل تابع توزیع ذوزنقه‌ای LR (نرمال و محدب)، به جای انجام این عملیات، برای حداکثرسازی مقادیر بازه $[\underline{R}(x),\bar{R}(x)]$، براساس تعریف ۲ می‌توان $\underline{R}(x)$ و $[\frac{\bar{R}(x)+\underline{R}(x)}{۲}]$ را هم‌زمان حداکثر کرد. همچنین مقدار $\beta(x)$ را حداکثر و $\alpha(x)$ را حداقل ساخت. این چهار تابع حرکت به سمت راست توزیع امکان ذوزنقه‌ای را تضمین می‌کنند؛ بنابراین مساله کمکی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\max\ z_۱ = \underline{R}(x)\\
&\max\ z_۲ = [\frac{\bar{R}(x)+\underline{R}(x)}{۲}]\\
&\max\ z_۳ = \beta(x)\\
&\min\ z_۴ = \alpha(x)\\
&s.t: constraints\,(۶)-(۹)
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

مدل چند هدفه خطی قطعی فوق، معادل حداکثرسازی ممکن‌ترین مقدار بازدهی (که درجه امکان آن برابر با یک بوده) است که برای حل آن می‌توان از رویکردهای برنامه‌ریزی انعطاف‌پذیری مانند روش ورنرز و روش ترابی و حسنی استفاده کرد. در همین زمان، پهنای سمت چپ[1] توزیع امکان حداقل می‌شود که به معنی حداقل-سازی منطقه یک (معادل ریسک کسب سود پایین‌تر) در شکل ۱ است. علاوه بر این، پهنای سمت راست توزیع امکان حداکثر می‌شود که به معنی حداکثرسازی منطقه سه (معادل امکان کسب سود بالاتر) است [۳۷].



شکل ۱. استراتژی حل $\max \tilde{R}$

در شکل ۱ توزیع امکان $\tilde{R}^*$ بر $\tilde{R}$ ترجیح داده می‌شود. در تئوری سبد سرمایه‌گذاری، حداکثرسازی میانگین نرخ برگشتی، حداقل‌سازی واریانس نامطلوب و حداکثرسازی چولگی راست اغلب مورد نظر است. در این تئوری،

[1] Inferior

تخصیص بهینه سرمایه و انتخاب سبد بهینه براساس رابطه بازده و معیارهای ریسک مطلوب[1] و نامطلوب[2] انجام می‌گیرد. در این تئوری نرخ برگشتی دارای یک توزیع احتمال است.

۳-۳ حل مدل چندهدفه

برای این منظور، از روش زیمرمن و روش ترابی و حسنی استفاده شده است. ابتدا باید راه‌حل‌های ایده‌آل مثبت (PIS) و راه‌حل‌های ایده‌آل منفی (NIS) توابع هدف فوق را به‌دست آوریم:

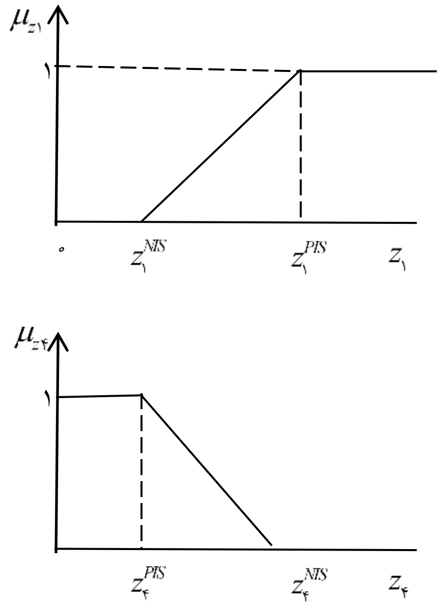
$$\begin{aligned} z_{۱}^{PIS} &= \max_{x\in X} \underline{R}(x), & z_{۱}^{NIS} &= \min_{x\in X} \underline{R}(x), \\ z_{۲}^{PIS} &= \max_{x\in X}[\frac{\overline{R}(x)+\underline{R}(x)}{۲}], & z_{۲}^{NIS} &= \min_{x\in X}[\frac{\overline{R}(x)+\underline{R}(x)}{۲}], \\ z_{۳}^{PIS} &= \max_{x\in X} \beta(x), & z_{۳}^{NIS} &= \min_{x\in X} \beta(x), \\ z_{۴}^{PIS} &= \min_{x\in X} \alpha(x), & z_{۴}^{NIS} &= \max_{x\in X} \alpha(x), \end{aligned} \tag{۱۱}$$

تابع عضویت خطی این توابع را می‌توان محاسبه کرد که نمودار آن‌ها در شکل ۲ ترسیم شده است:

$$\mu_{z۱} = \begin{cases} ۱ & Z_{۱} > Z_{۱}^{PIS} \\ \dfrac{Z_{۱}-Z_{۱}^{NIS}}{Z_{۱}^{PIS}-Z_{۱}^{NIS}} & Z_{۱}^{PIS} \le Z_{۱} \le Z_{۱}^{NIS} \\ ۰ & Z_{۱} < Z_{۱}^{NIS} \end{cases} \tag{۱۲}$$

$$\mu_{z۴} = \begin{cases} ۱ & Z_{۴} < Z_{۴}^{PIS} \\ \dfrac{Z_{۴}^{NIS}-Z_{۴}}{Z_{۴}^{NIS}-Z_{۴}^{PIS}} & Z_{۴}^{PIS} \le Z_{۴} \le Z_{۴}^{NIS} \\ ۰ & Z_{۴} > Z_{۴}^{NIS} \end{cases} \tag{۱۳}$$

[1] Upside risk
[2] Downside risk



شکل ۲. تابع عضویت اهداف، $Z_۱$ و $Z_۴$

روشن است که تابع عضویت توابع هدف ۲ و ۳ ($\mu_{z۲}$ و $\mu_{z۳}$) مشابه تابع عضویت تابع هدف اول ($\mu_{z۱}$) است. در زیر دو روش متفاوت برای حل مساله چند هدفه مساله انتخاب سبد سهام ارایه می‌شود.

روش ورنرز [۳۸]. براساس این روش مدل برنامه‌ریزی خطی تک هدفه مساله انتخاب سبد سهام به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}&\max \quad \gamma\lambda_۰ + (۱-\gamma)\frac{\sum_i \lambda_{zi}}{۴}\\ &s.t. \quad \mu_{zi} \geq \lambda_۰ + \lambda_{zi} \quad i = ۱,۲,۳,۴\\ &\qquad constraints(۶)-(۹), \quad \lambda_۰, \lambda_{zi}\, and\, \gamma \in [۰,۱]\end{aligned} \tag{۱۴}$$

متغیر λ_{zi} اختلاف میان سطح اقناع هر تابع هدف و حداقل سطح اقناع توابع هدف ($\lambda_{zi} = \mu_{zi} - \lambda_0$) است. γ ضریب جبران را نشان می‌دهند که حداقل سطح اقناع اهداف و درجه مصالحه میان اهداف را کنترل می‌کند.

روش ترابی و حسنی [۳۹]. برای حل مشکل ناکارایی و رسیدن به جواب مصالحه‌ای بهتر، ترابی و حسنی یک رویکرد جدید به‌صورت زیر توسعه داده‌اند:

$$\begin{aligned}&\max \quad \gamma\lambda_۰ + (۱-\gamma)\frac{\sum_i \mu_{zi}(x)}{۴}\\ &s.t. \qquad \mu_{zi}(x) \geq \lambda_۰, \quad i = ۱,۲,۳,۴\\ &\qquad constraints(۶)-(۹), \quad \lambda_۰\, and\, \gamma \in [۰,۱]\end{aligned} \tag{۱۵}$$

مقدار بهینه متغیر $\lambda_0 = \min\{\mu_{zi}(x)\}$، حداقل درجه اقناع توابع هدف را نشان می‌دهد و تابع تجمیع این رویکرد نیز در جستجوی یک مقدار مصالحه‌ای بین عملگر min و عملگر جمع موزون بوده که با تغییر مقدار γ انجام می‌شود.

٤ یافته‌های پژوهش

برای ارزیابی عملکرد رویکرد پیشنهادی، از مجموعه داده‌هایی که توسط مارکویتز [۴۰] معرفی شده است و مجموعه داده‌های بورس اوراق بهادار تهران استفاده می‌کنیم. فرض کنید سرمایه‌گذاری قصد دارد ثروت خود را بین ۹ دارایی از داده‌های تاریخی مارکویتز تخصیص دهد که بازدهی سالیانه آن‌ها با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_{kj} = (p_{(k+1)j} + d_{kj} - p_{kj}) / p_{kj},$$

p_{kj} قیمت دارایی R_j در سال k و d_{kj} سود این دارایی در سال k است. این داده‌ها مربوط به سال‌های **۱۹۳۷** تا **۱۹۵۴** است. جدول ۱ خلاصه آمار این داده‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۱. آمار بازدهی سالیانه دارایی‌ها (۱۹۵۴– ۱۹۳۷) مربوط به داده‌های تاریخی مارکویتز

دارایی	میانگین	انحراف استاندارد	صدک پنجم	صدک چهلم	صدک شصدم	صدک نود و پنجم
R1	۰/۰۶۶	۰/۲۳۸	−۰/۲۸۴	−۰/۰۱۱	۰/۰۷	۰/۴۵۶
R2	۰/۰۶۲	۰/۱۲۵	−۰/۱۷۵	۰/۰۵۲	۰/۰۸۹	۰/۲۲۹
R3	۰/۱۴۶	۰/۳۰۱	−۰/۱۹۳	۰/۰۱۸	۰/۱۳۶	۰/۷۵۸
R4	۰/۱۷۳	۰/۳۱۸	−۰/۳۰۷	۰/۱۶۱	۰/۲۳۸	۰/۷۱۴
R5	۰/۱۹۸	۰/۳۶۸	−۰/۴۲۹	۰/۰۶۲	۰/۳۲۵	۰/۶۷۱
R6	۰/۰۵۵	۰/۲۰۹	−۰/۲۳۴	−۰/۰۶۴	۰/۰۹۴	۰/۳۵۲
R7	۰/۱۲۸	۰/۱۷۵	−۰/۱۳۲	۰/۰۹	۰/۱۶۴	۰/۳۵۶
R8	۰/۱۱۸	۰/۲۸۶	−۰/۳۱۱	۰/۱۰۴	۰/۱۹۶	۰/۵۸۷
R9	۰/۱۱۶	۰/۲۹	−۰/۳۱۶	۰/۱۰۴	۰/۱۹۶	۰/۵۸۷

در مدل‌های فازی، این مشاهدات برای بازده دارایی‌ها به‌صورت نمونه در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین از صدک‌های نمونه برای تقریب مرکز و پهنای چپ و راست بازدهی‌های فازی ذوزنقه‌ای این دارایی‌ها استفاده می‌کنیم. برای این منظور، بازه $[\underline{a}_j, \overline{a}_j]$ دارایی فازی R_j به صورت بازه $[P_{40}, P_{60}]$ و مقادیر $P_{40} - P_{5}$ و $P_{95} - P_{60}$ به ترتیب به‌عنوان پهنای چپ α_j و راست β_j در نظر گرفته می‌شوند. P_k صدک kام نمونه است، سپس توابع عضویت چپ و راست بازده فازی مربوطه با استفاده از تعریف ۱ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L(r) = \frac{r - \underline{a}_j - \alpha_j}{\alpha_j} \, for \; r \in [\underline{a}_j - \alpha_j, \underline{a}_j]$$

$$R(r) = \frac{\overline{a}_j + \beta_j - r}{\beta_j} \, for \; r \in [\overline{a}_j, \overline{a}_j + \beta_j]$$

مسایل بهینه‌سازی تک هدفه با استفاده از نرم‌افزار لینگو ۱۵ با شروط تنوع بخشی و ضرایب جبران مختلف حل شد. جدول ۲ سبد سهامی را نشان می‌دهد که با استفاده از سطوح مختلف ضریب جبران برای مدل‌های سبد سهام تک هدفه مبتنی بر روش ورنرز و روش ترابی و حسنی به‌دست آمده است.

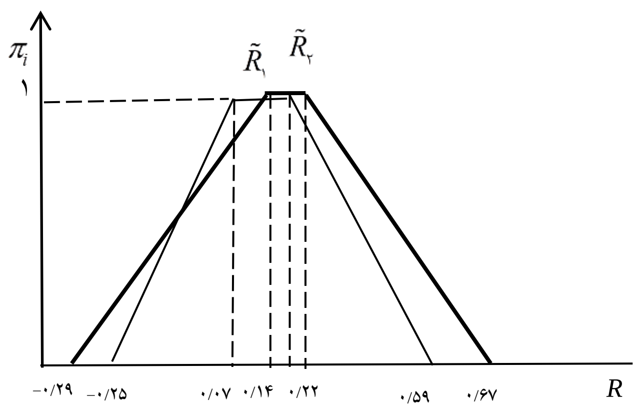
جدول ۲. سبد سهام بهینه برای ضرایب مختلف جبران مربوط به داده‌های تاریخی مارکویتز

$l_{۲} = ۰/۰۶, l_{۴} = ۰/۰۶۵, l_{۶} = ۰/۰۵, u_{۲} = ۰/۲۰, u_{۶} = ۰/۳۵, N = ۳$

(γ)	بازده فازی مدل زیمرمن $\beta(x)$	$\alpha(x)$	$\underline{R}(x)$	$\underline{R}(x)$	بازده فازی مدل ترابی و حسنی $\beta(x)$	$\alpha(x)$	$\underline{R}(x)$	$\underline{R}(x)$
۰	۰/۴۴۵	۰/۴۳۸	۰/۲۲۲	۰/۱۴۳	۰/۴۴۵	۰/۴۳۸	۰/۲۲۲	۰/۱۴۳
۰/۲۰	۰/۴۴۵	۰/۴۳۸	۰/۲۲۲	۰/۱۴۳	۰/۴۴۵	۰/۴۳۸	۰/۲۲۲	۰/۱۴۳
۰/۴۰	۰/۴۴۵	۰/۴۳۸	۰/۲۲۲	۰/۱۴۳	۰/۳۳۱	۰/۳۳۰	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶
۰/۶۰	۰/۳۱۳	۰/۳۴۴	۰/۱۶۳	۰/۱۰۰	۰/۳۳۱	۰/۳۳۰	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶
۰/۸۰	۰/۳۳۱	۰/۳۳۰	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶	۰/۳۳۱	۰/۳۳۰	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶
۱	۰/۳۳۱	۰/۳۳۰	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶	۰/۳۳۱	۰/۳۲۹	۰/۱۶۲	۰/۰۷۶

از جدول ۲ مشاهده می‌شود که مقادیر بازده فازی برای هر دو روش در ضرایب جبران (۰، ۰/۲، ۰/۸، ۱) یکسان هستند. برای ضرایب جبران (۰/۶) نیز بازده فازی دو روش اختلاف معنی‌داری با هم ندارند. با این حال، بازده فازی روش ورنرز برای ضرایب جبران (۰/۴) با بازده فازی روش ترابی و حسنی برای ضرایب جبران (۰/۲، ۰) یکسان است. سرمایه‌گذاران با توجه به نتایج حل دو روش برای مقادیر مختلف ضرایب جبران، باید یکی از دو مقادیر بازده فازی زیر را که در شکل ۳ ترسیم شده است، انتخاب کنند.

$$\tilde{R}_{۱} = (۰/۰۷۶, ۰/۱۶۲, ۰/۳۳۰, ۰/۳۳۱),\ \tilde{R}_{۲} = (۰/۱۴۳, ۰/۲۲۲, ۰/۴۳۸, ۰/۴۴۵)$$



شکل ۳. بازده فازی حاصل از حل مدل سبد سرمایه‌گذاری

برای تصمیم‌گیری برای انتخاب بازده فازی مناسب باید به سطح ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران توجه کرد. بر این اساس، برای سرمایه‌گذاران ریسک گریز بازده فازی $\tilde{R}_۱$ و برای سرمایه‌گذاران ریسک پذیر با توجه به امکان

کسب سود بالاتر بازده فازی $\tilde{R}_{۲}$ پیشنهاد می‌شود. سرمایه‌گذارانی که سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_{۱}$ را انتخاب می‌کنند در مقایسه با سرمایه‌گذارانی که سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_{۲}$ را انتخاب می‌کنند، به رغم امکان کسب متوسط بازدهی و بازدهی بالاتر از میانگین کم‌تر، امکان اینکه با بازدهی نامطلوب بیش‌تری مواجه شوند کم‌تر است. در مقابل، سرمایه‌گذارانی که سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_{۲}$ را انتخاب می‌کنند، می‌توانند از امکان کسب بازدهی بالاتری برخوردار باشند.

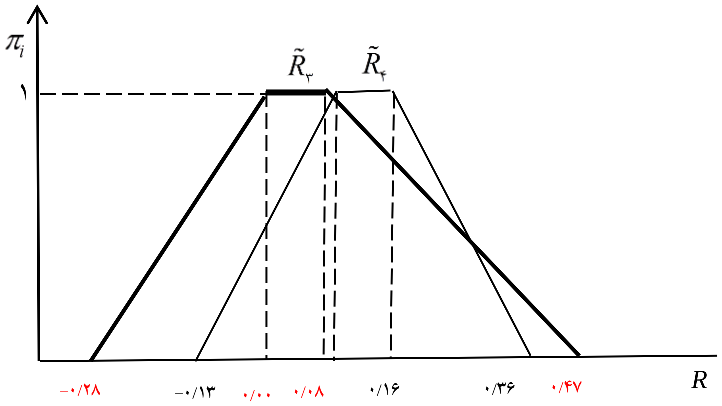
حال مساله را بر روی تعداد و نسبت مختلفی بر روی دارایی‌هایی که می‌توان بر روی آن‌ها سرمایه‌گذاری کرد در نظر می‌گیریم تا استراتژی‌های مختلف سرمایه‌گذاری را مورد بررسی قرار دهیم. بر این اساس، بازده فازی سبد سرمایه‌گذاری برای تعداد مختلف دارایی‌هایی که بر روی آن‌ها سرمایه‌گذاری می‌شود با استفاده از رویکرد ترابی و حسنی محاسبه و در جدول **۳** آورده شده است.

جدول ۳. بازده فازی سبد سهام برای استراتژی‌های مختلف مربوط به داده‌های مارکویتز

بدون محدودیت				$l_{۲}=۰/۰۶, l_{۴}=۰/۰۶۵, l_{۶}=۰/۰۵, u_{۳}=۰/۲۰, u_{۶}=۰/۳۵$				
$\underline{R}(x)$	$\bar{R}(x)$	$\alpha(x)$	$\tilde{R}_{۲}$	$\underline{R}(x)$	$\bar{R}(x)$	$\alpha(x)$	$\tilde{R}_{۲}$	N
۰/۰۱۸	۰/۱۳۶	۰/۲۱۱	۰/۳۹۲	۰/۰۹۰	۰/۱۶۴	۰/۲۲۲	۰/۱۹۲	۱
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۸۷	۰/۳۹۳	۲
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۸۹	۰/۲۶۷	۰/۴۳۳	۳
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۸۹	۰/۲۶۷	۰/۴۳۳	۴
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۸۹	۰/۲۶۷	۰/۴۳۳	۵
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۹۳	۰/۲۶۵	۰/۴۲۷	۶
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۹۳	۰/۲۶۵	۰/۴۲۷	۷
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۶۶	۰/۳۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۸۳	۰/۲۷۸	۰/۳۷۱	۸
۰/۰۰۲	۰/۰۸۲	۰/۲۸۷	۰/۳۹۳	۰/۰۰۰	۰/۰۹۵	۰/۲۳۶	۰/۲۷۵	۹

مشاهده می‌شود که شروط تنوع‌بخشی بیش‌تر به صورت محدودیت، سبد سهام پر ریسک‌تری را با سطح بازده بالاتری به همراه دارد. روشن است که سبدهای با تعداد دارایی (۲–۸) با محدودیت‌های حدود سرمایه‌گذاری بر سبدهای با تعداد دارایی (۲–۹) بدون محدودیت حدود سرمایه‌گذاری با توجه به پهنای راست بزرگ‌تر (امکان کسب سود بیش‌تر از میانگین) و پهنای سمت چپ و میانگین بازه برابر برابر برتری دارد؛ در واقع، با اعمال محدودیت بر روی نسبت‌های سرمایه‌گذاری، امکان کسب بازدهی بالاتر بدون تحمل ریسک اضافه برای این تعداد دارایی فراهم می‌شود. سرمایه‌گذاران با توجه به نتایج حل مدل، باید یکی از دو مقادیر بازده فازی زیر را که در شکل **۴** ترسیم شده است انتخاب کنند.

$$\tilde{R}_{۳}=(۰/۰۰۲,۰/۰۸۲,۰/۲۸۷,۰/۳۹۳),\ \tilde{R}_{۴}=(۰/۰۹۰,۰/۱۶۴,۰/۲۲۲,۰/۱۹۲)$$



شکل ٤. بازده فازی حاصل از حل مدل سبد سرمایه گذاری

سرمایه‌گذارانی که سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_۴$ را انتخاب می‌کنند در مقایسه با سرمایه‌گذارانی که سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_۳$ را انتخاب می‌کنند، به رغم امکان کسب بازدهی بالاتر از میانگین کم‌تر، امکان کسب متوسط بازدهی آن‌ها بیش‌تر و همچنین امکان اینکه با بازدهی نامطلوب بیش‌تری مواجه شوند کم‌تر است. با توجه به شکل تابع امکانی مربوط به بازدهی این دو انتخاب، پیشنهاد می‌شود سرمایه‌گذاران سبد سهام مربوط به بازدهی $\tilde{R}_۴$ را انتخاب کنند. این سبد سهام به رغم تفاوت ناچیز آن با سبد سهام با بازدهی $\tilde{R}_۳$ از نظر امکان کسب بازدهی‌های بالاتر از میانگین، از نظر متوسط بازدهی و امکان کسب بازدهی‌های نامطلوب وضعیت بهتری نسبت به $\tilde{R}_۳$ دارد.

برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، با استفاده از داده‌های مربوط به بازدهی سهام ۳۰ شرکت بورس اوراق بهادار تهران در سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵، مساله تحت مقادیر مختلف برای l_j، u_j و N نیز تحلیل و نتایج آن در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ٤. سبد سهام بهینه برای استراتژی های مختلف مربوط به داده های بورس تهران

$\gamma = ۰/۷$								
$l_j = ۰/۰۵, u_j = ۰/۲۵$				$l_j = ۰/۰۵, u_j = ۰/۲۰$				
$\underline{R}(x)$	$\bar{R}(x)$	$\alpha(x)$	$\tilde{R}_۴$	$\underline{R}(x)$	$\bar{R}(x)$	$\alpha(x)$	$\tilde{R}_۴$	N
Infeasible				Infeasible				۴<
۰/۱۱۱	۰/۱۹۳	۰/۲۸۰	۰/۴۴۵	Infeasible				۴
۰/۰۹۶	۰/۱۸۱	۰/۲۵۴	۰/۴۳۶	۰/۰۹۲	۰/۱۸۲	۰/۲۶۶	۰/۴۸۱	۵
۰/۰۹۶	۰/۱۸۱	۰/۲۵۴	۰/۴۳۶	۰/۰۹۴	۰/۱۸۰	۰/۲۵۷	۰/۴۳۲	۶
۰/۰۹۶	۰/۱۸۲	۰/۲۵۴	۰/۴۳۶	۰/۰۹۴	۰/۱۸۰	۰/۲۵۷	۰/۴۳۲	۷
۰/۰۹۶	۰/۱۸۰	۰/۲۵۴	۰/۴۳۵	۰/۰۹۴	۰/۱۸۰	۰/۲۵۷	۰/۴۳۲	۸
۰/۰۹۵	۰/۱۷۹	۰/۲۵۶	۰/۴۴۴	۰/۰۹۴	۰/۱۸۰	۰/۲۵۷	۰/۴۳۲	۹
۰/۰۹۴	۰/۱۸۰	۰/۲۵۷	۰/۴۳۴	۰/۰۹۶	۰/۱۸۵	۰/۲۶۲	۰/۴۲۷	۱۰
۰/۰۹۵	۰/۱۸۳	۰/۲۶۱	۰/۴۲۸	۰/۰۹۹	۰/۱۸۹	۰/۲۶۹	۰/۴۲۰	۱۱
۰/۰۹۴	۰/۱۸۱	۰/۲۶۲	۰/۴۲۷	۰/۰۹۷	۰/۱۸۸	۰/۲۶۹	۰/۴۱۹	۱۲
۰/۰۹۲	۰/۱۷۸	۰/۲۶۳	۰/۴۲۶	۰/۰۹۶	۰/۱۸۵	۰/۲۷۰	۰/۴۱۸	۱۳

۱۴	۰/۴۱۶	۰/۲۷۱	۰/۱۸۱	۰/۰۹۴	۰/۴۲۴	۰/۲۶۶	۰/۱۷۶	۰/۰۹۲
۱۵	۰/۴۱۳	۰/۲۷۵	۰/۱۷۸	۰/۰۹۳	۰/۴۲۵	۰/۲۷۰	۰/۱۷۴	۰/۰۹۱
۱۶	۰/۴۱۰	۰/۲۷۷	۰/۱۷۴	۰/۰۹۱	۰/۴۲۵	۰/۲۷۵	۰/۱۷۲	۰/۰۹۰
۱۷	۰/۴۰۶	۰/۲۸۳	۰/۱۷۵	۰/۰۹۱	۰/۴۰۷	۰/۲۸۳	۰/۱۷۵	۰/۰۹۱
۱۸	۰/۳۹۵	۰/۲۹۴	۰/۱۷۸	۰/۰۹۲	۰/۳۹۴	۰/۲۹۴	۰/۱۷۸	۰/۰۹۲
۱۹	۰/۳۸۴	۰/۳۰۴	۰/۱۸۱	۰/۰۹۳	۰/۳۸۴	۰/۳۰۴	۰/۱۸۱	۰/۰۹۳
۲۰	۰/۳۷۲	۰/۳۱۴	۰/۱۸۷	۰/۰۹۳	۰/۳۷۲	۰/۳۱۴	۰/۱۸۷	۰/۰۹۳
>۲۰	Infeasible				Infeasible			

نتایج حل مدل نشان می‌دهد که با افزایش تعداد دارایی‌ها پهنای چپ و راست بازده فازی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. در واقع، با افزایش تعداد دارایی‌ها مقدار واریانس نامطلوب (امکان کسب بازدهی پایین‌تر) افزایش و مقدار چولگی (امکان کسب بازدهی بیش‌تر از میانگین) کاهش می‌یابد. این در حالی است که با افزایش تعداد دارایی‌ها میانگین بازدهی فازی تفاوت معنی‌داری پیدا نمی‌کند. در نتیجه برای کسب حداکثر بازدهی و گریز از ریسک بازدهی پایین باید سبدی با تعداد پایین دارایی در حدود ۴ و ۵ سهم برای سرمایه‌گذاری انتخاب کرد. در واقع، با انتخاب ۴ یا ۵ دارایی از میان ۳۰ سهم با سطح بازدهی و ریسک مطلوب نسبت به دیگر سهم‌ها، می‌توان سبدی مناسب برای سرمایه‌گذاری در اختیار داشت. همچنین مشاهده می‌شود که اعمال محدودیت ۲۵ درصد به جای ۲۰ درصد بر روی حداکثر نسبتی که می‌توان بر روی هر یک از دارایی‌ها سرمایه-گذاری کرد، امکان کسب بازدهی بیش‌تر و ریسک کم‌تر فراهم می‌شود. براساس نتایج این تحقیق، سرمایه گذاران می توانند با در نظر گرفتن سطح ریسک پذیری خود به انتخاب سبد مناسب بپردازند. در واقع، سرمایه‌گذارن با انتخاب یک تعداد و درصد بهینه‌ای از میان سهام شرکت‌های مختلف بورس اوراق بهادار تهران می‌توانند در عین کسب بازدهی قابل قبول، ریسک سبد سهام خود را نیز مدیریت کنند.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

چالش اصلی در مدل‌سازی ریاضی مساله انتخاب سبد سهام به‌عنوان یکی از مسایل جذاب در زمینه مدیریت سرمایه‌گذاری، کنترل بازده و ریسک سبد سهام در فضای عدم اطمینان حاکم بر آن است. در مدل برنامه‌ریزی سبد سهام فازی پیشنهادی، عدم اطمینان بازدهی دارایی‌های سبد سهام با استفاده از اعداد فازی LR بررسی می‌شوند؛ اهداف متوسط بازدهی، ریسک کسب سود نامطلوب و امکان کسب سود بالاتر از میانگین با کمک دو رویکرد برنامه‌ریزی فازی بهینه می‌شوند. این مدل مطابق با تئوری سبد سرمایه‌گذاری است که اهداف حداکثرسازی میانگین نرخ برگشتی، حداقل‌سازی واریانس نامطلوب و حداکثرسازی چولگی راست را مورد بررسی قرار می‌دهد؛ در مدل پیشنهادی برخلاف مدل‌های امکانی دیگر که در ادبیات تحقیق به آن‌ها اشاره شد، چولگی نیز به صورت یک هدف خطی بهینه می‌شود. در این مدل، در مورد استراتژی بهینه سرمایه‌گذاری برای تشکیل سبد سهام مناسب با در نظر گرفتن توازن بین حداکثرسازی بازدهی و حداقل‌سازی ریسک سرمایه‌گذاری

با توجه به بازده فازی تصمیم‌گیری می‌شود. محدودیت در انتخاب تعداد سهام و محدودیت برای حد بالا و پایین نسبت هر سهم در سبد سرمایه‌گذاری از محدودیت‌های کاربردی مدل هستند که برای کنترل ریسک غیرسیستماتیک به مدل اضافه شده‌اند. نتایج حل مدل نشان می‌دهد که این مدل قادر است با انتخاب مقدار مناسب برای نسبت هر سهم، تعداد سهام موجود در سبد و ضریب جبران، سبد سهام مناسب را به سرمایه‌گذاران ارایه دهد به نحوی که بازده، ریسک و چولگی همزمان بهینه شوند.

در تحقیقات آتی می‌توان مدل پیشنهادی را برای مدل‌های بزرگ‌تر و چند دوره‌ای سبد سهام مورد استفاده و بررسی قرار داد. با توجه به وجود تحقیقات کم در حوزه برنامه‌ریزی فازی در این زمینه، می‌توان از دیگر رویکردهای برنامه‌ریزی فازی برای برنامه‌ریزی ریاضی سبد سهام استفاده کرد. همچنین رویکرد برنامه‌ریزی استوار از دیگر روش‌های بهینه‌سازی بازده و ریسک است که می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

منابع

[۳۲] شریفی سلیم علیرضا، مومنی منصور، مدرس یزدی محمد، و راعی رضا.، (۱۳۹۴). برنامه ریزی تصادفی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام، نشریه مدیریت صنعتی، ۷ (۳)، ۴۸۹-۵۱۰.

[۳۳] سلیمی فرد، خداکرم، حیدری، مرادی، و مغدانی.، (۱۳۹۵). گزینش سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری با به کارگیری مدل توسعه‌یافتهٔ چندهدفه مارکویتز و الگوریتم جست وجوی هارمونی، فصلنامه علمی-پژوهشی تحقیقات مالی، ۱۸(۳)، ۴۸۳-۵۰۴.

[۳۴] نوری، محمدی، و عمران، (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از برنامه‌ریزی توافقی با محدودیت شانسی. نشریه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۹(۳۵)، ۲۲۱-۲۴۱.

[1] Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, *36*(3), 5058-5063.

[2] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, *7*(1), 77-91.

[3] Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). Robust portfolio optimization and management. John Wiley & Sons.

[4] Lacagnina, V., & Pecorella, A. (2006). A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem. Fuzzy sets and systems, 157(10), 1317-1327.

[5] Huang, X. (2006). Fuzzy chance-constrained portfolio selection. Applied mathematics and computation, 177(2), 500-507.

[6] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Information and control, 8(3), 338-353.

[7] Watada, J. (1997). Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making. Tatra Mountains Mathematical Publication, 13(4), 219-248.

[8] León, T., Liern, V., & Vercher, E. (2002). Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach. European Journal of Operational Research, 139(1), 178-189.

[9] Zhang, W. G., & Wang, Y. L. (2005, June). Portfolio selection: Possibilistic mean-variance model and possibilistic efficient frontier. In International Conference on Algorithmic Applications in Management (pp. 203-213). Springer Berlin Heidelberg.

[10] Farrokh, M., Azar, A., Jandaghi, G., & Ahmadi, E. (2018). A novel robust fuzzy stochastic programming for closed loop supply chain network design under hybrid uncertainty. Fuzzy Sets and Systems, 341, 69-91.

[11] Zhang, P., & Zhang, W. G. (2014). Multiperiod mean absolute deviation fuzzy portfolio selection model with risk control and cardinality constraints. Fuzzy Sets and Systems, 255, 74-91.

[12] Zhou, W., & Xu, Z. (2018). Portfolio selection and risk investment under the hesitant fuzzy environment. Knowledge-Based Systems, 144, 21-31.

[13] Mulvey, J. M., Pauling, W. R., & Madey, R. E. (2003). Advantages of multiperiod portfolio models. The Journal of Portfolio Management, 29(2), 35-45.

[14] Yan, W., Miao, R., & Li, S. (2007). Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution. Applied Mathematics and Computation, 194(1), 128-134.

[15] Pınar, M. Ç. (2007). Robust scenario optimization based on downside-risk measure for multi-period portfolio selection. OR Spectrum, 29(2), 295-309.

[16] Chang, T. J., Yang, S. C., & Chang, K. J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. Expert Systems with Applications, 36(7), 10529-10537.

[17] Hao, F. F., & Liu, Y. K. (2009). Mean-variance models for portfolio selection with fuzzy random returns. Journal of Applied Mathematics and Computing, 30(1), 9-38.

[18] Zhang, W. G., Liu, Y. J., & Xu, W. J. (2012). A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs. European Journal of Operational Research, 222(2), 341-349.

[19] Tanaka, H., & Guo, P. (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. European Journal of operational research, 114(1), 115-126.

[20] Inuiguchi, M., & Tanino, T. (2000). Portfolio selection under independent possibilistic information. Fuzzy sets and systems, 115(1), 83-92.

[21] Lai, K. K., Wang, S. Y., Xu, J. P., Zhu, S. S., & Fang, Y. (2002). A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10(6), 698-704.

[22] Tanaka, H., & Guo, P. (1999). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. European Journal of operational research, 114(1), 115-126.

[23] Wang, S., & Zhu, S. (2002). On fuzzy portfolio selection problems. Fuzzy Optimization and Decision Making, 1(4), 361-377.

[24] Giove, S., Funari, S., & Nardelli, C. (2006). An interval portfolio selection problem based on regret function. European Journal of Operational Research, 170(1), 253-264.

[25] Ida, M. (2004). Solutions for the portfolio selection problem with interval and fuzzy coefficients. Reliable Computing, 10(5), 389-400.

[26] Carlsson, C., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. Fuzzy sets and systems, 131(1), 13-21.

[27] Saborido, R., Ruiz, A. B., Bermúdez, J. D., Vercher, E., & Luque, M. (2016). Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection. Applied Soft Computing, 39, 48-63.

[28] Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhao, X. J. (2016). Fuzzy multi-period portfolio selection model with discounted transaction costs. Soft Computing, 1-17.

[29] Guo, S., Yu, L., Li, X., & Kar, S. (2016). Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons. European Journal of Operational Research, 254(3), 1026-1035.

[30] Qin, Z. (2017). Random fuzzy mean-absolute deviation models for portfolio optimization problem with hybrid uncertainty. Applied Soft Computing, 56, 597-603.

[31] Liu, Y. J., & Zhang, W. G. (2017). Fuzzy portfolio selection model with real features and different decision behaviors. Fuzzy Optimization and Decision Making, 1-20.

[35] Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. European journal of operational research, 48(2), 219-225.

[36] Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 1(1), 3-28.

[37] Lai, Y. J., & Hwang, C. L. (1992). A new approach to some possibilistic linear programming problems. Fuzzy sets and systems, 49(2), 121-133.

[38] Werners, B. (1987). An interactive fuzzy programming system. Fuzzy sets and systems, 23(1), 131-147.

[39] Torabi, S. A., & Hassini, E. (2008). An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning. Fuzzy Sets and Systems, 159(2), 193-214.

[40] Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,Wiley, NewYork.