

مساله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای ۲- میانه پشتیبان با تغییر در مختصات نقاط

مرتضی نظری^۱، جعفر فتحعلی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۱۲ فروردین ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۵ مهر ۱۳۹۶

چکیده

ما در این مقاله، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مساله مکانیابی ۲- میانه پشتیبان همراه با تغییر در مختصات نقاط را در فضای R^k مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مساله فرض بر این است که تعدادی نقاط داده شده‌اند و می‌خواهیم با تغییر در مختصات نقاط، دو نقطه از پیش تعیین شده را با صرف یک مقدار بودجه مشخص و محدود، تبدیل به ۲- میانه پشتیبان نماییم. ابتدا یک مدل ریاضی برای این مساله ارائه کرده و سپس با استفاده از الگوریتم فراابتکاری فرهنگی به حل حالت خاصی از آن می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: مکانیابی، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای، ۲- میانه پشتیبان، فراابتکاری.

۱ مقدمه

مسایل بهینه‌سازی مرتبط با مفاهیم مکانیابی به دلیل اینکه اولاً، به‌طور مداوم در تمام سطوح برنامه‌ریزی‌های بشری از صنعت و انبارداری تا نهادهای دولتی حضور داشته‌اند. و دوماً، به دلیل اینکه تصمیم‌گیری‌های مکانی ماهیت استراتژیک دارند؛ یعنی اغلب آن‌ها با منابع عظیمی از سرمایه سروکار دارند و تأثیرات اقتصادی آن‌ها بلند مدت است، توجه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده‌اند؛ بنابراین امروزه مسایل مکانیابی به دلیل کاربردها و اهمیت فراوان آن‌ها چه در زمینه‌های عملی و چه در زمینه‌های تئوری مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

در یک مساله مکانیابی کلاسیک فرض بر این است که تعدادی مشتری (سرویس گیرنده، نقطه ثابت، نقطه تقاضا) موجود می‌باشند و می‌خواهیم بهترین مکان برای استقرار سرویس دهندگان جدید را به گونه‌ای بیابیم که هزینه حمل و نقل، تأثیرات محیطی نامطلوب، زمان سرویس‌دهی، سود و غیره بسته به شرایط مساله بهینه شوند. از

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: fathali@shahroodut.ac.ir

جمله مسایل مهم مکانیابی که بسیار پرکاربرد نیز هستند مسایل p - میانه می‌باشند. در یک مساله p - میانه n نقطه X_i ، به ازای $i = 1, \dots, n$ داده شده است. هر یک از این نقاط دارای یک وزن w_i می‌باشند. در این نوع مسایل به دنبال پیدا کردن یک مجموعه شامل p نقطه (p - میانه) مانند $\Lambda = \{v_1, \dots, v_p\}$ هستیم به طوری که مجموع وزنی این p نقطه تا کل نقاط داده شده کمینه گردد. به عبارت دیگر به دنبال کمینه کردن تابع هدف زیر می‌باشیم:

$$\sum_{i=1}^n \left(w_i \min_{1 \leq j \leq p} \{d(X_i, v_j)\} \right). \quad (1)$$

که $d(X_i, v_j)$ فاصله بین نقاط X_i و v_j می‌باشد.

بنابراین در یک مساله مکانیابی کلاسیک با فرض معلوم بودن پارامترهای مساله مانند هزینه‌ها، ظرفیت‌ها، فاصله‌ها و ... به دنبال پیدا کردن یک جواب بهین (مکان‌های بهینه برای سرویس دهنده‌ها) می‌باشیم؛ اما بر خلاف مسایل بهینه‌سازی کلاسیک در یک مساله معکوس مکانیابی، یک جواب شدنی مساله تحت مطالعه مفروض بوده (انتخاب شده) و به دنبال تعیین مقادیری جدید برای پارامترهای تاثیرگذار مساله به ارزان‌ترین روش ممکن هستیم، به طوری که جواب شدنی مفروض با پارامترهای جدید بهینه گشته یا بهبود یابد. این گونه از مسایل را بسته به اینکه به دنبال بهینه شدن سرویس دهنده‌ها با کمترین هزینه ممکن و یا بهبود سرویس دهنده‌ها با استفاده از یک بودجه محدود باشیم را به ترتیب، مسایل معکوس نوع حداقل هزینه (Inverse Problem) و مسایل معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای (Reverse Problem) می‌نامند. باید توجه داشت که در یک مساله مکانیابی معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای (بر خلاف یک مساله معکوس نوع حداقل هزینه) هدف این نیست که یک جواب مفروض را تبدیل به یک جواب بهینه نماییم؛ بلکه می‌خواهیم مقدار تابع هدف مساله کلاسیک را با توجه به محدودیت بودجه تا حد ممکن بهبود دهیم. تمرکز این مقاله بر روی مسایل معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای است.

به عنوان مثالی از یک مساله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای، فرض کنید یک شبکه ارتباطی و تعدادی سرویس دهنده (مانند مراکز خرید) و تعدادی مشتری مفروض باشند. این مراکز خرید نیز از قبل در یک ناحیه مستقر (انتخاب شده) شده باشند. با فرض اینکه امکان جابه جایی مجدد برای این مراکز خرید وجود ندارد و با توجه به استقرار این مراکز خرید از قبل و از دست دادن کارایی خود به دلیل قرار نگرفتن در مکان مناسب، می‌خواهیم با استفاده از یک بودجه محدود و مشخص و با تغییر در پارامترهایی همچون طول مسیرهای منتهی به این مراکز و یا با اعمال محدودیت‌های ترافیکی و ... تا حد امکان مجموع فواصل طی شده مشتریان به این مراکز خرید را تا حد امکان کمینه کنیم. به عبارت دیگر گرافی را فرض کنید که دو راس دلخواه آن به عنوان مراکز خرید و مابقی رئوس به عنوان مشتری در نظر گرفته شود. و فاصله هر مشتری تا نزدیک ترین مرکز خرید به عنوان طول مسیر هر راس منتهی به نزدیک ترین مرکز خرید در این گراف در نظر گرفته شود. از آنجایی که دو راس دلخواهی که به عنوان مراکز خرید در نظر گرفته ایم بهینه نیستند؛ یعنی مجموع فواصل مشتریانی که از این دو مرکز سرویس می‌گیرد کمینه نیست، می‌خواهیم با یک بودجه محدود و با تغییر در طول یال‌های گراف این دو

راس را تا حد امکان به بهینه (۲- میانه) شدن نزدیک کنیم. مطالعات بسیاری در زمینه مسایل مکانیابی معکوس نوع حداقل هزینه و نوع محدودیت بودجه‌ای انجام شده است که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

در سال ۲۰۰۴ بورکارد و همکاران [۱]، مساله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییرات وزن مربوط به نقاط، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ابتدا مساله p -میانه معکوس گسسته را در فضای متریک (X, d) ، به صورت یک مدل ریاضی برنامه‌ریزی خطی فرمولبندی کردند و سپس به این نتیجه دست یافتند که مساله P -میانه معکوس گسسته که در آن مشتریان ممکن است دارای هر وزن حقیقی باشند و با این شرط که p ثابت بوده و به عنوان یک پارامتر ورودی نباشد در زمان چند جمله‌ای قابل حل است. آن‌ها در ادامه مساله ۱- میانه معکوس را روی درخت‌ها مورد بررسی قرار دادند و برای آن یک الگوریتم با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ ، که n تعداد رئوس درخت می‌باشد را ارائه کردند.

در سال ۲۰۰۸ گلوی [۲]، مساله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییرات وزن راسی روی درخت که قبلاً توسط بورکارد و همکارانش برای آن الگوریتم $O(n \log n)$ ارائه شده بود، به صورت یک مدل کوله پشتی فرمولبندی کرد و نشان داد این مساله در زمان خطی قابل حل می‌باشد. در سال ۲۰۱۵ سپاسیان و رهبرنیا [۳]، مساله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییرات هم زمان وزن راسی و طول یالی روی درخت در نظر گرفته و یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ، که n تعداد رئوس درخت می‌باشد برای آن ارائه دادند. همچنین باروقی و همکاران [۴]، نشان دادند که مساله p -میانه معکوس نوع حداقل هزینه با تغییرات طول یالی روی شبکه‌های کلی، یک مساله NP-سخت است. آن‌ها شبکه‌های خاصی چون درخت‌ها و گراف‌های ستاره‌دار را در نظر گرفته و الگوریتم‌هایی از مرتبه چند جمله‌ای برای آن‌ها ارائه دادند. در سال ۲۰۱۰ نیز باروقی و همکاران [۵]، مساله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه را با تغییر مختصات نقطه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله ثابت شد که اگر فواصل بین نقاط با نرم خطی اندازه‌گیری شود این مساله NP-سخت است. آن‌ها ثابت نمودند که اگر وزن همه رئوس یکسان باشد این مساله به d مساله کوله‌پشتی کاهش می‌یابد و در نتیجه در زمان $O(nd)$ ، که n تعداد رئوس درخت می‌باشد قابل حل است.

برمن و همکاران [۶]، برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ مساله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای را روی درخت مورد مطالعه قرار دادند و برای حل آن یک الگوریتم خطی به دست آوردند. در سال ۲۰۰۶ بورکارد و همکاران [۷]، ثابت کردند که یک مساله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای با تغییرات طولی یال روی گراف‌های عمومی NP-سخت است. همچنین آن‌ها برای دور گراف‌ها الگوریتم خطی ارائه دادند. مساله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی درخت‌ها توسط بورکارد و همکارانش در مقاله [۸] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها برای حل آن یک الگوریتم از مرتبه $O(n \log n)$ ، که n تعداد رئوس درخت بود را ارائه کردند.

در سال ۲۰۱۰ نیز ونگ و همکاران [۹]، مساله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی دورها را به مساله ۳- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی یک مسیر تبدیل کردند و از این طریق نشان دادند که این مساله در زمان چند جمله‌ای قابل حل می‌باشد. همچنین مساله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای با یک

محدودیت اضافه روی درخت‌ها توسط یانگ و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۲ مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله ثابت شد که این مدل قابل تقسیم به دو زیر مساله معادل بوده و این زیر مساله‌ها را می‌توان به ترتیب توسط الگوریتم‌های حداقل برش و حریصانه حل نمود.

در سال‌های اخیر نیز معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مساله ۱- مرکز روی درخت‌های وزن دار توسط کین [۱۱]، در سال ۲۰۱۶ مورد مطالعه قرار گرفت و برای آن یک الگوریتم از مرتبه زمانی $O(n^2)$ ، که n تعداد رئوس درخت می‌باشد را ارائه داد.

تاکنون معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مساله ۲- میانه در فضای پیوسته R^k و با روش تغییر در مختصات نقاط، مورد بررسی قرار نگرفته است. ما در این مقاله ابتدا یک حالت کلی‌تری از این مساله که مساله مکانیابی معکوس ۲- میانه پشتیبان نامیده می‌شود را مورد بررسی قرار داده و یک مدل ریاضی برای آن ارائه می‌دهیم. سپس در حالت خاصی که این مساله تبدیل به یک مساله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای ۲- میانه می‌شود با استفاده از ترکیبی جدید از الگوریتم‌های فراابتکاری فرهنگی و ژنتیک به حل آن می‌پردازیم. همچنین برای پارامترهای مختلف مساله به خصوص بودجه، یک تحلیل ریاضی به وسیله الگوریتم‌های بازگشتی ارائه کرده‌ایم.

۲ مساله ۲- میانه پشتیبان معکوس

مساله ۲- میانه حالت خاصی از مساله p - میانه است که در آن جفت نقاط $\{m_1, m_2\} \in R^k$ ، ۲- میانه هستند اگر و تنها اگر:

$$\sum_{i=1}^n w_i \min_{l=1,2} \{d(m_l, X_i)\} = \min \left(\sum_{i=1}^n w_i \min_{t=1,2} \{d(Y_t, X_i)\} \right); \quad \forall Y_t \mid_{t=1,2} \in R^k \quad (2)$$

که $d(X_i, X_j)$ ، فاصله بین دو نقطه X_i و X_j می‌باشد. این فاصله می‌تواند با هر نرمی مثل نرم‌های اقلیدسی، چیشف و ... تعریف گردد.

حالت کلی‌تری از مساله ۲- میانه وجود دارد و آن مساله ۲- میانه پشتیبان است. در یک مساله مکانیابی ۲- میانه پشتیبان هر سرویس دهنده ممکن است با یک احتمالی شکست بخورد. با این فرض که سرویس دهنده‌ها نمی‌توانند به‌طور همزمان شکست بخورند سرویس دهنده دیگر مسئولیت سرویس دهی را بر عهده می‌گیرد. فرض کنید ρ_1 و ρ_2 احتمال شکست دو سرویس دهنده در مساله ۲- میانه پشتیبان باشند. جواب مساله با یک زوج نقطه $\{m_1, m_2\} \in R^k$ نشان داده می‌شود که m_1 ، مکان سرویس دهنده با احتمال شکست ρ_1 ، و m_2 ، مکان سرویس دهنده با احتمال شکست ρ_2 می‌باشد. در این مقاله فرض شده است که احتمال شکست دو سرویس دهنده با هم برابر هستند؛ یعنی $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

هدف مساله ۲- میانه پشتیبان کمینه کردن مجموع فاصله وزنی از تمام نقاط (مشری‌ها) به مجموعه سرویس دهنده‌های در حال کار می‌باشد. به عبارت دیگر به دنبال کمینه کردن تابع هدف زیر هستیم:

$$(1-\rho) \sum_{X_i \in \Gamma} w(X_i) d(X_i, \{m_1, m_r\}) + \rho \left(\sum_{X_i \in \Gamma} w(X_i) d(X_i, m_r) + \sum_{X_i \in \Gamma} w(X_i) d(X_i, m_1) \right). \quad (3)$$

که Γ ، مجموعه کل نقاط داده شده می‌باشد.

مسایل مکانیابی ۲- میانه و ۲- مرکز پشتیبان اولین بار توسط وانگ و همکاران [۱۲]، مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها به ترتیب الگوریتم‌هایی با زمان‌های $O(n \log n)$ و $O(n)$ ، که n تعداد رئوس درخت می‌باشد برای این دو مساله ارایه کردند. چنگ و همکاران [۱۳]، مساله مکانیابی ۲- میانه پشتیبان روی گراف‌های بلوکی را در زمان $O(n \log n + m)$ که n ، تعداد رئوس گراف و m ، تعداد بلوک‌های گراف است حل کردند. مساله مکانیابی چند وسیله‌ای پشتیبان در صفحه توسط فتحعلی [۱۴]، مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتمی تکراری برای حل آن ارایه شده است. اخیراً مدبر و همکاران [۱۵]، به بررسی مساله ۲- مرکز ناخوشایند پشتیبان روی درخت‌ها پرداخته و الگوریتم‌هایی چندجمله‌ای برای حل آن ارایه نموده‌اند.

در حالت معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای می‌خواهیم با تغییر در مختصات نقاط X_i ، دو نقطه دلخواه (از پیش تعیین شده) m_1 و m_r را با استفاده از یک بودجه محدود تا حد امکان به حالت بهینه نزدیک کنیم. فرض کنید تغییر هر واحد مختصات نقاط $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$ ، هزینه $C_i = (C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik})$ را بر ما تحمیل کند. برای هر C_{it} ، $t=1, 2, \dots, k$ ، هزینه متحمل شده از تغییر مختص t -ام نقطه X_i می‌باشد. به‌طور مشابه بردارهای $P_i^- = (p_{i1}^-, p_{i2}^-, \dots, p_{ik}^-)$ و $P_i^+ = (p_{i1}^+, p_{i2}^+, \dots, p_{ik}^+)$ را به ترتیب، میزان افزایش و کاهش مختصات نقاط X_i تعریف می‌کنیم. حال مساله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای (Backup Reverse 2-median Problem: (BR2MP)) را می‌توان به صورت زیر مدل بندی کرد:

$$\Omega_1: \min \left((1-\rho) \sum_{i=1}^n (w_i \min_{t=1, r} \{d(\hat{X}_i, m_t)\}) + \rho \sum_{i=1}^n (w_i d(\hat{X}_i, m_1)) + \rho \sum_{i=1}^n (w_i d(\hat{X}_i, m_r)) \right) \quad (4)$$

s.t.

$$\hat{X}_i = X_i + P_i^+ - P_i^-, \quad \forall i=1, \dots, n. \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n f_d(P_i^+, P_i^-) \leq B, \quad (6)$$

$$P_i^+, P_i^- \geq 0, \quad \forall i=1, \dots, n. \quad (7)$$

که $f_d(P_i^+, P_i^-)$ تابع هزینه ناشی از تغییر مختصات نقاط می‌باشد و به صورت:

$$f_d(P_i^+, P_i^-) = C_i \cdot P_i^+ + C_i \cdot P_i^- \quad (8)$$

تعریف می‌گردد. B ، بودجه مورد نظر برای تغییرات در مختصات نقاط می‌باشد. در این مقاله جهت سادگی مقادیر C_i را برای هر $i=1, 2, \dots, n$ ، برابر با یک مقدار ثابت مثبتی همچون C در نظر گرفته‌ایم؛ بنابراین می‌توان محدودیت (۶) را به صورت زیر نیز بازنویسی نمود:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_{ij}^+ + p_{ij}^- \leq \frac{B}{C} = \beta. \quad (9)$$

مدل برنامه‌ریزی بالا با تابع هدف (۴) و محدودیت‌های (۵) تا (۷)، یک مساله بهینه‌سازی غیر خطی می‌باشد.

۲-۱ مساله ۲- میانه پشتیبان معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای در صفحه با نرم l_p

مدل Ω_1 را در فضای R^2 ، و با نرم l_p که $p > 1$ می‌باشد، به صورت زیر مدل بندی می‌گردد:

Ω_1 :

$$\min \left((1-\rho) \sum_{i=1}^n (w_i \min\{d^{l_p}(\hat{X}_i, m_i)\}) + \rho \sum_{i=1}^n (w_i d^{l_p}(\hat{X}_i, m_1)) + \rho \sum_{i=1}^n (w_i d^{l_p}(\hat{X}_i, m_r)) \right) \quad (10)$$

s.t.

$$\hat{X}_i = X_i + P_i^+ - P_i^- \quad \forall i=1, \dots, n, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n f_{l_p}(P_i^+, P_i^-) \leq B, \quad (12)$$

$$P_i^+, P_i^- \geq 0. \quad \forall i=1, \dots, n, \quad (13)$$

تابع هدف (۱۰) یک تابع غیرخطی است.

اگر برای هر جفت راس مانند $\{m_1, m_r\}$ تعریف کنیم:

$$\prod(m_1, m_r) = (I_1, I_r). \quad (14)$$

به طوری که:

$$I_1 = \{i \mid d(X_i, m_1) \leq d(X_i, m_r)\}. \quad (15)$$

و

$$I_r = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_1. \quad (16)$$

آنگاه با توجه به مجموعه‌های I_1 و I_r ، مدل مساله Ω_1 را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

Ω_1 :

$$\min f(\zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_{1r}, \dots, \zeta_{nr}) =$$

$$(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1-\rho) \sum_{i \in I_r} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_r|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_r} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_r} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_r|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (17)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n (\zeta_{i1} + \zeta_{ir}) \leq \beta, \quad (18)$$

$$\zeta_{ir}, \zeta_{i1} \in \mathbb{R}; \quad \forall i=1, \dots, n. \quad (19)$$

به طوری که $\xi_i = (\zeta_{i1}, \zeta_{ir})$ ، میزان تغییرات مختصات نقاط $X_i = (x_{i1}, x_{ir})$ می‌باشد. حال دو لم زیر را

می‌توان برای مدل فوق بیان کرد.

لم ۱: تابع هدف مساله Ω_1 محدب است.

اثبات: قرار می‌دهیم $(s_1, s_r, s_p, s_f) \equiv S = (s_1, s_r, s_p, s_f) = (s_1, s_r, s_p, s_f)$. فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و

$$\begin{aligned} f(S) &= (|s_1 - s_r|^p + |s_r - s_f|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ باشد. نشان می‌دهیم } f(S) \text{ محدب است. داریم:} \\ f(\lambda S' + (1-\lambda)S'') &= \\ &= \left[|(\lambda s'_1 + (1-\lambda)s''_1) - (\lambda s'_r + (1-\lambda)s''_r)|^p + |(\lambda s'_r + (1-\lambda)s''_r) - (\lambda s'_f + (1-\lambda)s''_f)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[|(\lambda(s'_1 - s'_r) + (1-\lambda)(s''_1 - s''_r))|^p + |(\lambda(s'_r - s'_f) + (1-\lambda)(s''_r - s''_f))|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[|\lambda(s'_1 - s'_r)|^p + |\lambda(s'_r - s'_f)|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[|(1-\lambda)(s''_1 - s''_r)|^p + |(1-\lambda)(s''_r - s''_f)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda \left(|s'_1 - s'_r|^p + |s'_r - s'_f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1-\lambda) \left(|s''_1 - s''_r|^p + |s''_r - s''_f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda f(S') + (1-\lambda)f(S'') \end{aligned}$$

بنابراین تابع $f(S) = (|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_r|^p)^{\frac{1}{p}}$ محدب است؛ لذا با توجه به مثبت بودن ضرایب w_i و ρ ، و با توجه به اینکه جمع تعداد شمارا تابع محدب، محدب است می‌توان نتیجه گرفت که عبارت $(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(|x_i + \zeta_{i1} - a_1|^p + |y_i + \zeta_{ir} - b_r|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ به‌طور مشابه می‌توان ثابت نمود که قسمت‌های دیگر تابع هدف نیز محدب می‌باشند؛ بنابراین با توجه به اینکه جمع چند تابع محدب، محدب می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت که تابع هدف مساله Ω_3 نیز محدب است.

لم ۲: مشتقات تابع هدف مساله Ω_3 ، در بعضی از نقاط، تعریف نشده است.

اثبات: مشتقات تابع هدف در نقاطی که مخرج آن‌ها صفر می‌گردد، تعریف نشده هستند.

با توجه به لم (۲)، نقاط ناپیوستگی گرادین تابع هدف مساله Ω_3 ، نقاطی هستند که مخرج مشتقات جزئی صفر می‌گردند. برای از بین بردن نقاط ناپیوستگی مشتقات جزئی تابع هدف مساله Ω_3 ، می‌توان مقدار ϵ را که یک عدد کوچک و مثبت است به رابطه (۱۷) اضافه نمود این امر باعث می‌گردد تا مخرج مشتقات جزئی رابطه (۱۷)، به هیچ عنوان صفر نگردند و مشتقات جزئی آن همواره پیوسته و موجود باشند؛ بنابراین تقریبی از مساله Ω_3 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Omega_3: \\ \min f_h(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{n1}, \zeta_{1r}, \dots, \zeta_{nr}) = \\ (1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} + (1-\rho) \sum_{i \in I_r} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_r} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_r} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (20)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n (\zeta_{i1} + \zeta_{ir}) \leq \beta, \quad (21)$$

$$\zeta_{ir}, \zeta_{ir} \in \mathbb{R}; \forall i=1, \dots, n. \quad (\text{BR+MPH}) \quad (22)$$

بنابراین وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ ، مقدار تابع هدف مساله Ω_ϵ (BR2MPH)، با مقدار تابع هدف مساله Ω_ϵ (BR2MP) برابر می‌شود. این موضوع را می‌توان در لم (۳) مشاهده نمود.

لم ۳: اگر $\epsilon \rightarrow 0$ ، خطای حاصل از اضافه کردن مقدار ϵ به تابع هدف مساله Ω_ϵ برابر با صفر است.

$$\max \{f_h(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{n_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{n_2}) - f(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{n_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{n_2})\} \leq M_\epsilon = (1 + \rho) \epsilon^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \quad (23)$$

اثبات: فرض کنید $s_i = (x_i + \zeta_{i_1} - a_i)$ ، $s_i = (y_i + \zeta_{i_2} - b_i)$ و $s_i = \epsilon^{\frac{1}{p}}$ باشد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} &= \left((s_i^r + s_i^r)^{\frac{p}{r}} + (s_i^r + s_i^r)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\left((s_i + s_i)^r \right)^{\frac{p}{r}} + \left((s_i + s_i)^r \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} = \left((s_i + s_i)^p + (s_i + s_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

همچنین با استفاده از نامساوی مینکوفسکی می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \left((s_i + s_i)^p + (s_i + s_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(s_i^p + s_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(s_i^p + s_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(s_i^p + s_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon^{\frac{1}{p}} \\ &= \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^p + (y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \epsilon^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^p + (y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon^{\frac{1}{p}}$$

یعنی:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_i)^p + (y_i + \zeta_{i_2} - b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ \leq \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{i \in I_1} w_i \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان این اثبات را برای قسمت‌های دیگر تابع هدف (۱۷) نیز بیان کرد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f_h(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{n_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{n_2}) - f(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{n_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{n_2}) &\leq \\ (1 - \rho) \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{i \in I_1} w_i + (1 - \rho) \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{i \in I_2} w_i + \epsilon^{\frac{1}{p}} \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i + \epsilon^{\frac{1}{p}} \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \\ &= \epsilon^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I_1} w_i + \sum_{i \in I_2} w_i \right) = \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i \end{aligned}$$

در ادامه مساله Ω_ϵ را در حالت خاصی که بودجه مورد نظر به اندازه کافی بزرگ باشد، تا بتوان به هر اندازه

دلخواه نقاط را به سرویس دهنده‌ها نزدیک نمود (یعنی، $\beta \rightarrow \infty$)، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

وقتی بودجه مورد نظر به اندازه کافی بزرگ باشد؛ یعنی $\beta \rightarrow \infty$ ، عملاً رابطه (۲۱) یک قید زائد برای

مساله محسوب می‌شود؛ بنابراین با توجه به لم (۱)، که بیان می‌کند تابع هدف مساله محدب می‌باشد می‌توان با

استفاده از شرط لازم بهینگی که شرط کافی بهینگی نیز می باشد برای به دست آوردن جواب بهینه مساله Ω_f ، یک الگوریتم بازگشتی ارایه نمود. بعد از کمی محاسبه که جزییات آن در بخش ضمیمه آمده است، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_1}} = \left(\begin{array}{l} \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_r} \\ + \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_1} \end{array} \right), \quad (24)$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_r}} = \left(\begin{array}{l} \frac{w_i(y_i + \zeta_{i_r} - b_1)}{Dx \cdot Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{i_r} - b_1)}{Dx \cdot Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_r} \\ + \frac{w_i(y_i + \zeta_{i_r} - b_r)}{D'x \cdot Sy_{b_r}} \Big|_{i \in I_r} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{i_r} - b_r)}{D'x \cdot Sy_{b_r}} \Big|_{i \in I_1} \end{array} \right). \quad (25)$$

به طوری که:

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx = \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_r} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ D'x = \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_r} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ Sx_{a_1} = \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{a_r} = \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{b_1} = \left((y_i + \zeta_{i_r} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{b_r} = \left((y_i + \zeta_{i_r} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}. \end{array} \right. \quad (26)$$

از مساوی با صفر قرار دادن روابط (۲۴) و (۲۵) و با استفاده از روش بازگشتی ژاکوبی نتیجه می گیریم:

$$\psi_{i_1}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i \alpha_{i_r}}{D'x^k Sx_{a_r}^k}}{\frac{w_i}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i}{D'x^k Sx_{a_r}^k}} \quad i \in I_1 \\ \frac{\frac{\rho w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i \alpha_{i_r}}{D'x^k Sx_{a_r}^k}}{\frac{\rho w_i}{Dx^k Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i}{D'x^k Sx_{a_r}^k}} \quad i \in I_r \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\psi_{i\gamma}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\frac{w_i \alpha'_{i\gamma}}{Dx^k Sy^k_{b_\gamma}} + \frac{\rho w_i \alpha'_{i\gamma}}{D'x^k Sx^k_{b_\gamma}}}{\frac{w_i}{Dx^k Sy^k_{b_\gamma}} + \frac{\rho w_i}{D'x^k Sx^k_{b_\gamma}}} & i \in I_\gamma \\ \frac{\frac{\rho w_i \alpha'_{i\gamma}}{Dx^k Sy^k_{b_\gamma}} + \frac{w_i \alpha'_{i\gamma}}{D'x^k Sx^k_{b_\gamma}}}{\frac{\rho w_i}{Dx^k Sy^k_{b_\gamma}} + \frac{w_i}{D'x^k Sx^k_{b_\gamma}}} & i \in I_\gamma \end{cases} \quad (28)$$

به‌طوری که:

$$\begin{cases} \alpha_{i\gamma} = a_\gamma - x_i \\ \alpha_{i\gamma} = a_\gamma - x_i \\ \alpha'_{i\gamma} = b_\gamma - y_i \\ \alpha'_{i\gamma} = b_\gamma - y_i \end{cases} \quad (29)$$

و k نشان دهنده‌ی تعداد تکرار در روش ژاکوبی می‌باشد که ارتباط مستقیم با شرط توقف دارد؛ بنابراین وقتی که بودجه مورد نظر به اندازه کافی بزرگ باشد می‌توان از روابط بازگشتی (۲۷) و (۲۸)، استفاده نمود. وقتی بودجه مورد نظر به اندازه کافی بزرگ نباشد، دیگر مساله Ω_2 را نمی‌توان با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۸) حل نمود؛ بنابراین در ادامه با استفاده از یک الگوریتم فراابتکاری فرهنگی و برای حالات مختلف p ، مساله مورد نظر را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

۳ الگوریتم‌های فراابتکاری

الگوریتم‌های فراابتکاری، زیر مجموعه الگوریتم‌های محاسباتی بوده که برای جستجو و یافتن یک راه حل بهینه در یک فضای پاسخ استفاده می‌شوند. آن‌ها از مکانیسم‌های تکاملی مختلفی از قبیل انتخاب طبیعی، تکثیر و تولید مثل، جهش و همزیستی، الهام گرفته‌اند. هر موجود که با پارامترهای طبیعی دارای سازگاری بیش تری باشد دارای شانس بیش تری برای زنده ماندن خواهد بود و سایر موجودات به دلیل ناسازگاری، هر چند که بسیار خوب باشند حذف خواهند شد. به‌طور کلی میل به جاودانگی انگیزه اصلی برای خود تکثیری در موجودات می‌باشد.

جهش در برخی پارامترهای تصادفی و یا غیر تصادفی باعث تغییرات غیر برنامه‌ریزی شده می‌شود. غالباً نتایج این تغییرات غیر برنامه‌ریزی شده، نامطلوب می‌باشند اما در برخی موارد این نتایج به بهبود بهینه‌سازی کمک می‌کنند. از طرف دیگر همزیستی نیز ممکن است تولید نسل را بهبود ببخشد. مانند همزیستی سگ و گربه که در مقایسه با سایر هموعان خود به دلیل همزیستی با انسان، باهوش‌تر هستند.

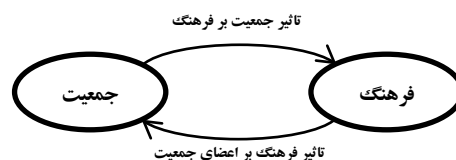
برای حل یک مساله به کمک این گونه الگوریتم‌ها، از یک مکانیسم تکرار ساده بهره گرفته می‌شود. این الگوریتم‌ها با یک جمعیت تصادفی اولیه از پاسخ‌ها شروع، و در هر نسل تلاش می‌کنند تا نتایج را بهبود بخشند. با الهام‌گیری از پدیده‌های مختلف طبیعی، الگوریتم‌های ابتکاری و فرا ابتکاری بسیاری از قبیل الگوریتم ژنتیک،

مورچگان، زنبور عسل مصنوعی، حرکت ذرات و غیره معرفی شده‌اند. می‌توان مراحل عمومی این الگوریتم‌ها را به صورت زیر بیان نمود:

- ۱- ایجاد جمعیت تصادفی پاسخ اولیه.
 - ۲- ارزیابی، مقایسه، رتبه بندی پاسخ‌ها و انتخاب بهترین‌ها.
 - ۳- ترکیب جمعیت جدید با استفاده از فرایندهای طبیعی و بازتولید و ادغام با جمعیت قبل.
 - ۴- بازگشت به مرحله (۲)، در صورت محقق نشدن شرایط مساله.
 - ۵- خروج در صورت محقق شدن شرایط مساله.
- الگوریتم‌های فرهنگی توسط رینولدز [۱۶]، مطرح گردید. این الگوریتم‌ها، تقابل فرهنگی و تاثیر فضای فرهنگ و فضای اجتماعی را با هم مورد بررسی قرار می‌دهند. تقابل و تعامل فرهنگ و اجتماع، منجر به ارایه یک راه حل برای حل مسائل بهینه‌سازی می‌شود. ایده اصلی الگوریتم‌های فرهنگی از تکامل فرهنگی گرفته شده است. در چگونگی تکامل و نقش افراد در اجتماع، در تولید و تغییر فرهنگ، نخبگان و افراد مشهور جامعه با وزن بیش تر، نقش و تاثیر مهم تر و بیش تری به طور مستقیم یا غیر مستقیم بر جامعه و فرهنگ خواهند داشت. به عنوان مثال، افراد ثروتمند جامعه با تکیه بر تمول مالی می‌توانند آداب و رسوم جاری جامعه (فضای باور جامعه) را تغییر داده و با تبعیت سایر افراد جامعه (فضای جمعیت) از آن‌ها، رفته رفته به فرهنگ تبدیل شوند.

به طور کلی یک الگوریتم فرهنگی یک سیستم دو ارثی می‌باشد که مبنای آن جستجو در فضای جمعیت (به نمایندگی از یک جزء ژنتیکی بر اساس نظریه تکاملی داروین) و فضای باور/ فرهنگ (به نمایندگی از یک جزء فرهنگی) است. این فضای باور است که این الگوریتم را با الگوریتم‌هایی نظیر ژنتیک و سایر الگوریتم‌های تکاملی متمایز می‌کند. می‌توان گفت، فضای جمعیت اطلاعاتی را در مورد رفتارهای شخصی و ژنتیکی/ فنوتیپی جامعه می‌دهد در حالی که فضای باور اطلاعات فرهنگی افراد جامعه را بیان می‌کند [۱۶].

هر دو فضا به صورت موازی با هم کار می‌کنند و دائماً در حال تاثیر بر یکدیگر هستند. (شکل (۱)). این چرخه آن قدر ادامه می‌یابد تا فرهنگ به بهترین فرهنگ و اعضای جمعیت به بهترین اعضای جمعیت همگرا شوند. از طرف دیگر تغییراتی که در خود فرهنگ انجام می‌شود باعث می‌گردد تا فضای اعتقادی جامعه نیز جابه جا گردد.



شکل ۱. تاثیر فرهنگ بر جامعه و بالعکس.

۳-۱ مشخصه‌های الگوریتم فرهنگی

ما در این قسمت مشخصه‌های الگوریتم فرهنگی حاضر را بیان می‌کنیم. به طور کلی یک الگوریتم فرهنگی، در هر نسل ابتدا افراد را مانند الگوریتم ژنتیک در فضای جمعیت وارد کرده و توسط تابع شایستگی ارزیابی می‌کند. سپس توسط تابع پذیرش افرادی را که مناسب شکل دادن به فضای باور/ فرهنگی هستند انتخاب می‌کند و

تجربیات پذیرفته شده افراد را برای ساختن و تغییر فضای باور/فرهنگ به کار می‌برد (در این جا فرهنگ شبیه‌سازی می‌شود). فرهنگ ایجاد شده در فضای باور، بر روی تکامل جمعیت در فضای جمعیت تأثیر می‌گذارد. این تأثیر با تغییر دادن عملگر جهش و اعمال آن عملگر، در تولید فرزندان صورت می‌گیرد. بنابراین یک الگوریتم فرهنگی دارای مشخصه‌های مختلفی همچون، فضای جمعیت، فضای باور /فرهنگ، تابع پذیرش، تنظیم اعتقادات/ تابع تأثیر و انتخاب و ارزیابی می‌باشد.

۳-۱-۱ فضای جمعیت

این فضا در واقع فضای اصلی جمعیت می‌باشد و با مقدار دهی اولیه کار خود را شروع کرده و استخراج فرهنگ و ذخیره‌ی آن در فضای باور/فرهنگ در این قسمت انجام می‌گیرد. در این مقاله، نقاط اولیه همان فضای اولیه مساله می‌باشند که در هر تکرار تغییر می‌کنند. مولفه جمعیت یک الگوریتم فرهنگی، مشابه همین مولفه در یک الگوریتم ژنتیک است.

۳-۱-۲ ارزیابی و انتخاب

در هر تکرار باید اعضای جمعیت که در فضای جمعیت آن تکرار قرار دارند توسط تابعی ارزیابی شوند تا مشخص شود کدام یک از این اعضا نسبت به اعضای دیگر برتری دارد. ملاک برتری، کاهش دادن بیش تر تابع هدف مساله است؛ بنابراین تابع ارزیابی را می‌توان همان تابع هدف مساله؛ یعنی رابطه (۱۷) معین نمود. این تابع ارزیابی، معیاری است برای انتخاب اعضایی که بیش ترین کاهش تابع هدف را در پی دارند.

۳-۱-۳ فضای باور

فضای باور یک الگوریتم فرهنگی به بخش‌های مختلفی تقسیم می‌شود. این بخش‌ها نماینده حوزه‌های مختلف دانشی هستند که، جمعیت از فضای جستجو دارد. در فضای باور، تجربیات عمومی شده افراد موفق از فضای جمعیتی، به دست آمده و این تجارب در سراسر نسل و نسل‌های بعدی شکل گرفته و ذخیره می‌شود؛ لذا در واقع اطلاعات فرهنگ افراد در فضای باور مدل می‌شود. این تجارب بر تمامی نسل‌ها تأثیرگذار است و به نسل‌های آینده منتقل می‌گردد. درواقع این فضا برای هرس کردن فضای جمعیت مؤثر است [۱۸، ۱۶].

هر فرد یک ذره در فضای جستجو است که فضای باور برای دور ساختن افراد از ناحیه‌های نامطلوب و سوق دادن آن‌ها به سمت ناحیه‌های امید بخش و نزدیک به جواب، به کار برده می‌شود. دانش‌های مختلفی نظیر دانش موقعیتی (وضعی)، دانش هنجاری (معیار)، دانش توپوگرافی (مؤلفه ریختی)، دانش تاریخچه و دانش بازه برای تشکیل فضای باور تشکیل شده‌اند. در این مقاله از دو دانش موقعیتی و دانش هنجاری برای تغییر فضای فرهنگ استفاده خواهیم کرد. فرض کنید $B(t)$ ، فضای باور در هر نسل باشد، داریم:

$$B(t) = (S(t), N(t)). \quad (30)$$

به طوری که، $S(t)$ و $N(t)$ ، به ترتیب مولفه های موقعیتی (وضعی) و هنجاری فضای باور در نسل t -ام نامیده می شوند.

• دانش وضعی :

بهترین جواب های هر نسل (و یا نسل جاری) را به عنوان مؤلفه وضعی در نظر می گیریم، نقطه ای که در فرهنگ به عنوان هدف در نظر گرفته می شود. در اینجا دانش موقعیتی (وضعی) شامل بهترین ذره سراسری است و طبق رابطه زیر فضای باور / فرهنگ به روز می شود:

$$S(t) = y(t+1) = \begin{cases} \text{arc} \{f(x_i(t))\} & \text{if } \left(\min_{i=1, \dots, n_s} \{f(x_i(t))\} \right) < f(y(t)) \\ y(t) & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

که، $(x_i(t))$ ، جواب مساله در هر تکرار می باشد.

• دانش هنجاری:

این منبع دانش، مجموعه بازه های خوب و امیدبخش را که از مجموعه ای از ذرات خوب استخراج شده است، برای هر بعد از مسأله نگهداری می کند. اگر فضا رقابتی باشد هنجارها شکل مناسبی به خود می گیرند و در صورت مراجعه به هنجارها، نهایتاً بهبود جواب ها حاصل می شود؛ بنابراین اگر فرض کنیم پاسخ ها دارای چند مولفه باشند؛ یعنی، $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ ، که D ، معرف تعداد ابعاد مساله است، برای هر یک از آن ها یک بازه تعریف می شود که به آن بازه هنجاری می گویند. این بازه، افراد موجه یا پذیرش شده را در فضای باور / فرهنگی، توصیف می کند؛ لذا برای هر متغیر یک فضای موجه و پذیرش شده داریم.

مولفه هنجاری را با N ، نمایش می دهیم و به صورت $N = \{I_1, I_2, \dots, I_D\}$ ، بیان می کنیم. که در آن $I_i = (x_i^{\min}, x_i^{\max})$ و $x_i = (I_i, L_i, U_i)$ می باشد که، L_i ، با $x_i^{\min}$ و U_i ، با $x_i^{\max}$ ، مرتبط می باشند و L_i و U_i ، مقادیر تابع شایستگی در آن حدود می باشند. به عبارت دیگر L_i و U_i به ترتیب حد پایین مقدار یک ذره در تابع هدف و حد بالای یک ذره از در تابع هدف در بعد i -ام می باشد. در هر تکرار طبق این دانش فضای جستجو رفته رفته کوچک تر شده و به ناحیه های خوب نزدیک تر می شود.

۳-۱-۴ تابع پذیرش

تابع پذیرش تابعی است یک عضو از جمعیت را برای تاثیر بر روی فرهنگ انتخاب می کند؛ لذا این تابع مشخص می کند که چه افرادی می توانند بر فرهنگ تاثیر گذار باشند. افراد انتخاب شده توسط تابع پذیرش در هر تکرار فضای تابع پذیرش را شکل می دهند. تابع پذیرش به دو روش استاتیک و دینامیک پیاده سازی می شود. در روش های استاتیک، معمولاً $n\%$ بهتر جمعیت انتخاب می شوند. در حالی که در روش دینامیک، تعداد افراد موثر ثابت نبوده و قابل تغییر هستند، در این مقاله بر اساس منبع [۱۷]، از روش دینامیک و از رابطه ی (۳۲) برای تابع پذیرش استفاده شده است.

$$n_B(t) = \left\lceil \frac{n_s \times \gamma}{t} \right\rceil. \quad (32)$$

به‌طوری که، n_s ، اندازه جمعیت است که در این مقاله برای مثال ارایه شده $n_s = 50$ انتخاب شده است و γ ، ضریبی تجربی بین صفر و یک است که در این مقاله $\gamma = 0/3$ فرض شده است. و t ، شمارنده تکرار می‌باشد. که با افزایش تعداد تکرار، $n_B(t)$ رو به کاهش می‌رود.

۳-۱-۴ تابع تاثیر / تنظیم اعتقادات

باورها در فضای باور برای تغییر دادن افراد و نزدیک کردن آن‌ها به باور سراسری (بهینه کل) به کار برده می‌شوند که این تغییرات با استفاده از تابع تاثیر، تحقق می‌یابد [۱۶]. فضای باور با استفاده از عملگر جهش بر روی فضای جمعیت تاثیر می‌گذارد، این تاثیر از دو راه ممکن است یکی اندازه جهش و دیگری جهت جهش می‌باشد. در این مقاله سعی شده است با توجه به مولفه وضعی و مولفه هنجاری از مرجع [۱۶]، تابع تاثیر استخراج شود؛ بنابراین در یک الگوریتم فرهنگی، برای اعمال تغییر در پاسخ‌ها می‌توانیم به روش‌های زیر عمل کنیم:

- ۱- استفاده از مولفه هنجاری.
 - ۲- استفاده از مولفه وضعی برای تعیین جهت حرکت.
 - ۳- استفاده از مولفه وضعی برای تعیین جهت و استفاده از مولفه هنجاری برای میزان حرکت.
 - ۴- استفاده از مولفه‌های هنجاری هم برای گام حرکت و هم جهت حرکت:
- در این مقاله از روش چهارم برای تغییر در پاسخ‌ها استفاده شده است؛ یعنی در هر تکرار داریم:

$$x'_{ij}(t) = \begin{cases} x_{ij}(t) + \delta_j \times |N(0,1)| & x_{ij}(t) \leq x_i^{\min}(t), \\ x_{ij}(t) - \delta_j \times |N(0,1)| & x_{ij}(t) \geq x_i^{\max}(t), \\ x_{ij}(t) + \theta \times \delta_j \times |N(0,1)| & \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (33)$$

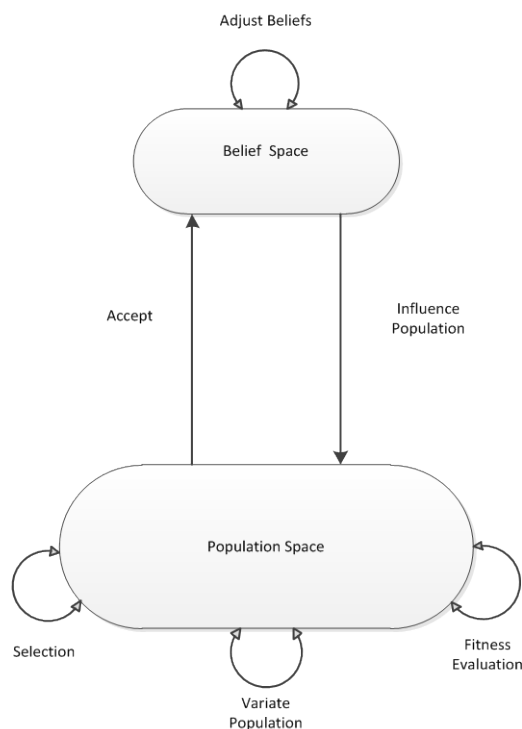
که در آن $\theta > 0$ ، ضریب مقیاس‌گذاری است و برای آن مقداری برابر با $\theta = 0/5$ ، در نظر گرفته‌ایم. همچنین مقدار حرکت با $\delta_j > 0$ ، نمایش داده شده است. در این مقاله، برای تعیین δ_j ، از طول بازه استفاده کرده‌ایم یعنی:

$$\delta_j(t) = \alpha \times [x_j^{\max}(t) - x_j^{\min}(t)]. \quad (34)$$

که، $0 < \alpha = 0/2 < 1$ ، همچنین $N(0,1)$ ، متغیری تصادفی با توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ می‌باشد. بنابراین می‌توان گام‌های الگوریتم فرهنگی حاضر را به‌صورت زیر بیان نمود.

- گام ۱: تولید جمعیت اولیه و ارزیابی آن‌ها.
- گام ۲: آماده سازی فضای اعتقادی.
- گام ۳: انتخاب اعضای جمعیت برای تاثیر در فرهنگ یا فضای اعتقادی.
- گام ۴: تغییر مولفه‌های فضای اعتقادی توسط اعضای منتخب.
- گام ۵: تولید پاسخ‌های جدید با تاثیر فرهنگ بر پاسخ‌های فعلی و ارزیابی آن‌ها.
- گام ۶: بازگشت به مرحله ۳ در صورت برآورده نشدن شرایط مساله.

مراحل بالا را می‌توان در شکل (۲) به وضوح مشاهده نمود.



شکل ۲. نمایی از کارکرد الگوریتم فرهنگی.

۴ نتایج محاسباتی

در این قسمت مثال‌های عددی برای معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مساله ۲- میانه آورده شده است. در ابتدا یک مثال شامل ۵۰ مشتری با وزن‌های مثبت در نظر گرفته شده‌اند که در جدول (۱)، قابل مشاهده می‌باشند. جواب‌های مثال عددی ارایه شده برای نرم‌های $p = 2, 4, 5, 10$ در جدول (۲) آورده شده است. جدول (۳) نیز عملکرد الگوریتم فرهنگی ارایه شده را برای نرم‌های مختلف بیان می‌کند. شکل (۳)، مقادیر تابع هدف برحسب تعداد تکرار را به ازای $\beta = 180$ نشان می‌دهد. در شکل‌های (۴) تا (۷) مختصات اولیه (مربع) و نهایی (دایره) نقاط به ازای مقادیر مختلف p آمده است.

جدول ۱. مختصات نقاط (مشتری‌ها) به همراه وزن آن‌ها.

ردیف	x_i	y_i	w_i	ردیف	x_i	y_i	w_i
۱	۵/۵۳	۴/۴۳	۵	۲۶	۵/۲۷	۲/۵۳	۷
۲	۳	۵/۰۸	۶	۲۷	۲/۰۳	۸/۶۱	۸
۳	۹/۱۴	۶/۶۱	۱	۲۸	۶/۹۸	۲/۴۲	۱۰
۴	۲/۶۴	۷/۸	۶	۲۹	۷/۳۶	۰/۶۸	۵
۵	۴/۵۲	۶/۳۵	۳	۳۰	۶/۳۲	۰/۷۷	۹
۶	۳/۱۳	۱/۶۲	۴	۳۱	۵/۷۸	۰	۵

۷	۱/۶	۶/۹۷	۱۰	۳۲	۷/۴۱	۲/۰۶	۱
۸	۵/۲۴	۲/۶۸	۸	۳۳	۷/۳۸	۵/۰۴	۹
۹	۴/۸۷	۶/۳۱	۲	۳۴	۶/۲۸	۳/۳۱	۴
۱۰	۷/۵۵	۴/۷	۶	۳۵	۳/۹۶	۵/۶۱	۳
۱۱	۳/۳	۰/۴۶	۶	۳۶	۳/۳	۰/۳۴	۷
۱۲	۳/۲۳	۹/۹۳	۹	۳۷	۶/۳۱	۱/۰۹	۹
۱۳	۱/۶۹	۲/۰۲	۳	۳۸	۸/۹۱	۱/۴۴	۹
۱۴	۹/۰۸	۵/۲۵	۷	۳۹	۴/۹	۲/۳۳	۳
۱۵	۶/۶۵	۶/۶۸	۲	۴۰	۴/۲	۶/۶۶	۴
۱۶	۱/۶۳	۸/۳۹	۴	۴۱	۲/۶۷	۴/۴۹	۱۰
۱۷	۱/۳۲	۴/۲۸	۴	۴۲	۴/۰۱	۶/۲۷	۳
۱۸	۳/۰۴	۵/۳۹	۱	۴۳	۴/۳۵	۲/۴۴	۲
۱۹	۴/۶۶	۸/۳۲	۱۰	۴۴	۲/۵۵	۱/۴	۸
۲۰	۰/۱	۲/۷۸	۹	۴۵	۶/۱۶	۳/۳۷	۳
۲۱	۵/۲	۸/۸۵	۹	۴۶	۳/۹۱	۶/۵۹	۱
۲۲	۳/۱۸	۸/۵۴	۱	۴۷	۷/۷۶	۵/۹۴	۴
۲۳	۸/۰۵	۱/۹۷	۸	۴۸	۰/۸۷	۳/۳۳	۸
۲۴	۶/۲۵	۰/۳۴	۱	۴۹	۰/۰۹	۸/۸۲	۷
۲۵	۹/۷	۹/۹۲	۳	۵۰	۴/۲۲	۹/۵	۸

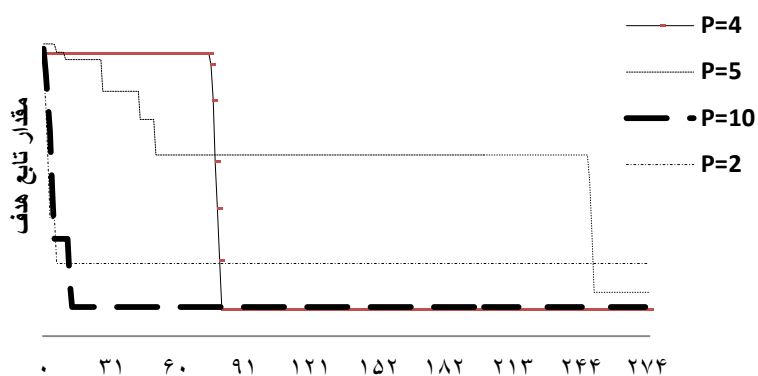
جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی شده با بودجه $\beta = ۱۸۰$ ، برای نرم‌های $p = ۲, ۴, ۵, ۱۰$.

ردیف (i)	$p = ۲$		$p = ۴$		$p = ۵$		$p = ۱۰$	
	ζ_{i2}	ζ_{i1}	ζ_{i2}	ζ_{i1}	ζ_{i2}	ζ_{i1}	ζ_{i2}	ζ_{i1}
۱	۰/۹	۰/۹	۰/۴	۳/۳۴	۰/۸	۱/۹۱	۲/۱۶	۰/۲۳
۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۱/۵۳	۱/۵۳	۱/۱۷	۱/۱۷	۱/۱۴	۱/۱۴	۱/۴	۱/۴
۴	۰/۱۱	۱/۸۹	۰/۰۶	۳/۰۸	۰/۲۵	۲/۲۳	۰/۴	۳/۰۲
۵	۱/۳۶	۱/۳۶	۱/۴۸	۱/۴۸	۱/۴۶	۱/۴۶	۱/۵۱	۱/۵۱
۶	۰/۸۴	۲/۹۲	۱/۰۴	۳/۸۳	۰/۱۲	۳	۰/۹۳	۲/۶۹
۷	۱/۶۳	۱/۶۳	۰/۸۸	۱/۷۹	۰/۹۴	۲/۲۱	۱/۱۷	۲/۱
۸	۱/۶۶	۱/۶۶	۲/۲۸	۲/۲۸	۲/۲۵	۲/۲۵	۲/۴۴	۲/۴۴
۹	۳/۵۸	۱/۰۲	۱/۷۸	۱/۷۸	۱/۸	۱/۱۴	۲/۳۳	۱/۰۵
۱۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۱	۱/۰۱	۴	۰/۹۹	۴/۱۷	۰/۹۴	۴/۵۵	۰/۵	۵/۱
۱۲	۱/۱۳	۴/۲	۱/۵۷	۴/۸۴	۰/۶۱	۵/۳۴	۰/۸۸	۴/۹۳
۱۳	۰/۷۴	۲/۶۷	۱/۰۶	۲/۸۴	۰/۷۳	۲/۸۲	۰/۵۱	۲/۶۲
۱۴	۱/۰۹	۱/۰۹	۱/۵۶	۰/۰۴	۱/۴۶	۰/۰۲	۱/۳۴	۰/۵۲
۱۵	۰/۹۷	۰/۹۷	۱/۳۷	۱/۳۷	۱/۲۲	۱/۲۲	۰/۴۳	۱/۴۱
۱۶	۰/۹	۳/۷۷	۰/۹۴	۳/۴۳	۰/۸۵	۲/۷۶	۰/۸۲	۲/۶۶

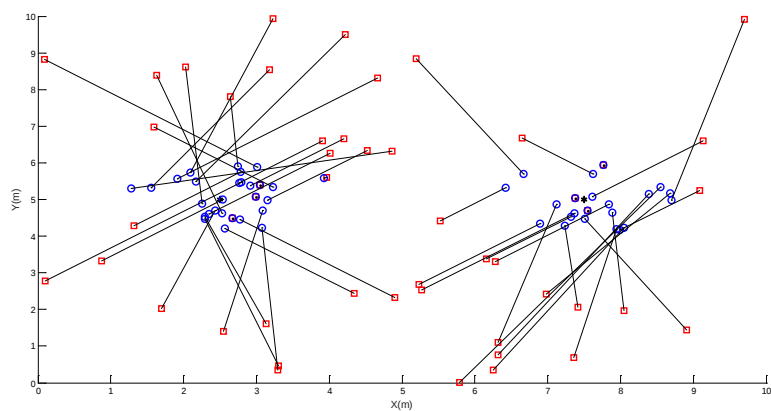
۱/۰۶	۱/۰۶	۰/۸۲	۰/۸۲	۰/۶۹	۰/۶۹	۱/۴۷	۱/۴۷	۱۷
۰/۸۲	۰/۸۲	.	.	.	.	.	.	۱۸
۲/۷۵	۲/۷۵	۲/۸۷	۱/۹۱	۲/۷۹	۲/۷۹	۲/۷۵	۲/۷۵	۱۹
۲/۳۱	۲/۳۱	۲/۲۹	۲/۲۹	۲/۲۱	۲/۲۱	۲/۷	۲/۷	۲۰
۴/۲۳	۲/۸۶	۴/۳۱	۲/۲	۳/۸۲	۲/۱۵	۳/۱۴	۱/۴۷	۲۱
۳/۹۷	۰/۶۸	۴/۰۲	۰/۳۳	۳/۳۲	۰/۰۵	۳/۲۳	۱/۶۲	۲۲
۳/۱۳	۰/۶۴	۲/۷۲	۰/۵۶	۲/۹۷	۱/۳۶	۲/۶۶	۰/۱۶	۲۳
۴/۲۵	۱/۴۴	۴/۹۳	۱/۰۴	۵/۱۵	۰/۶۱	۳/۸۸	۱/۸	۲۴
۵/۹۷	۱/۷۵	۴/۶۱	۲/۴۱	۵/۳	۲/۰۱	۴/۹۴	۱/۰۱	۲۵
۲/۸	۲/۸	۲/۳۱	۲/۳۱	۱/۸۲	۱/۸۲	۲/۱	۲/۱	۲۶
۳/۷	۰/۲۲	۳/۲۴	۱/۰۶	۳/۷۴	۰/۴۲	۳/۷۲	۰/۲۲	۲۷
۲/۴۱	۰/۴۸	۲/۳۸	۰/۰۵	۲/۰۹	۰/۶۳	۲/۷۵	۱/۷۱	۲۸
۴/۸	۰/۵۳	۴/۷۶	۰/۵۴	۴/۴۵	۰/۴۳	۳/۵۲	۰/۵۹	۲۹
۳/۸۹	۱/۲۴	۳/۸۶	۱/۱۲	۳/۶۷	۱/۰۹	۴/۳۸	۲/۰۶	۳۰
۴/۹۹	۲/۱۲	۴/۳۸	۱/۷	۴/۹۲	۲/۱۲	۵/۳۴	۲/۷۶	۳۱
۳/۱۷	۰/۶۵	۳/۵۵	۰/۱۴	۲/۵۷	۰/۵۸	۲/۲۲	۰/۱۸	۳۲
.	.	.	.	.	.	.	.	۳۳
۱/۳۴	۱/۳۴	۱/۲۱	۱/۲۱	۱/۴۸	۱/۴۸	۱/۵۶	۱/۵۶	۳۴
۰/۲۳	۱/۱۹	۰/۴۳	۱/۳۸	۰/۴۳	۲/۴۶	۰/۰۳	۰/۰۳	۳۵
۵/۰۸	۰/۶۳	۴/۴۶	۰/۹۵	۵/۰۹	۱/۰۳	۳/۸۸	۰/۲۲	۳۶
۳/۸۶	۰/۷۲	۵/۲۳	۱/۸۲	۳/۴۵	۰/۹۴	۳/۷۸	۰/۸۱	۳۷
۳/۶	۱/۷	۳/۰۶	۲/۰۹	۳/۷	۱/۳۲	۳/۰۴	۱/۴	۳۸
۲/۸۳	۲/۸۳	۲/۳۳	۲/۳۳	۲/۳۳	۲/۳۳	۲/۱۳	۲/۱۳	۳۹
۱/۲۵	۱/۲۵	۱/۶۹	۱/۶۹	۱/۴۶	۱/۴۶	۱/۲۹	۱/۲۹	۴۰
.	.	.	.	.	.	.	.	۴۱
۱/۵۹	۱/۵۹	۱/۵	۱/۵	۱	۱	۱/۶۶	۱/۶۶	۴۲
۲/۳	۲/۳	۲/۲	۲/۲	۲/۴۲	۲/۴۲	۱/۷۸	۱/۷۸	۴۳
۳/۰۷	۰/۴۲	۳/۵	۰/۵۵	۳/۷۲	۰/۷۳	۳/۳	۰/۵۴	۴۴
۱/۳۱	۱/۳۱	۱/۷۲	۱/۷۲	۲/۰۵	۲/۰۵	۱/۱۶	۱/۱۶	۴۵
۱/۷۵	۱/۷۵	۱/۴۹	۱/۴۹	۱/۱۷	۱/۱۷	۱/۱۵	۱/۱۵	۴۶
۰/۵۲	۰/۵۲	۰/۶۵	۰/۶۵	۰/۵۸	۰/۵۸	.	.	۴۷
۱/۵۹	۱/۵۹	۱/۹۷	۱/۹۷	۲/۱	۲/۱	۱/۶۶	۱/۶۶	۴۸
۳/۰۶	۳/۰۶	۳/۸	۱/۶۶	۳/۴۷	۱/۹۶	۲/۹۲	۲/۹۲	۴۹
۴/۴۲	۲/۱۵	۴/۴۷	۲/۱۹	۴/۱۲	۱/۶۴	۴/۰۱	۲/۰۵	۵۰

جدول ۳. مقادیر تابع هدف برای نرم‌های ۱۰، ۵، ۴، ۲، p ، بر حسب تعداد تکرار.

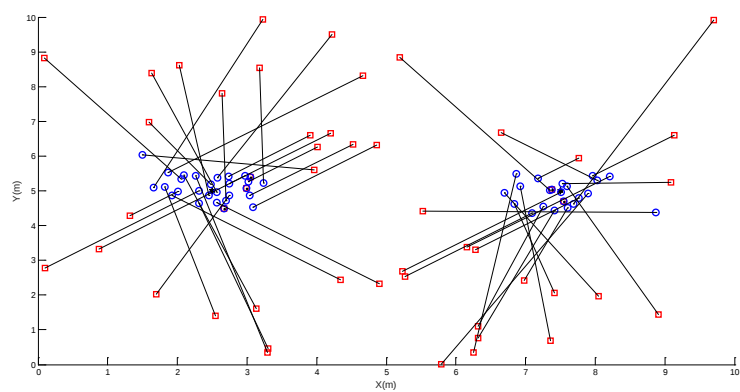
تکرار	$p = 2$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 10$
۱	۸/۱۳۲	۱۳۳/۲۱	۱۳۰/۱	۱۳۱/۱۱
۲	۱۱۹	۱۲۵/۱۲	۱۲۹/۲	۱۲۷/۰۹
۳	۱۰۲	۱۲۵/۱۲	۱۲۹/۲	۱۱۶/۳۴
۴	۸۰/۲۷	۱۲۵/۱۲	۱۲۹/۲	۱۰۴/۲۸
۵	۵۲/۱۲	۱۲۵/۱۲	۱۲۹/۲	۹۰/۶۰۳
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
۴۹۹	۳۲/۰۸	۱۱/۵۸۴	۱۹/۳۵	۱۲/۸۷
۵۰۰	۳۲/۰۸	۱۱/۵۸۴	۱۹/۳۵	۱۲/۸۷



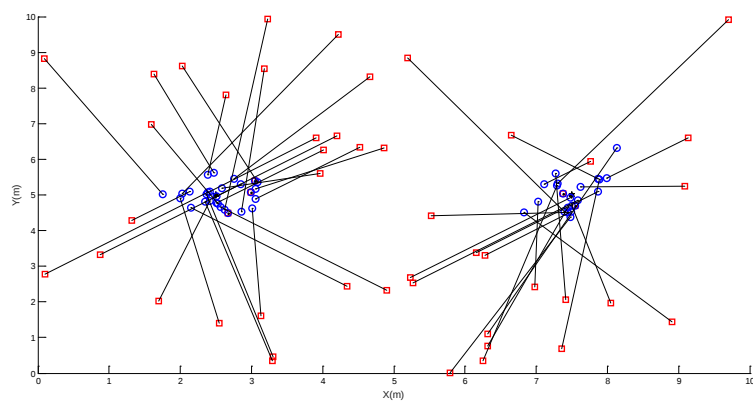
شکل ۳. مقادیر تابع هدف بر حسب تعداد تکرار برای $\beta = 180$.



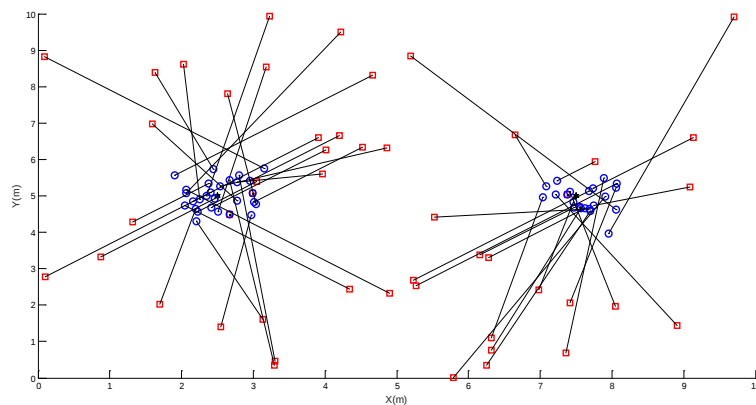
شکل ۴. مختصات نقاط اولیه (مربع) و نقاط نهایی (دایره) برای $p = 2$ و $\beta = 180$.



شکل ۵. مختصات نقاط اولیه (مربع) و نقاط نهایی (دایره) برای $p = 4$ و $\beta = 180^\circ$.



شکل ۶. مختصات نقاط اولیه (مربع) و نقاط نهایی (دایره) برای $p = 5$ و $\beta = 180^\circ$.



شکل ۷. مختصات نقاط اولیه (مربع) و نقاط نهایی (دایره) برای $p = 10$ و $\beta = 180^\circ$.

همچنین جهت بررسی کارایی الگوریتم فرهنگی، در ادامه نتایج این روش را با نتایج حاصل از دو الگوریتم فراابتکاری ازدحام ذرات (PSO) و الگوریتم بهبودیافته ازدحام ذرات (IPSO) مقایسه کرده ایم. روش PSO از جمله روش‌های تکاملی و مدرن می‌باشد که در سال ۱۹۹۵ توسط کندی و ابرهارت با الهام از رفتار دسته جمعی موجوداتی مثل حشرات، زنبورها، مورچگان و پرندگان ایجاد شده است. هر عضو این گروه براساس اطلاعات و آگاهی خود و اطلاعات کلی گروه حرکت می‌کند. موقعیت هر ذره؛ یعنی $x_i(t)$ در هر تکرار به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} v_{ij}(t+1) &= \omega_t v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t) [y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + \\ &\quad c_2 r_{2j}(t) [\bar{y}_j(t) - x_{ij}(t)], \\ x_{ij}(t+1) &= x_{ij}(t) + v_{ij}(t), \\ y_i(t+1) &= \begin{cases} y_i(t), & \text{if } f(x_i(t+1)) \geq f(y_i(t)) \\ x_i(t+1), & \text{if } f(x_i(t+1)) < f(y_i(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن v_i سرعت حرکت ذره، y_i بهترین موقعیتی که ذره تا به حال تجربه کرده است و $\bar{y}_i$ بهترین مکانی است که تا کنون توسط ذرات مجاور یافت شده است. همچنین r_{1j} و r_{2j} اعداد تصادفی یکنواخت بین $(0,1)$ و c_1 و c_2 نیز اعداد ثابتی هستند که به ضرایب شتاب دهنده معروف بوده و به ترتیب پارامتر ادراکی و پارامتر اجتماعی نامیده می‌شوند. در این مقاله مقادیر c_1 و c_2 برابر ۲ در نظر گرفته شده است. به علاوه ω_t ضریب وزنی می‌باشد که به‌طور خطی از $\omega_{\max}$ تا $\omega_{\min}$ تغییر می‌کند و در روش PSO از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\omega_t = \omega_{\max} - \left(\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{t_{\max}} \right) t$$

که در آن $t_{\max}$ ماکزیمم مراحل تعیین شده برای تکرار مساله است. در این مقاله $\omega_{\max}$ و $\omega_{\min}$ به ترتیب برابر با ۰/۹ و ۰/۲ در نظر گرفته شده‌اند. در روش IPSO ضریب وزنی ω_t ، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\omega_t = \omega_{\min} + (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \left(\frac{\text{dist}_j}{\max_dist} \right)$$

که، dist_j فاصله اقلیدسی عضو j -ام از بهترین نقطه $\bar{y}_i$ و $\max_dist$ ، نیز بیش‌ترین فاصله تا $\bar{y}_i$ در بین همه اعضا می‌باشد.

در ادامه ابتدا یک مساله با $n = 40$ که داده‌های آن به‌طور تصادفی تولید شده‌اند با سه روش ذکر شده حل شده است. نتایج حاصل به ازای بودجه‌های مختلف، ضریب شکست‌های متفاوت و تحت نرم‌های مختلف در جداول ۴ تا ۶ آمده است.

جدول ۴. مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های PSO، IPSO و CA، با $n = ۴۰$ نقطه، بودجه $\beta = ۷۵۰$ ، $\rho = ۰/۵$ و تعداد تکرار $t = ۱۰۰۰$ نسبت به نرم‌های ۱، ۵، ۲، ۵، ۱۰، $p = ۱$ ،

Test#	P	PSO	IPSO	CA	CPU Time(PSO)	CPU Time(IPSO)	CPU Time(CA)
۱	۱	۲/۷۶E+۰۳	۲/۵۸E+۰۳	۲/۲۶E+۰۳	۲۲۱/۵۹۵۷	۲۱۵/۶۶۷۲	۱۷۰/۱۵۶۴
۲	۱/۵	۲/۴۰E+۰۳	۲/۲۵E+۰۳	۱/۹۲E+۰۳	۲۲۵/۵۵۱۷	۱۸۶/۹۴۴	۱۲۵/۳۲۵۶
۳	۲	۲/۰۹E+۰۳	۲/۰۱E+۰۳	۱/۷۶E+۰۳	۱۸۷/۸۳۷۱	۲۰۵/۰۴۶۸	۲۰۰/۱۵۵
۴	۵	۱/۸۳E+۰۳	۱/۶۷E+۰۳	۱/۳۰E+۰۳	۲۱۶/۸۶۶۹	۲۲۶/۴۷۳۳	۱۸۹/۴۵۲۶
۵	۱۰	۱/۸۰E+۰۳	۱/۵۹E+۰۳	۱/۴۹E+۰۳	۱۹۸/۶۲۲۸	۲۳۷/۷۹۶	۱۴۷/۲۵۶۸

جدول ۵. مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های PSO، IPSO و CA، با $n = ۴۰$ نقطه، $\rho = ۰/۳$ ، $p = ۲$ و تعداد تکرار $t = ۱۰۰۰$ نسبت به ۱۰۰، ۳۰۰، ۵۰۰، ۷۰۰، $\beta = ۱۰۰$ ،

Test#	β	PSO	IPSO	CA	CPU Time(PSO)	CPU Time(IPSO)	CPU Time(CA)
۶	۱۰۰	۲/۷۶E+۰۳	۲/۵۸E+۰۳	۲/۲۶E+۰۳	۲۲۱/۵۹۵۷	۲۱۵/۶۶۷۲	۱۷۰/۱۵۶۴
۷	۳۰۰	۲/۴۰E+۰۳	۲/۲۵E+۰۳	۱/۹۲E+۰۳	۲۲۵/۵۵۱۷	۱۸۶/۹۴۴	۱۲۵/۳۲۵۶
۸	۵۰۰	۲/۰۹E+۰۳	۲/۰۱E+۰۳	۱/۸E+۰۳	۱۸۷/۸۳۷۱	۲۰۵/۰۴۶۸	۲۰۰/۱۵۵
۹	۷۰۰	۱/۸۳E+۰۳	۱/۶۷E+۰۳	۱/۳E+۰۳	۲۱۶/۸۶۶۹	۲۲۶/۴۷۳۳	۱۸۹/۴۵۲۶

جدول ۶. مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های PSO، IPSO و CA، با $n = ۴۰$ نقطه، $\beta = ۵۰۰$ ، $p = ۲$ و تعداد تکرار $t = ۱۰۰۰$ نسبت به ۰، ۳، ۵، ۸، $\rho = ۰/۳$ ،

Test#	ρ	PSO	IPSO	CA	CPU Time(PSO)	CPU Time(IPSO)	CPU Time(CA)
۱۰	۰	۹/۹۷E+۰۲	۸/۵۸E+۰۲	۹/۳۶E+۰۲	۲۲۹/۰۵۸۲	۲۲۵/۹۵۰۶	۲۱۶/۴۱۹۴
۱۱	۰/۳	۲/۰۰E+۰۳	۱/۸۲E+۰۳	۹۵۴/۲۳۶۵	۲۳۴/۹۷۳۲	۱۱۳/۱۲۵۹	۷۵/۲۳۶۵
۱۲	۰/۵	۲/۸۸E+۰۳	۲/۵۰E+۰۳	۱۸۰۴/۲۳۶۵	۱۷۳/۹۲۸۴	۱۱۷/۷۸۱۱	۱۰۲/۱۲۵۱
۱۳	۰/۸	۳/۶۱E+۰۳	۳/۵۰E+۰۳	۳/۳۲E+۰۴	۲۲۱/۱۲۱۷	۱۳۶/۵۳۷۵	۱۱۴/۱۲۵۸

در جدول ۷ نتایج حاصل از سه روش ذکر شده برای مسایلی با تعداد نقاط مختلف و بودجه و ضریب شکست های متفاوت آمده است. نتایج نشان می دهد که الگوریتم فرهنگی هم از نظر کیفیت جواب و هم از نظر زمان محاسبه از هر دو روش دیگر بهتر عمل کرده است.

در الگوریتم های ارایه شده جمعیت اولیه همان نقاط اولیه در نظر گرفته شده اند. البته جمعیت های مختلف دیگری نیز مورد بررسی قرار گرفتند؛ ولی بهبود قابل توجهی حاصل نشد.

جدول ۷. مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های PSO، IPSO و CA، با تعداد نقاط و بودجه و ضریب شکست‌های متفاوت.

Test#	n	β	ρ	PSO	IPSO	CA	CPU Time(PSO)	CPU Time(IPSO)	CPU Time(CA)
۱۴	۲۵	۱۸۰	۰	۸/۵۴E+۰۲	۸/۵۳E+۰۲	۸/۳۳E+۰۲	۱۰۵/۶۵۴	۱۱۴/۵۱۰۵	۹۰/۸۲۱۳
۱۵	۲۵	۱۸۰	۰/۵	۱/۹۷E+۰۳	۱/۹۲E+۰۳	۱/۰۱E+۰۳	۱۰۵/۱۷۲	۹۵/۲۴۸۴	۹۸/۶۷۱۴
۱۶	۵۰	۴۰۰	۰	۲/۹۷E+۰۳	۲/۷۱E+۰۳	۲/۶۱E+۰۳	۲۱۳/۱۱۳	۱۵۸/۵۹۱۸	۱۴۰/۸۱۸
۱۷	۵۰	۴۰۰	۰/۵	۵/۴۱E+۰۳	۵/۲۴E+۰۳	۴/۶۶E+۰۳	۱۱۷/۳۳۳۹	۲۲۱/۴۹۲۷	۱۱۰/۰۹۸۵
۱۸	۷۰	۸۰۰	۰	۵/۰۶E+۰۳	۴/۸۴E+۰۳	۴/۴۲E+۰۳	۲۸۹/۱۴۴۶	۲۳۴/۵۳۵۹	۱۰۰/۰۹۸۵
۱۹	۷۰	۸۰۰	۰/۳	۸/۲۲E+۰۳	۷/۲۱E+۰۳	۴/۴۴E+۰۳	۳۴۲/۵۷۸۴	۲۱۸/۰۲۵	۱۲۱/۸۳۱۹
۲۰	۱۰۰	۱۵۰۰	۰	۱/۳۱E+۰۴	۱/۲۷E+۰۴	۱/۱۱E+۰۴	۳۹۵/۹۱۲۵	۴۲۵/۵۳۲	۱۲۵/۸۴۱۲
۲۱	۱۰۰	۲۰۰۰	۰/۲	۱/۵۶E+۰۴	۱/۴۳E+۰۴	۱/۰۵E+۰۴	۲۷۴/۱۷۵۷	۲۶۱/۱۱۳۳	۱۳۲/۱۸۱۱

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله برای اولین بار معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای یک مساله مکانیابی ۲- میانه پشتیبان مورد بررسی قرار گرفته و برای آن یک مدل ریاضی ارایه شده است. همچنین در حالتی که $\rho = 0$ باشد این مساله به یک مساله معکوس ۲- میانه قطعی تبدیل می‌گردد. از آنجایی که، معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای مساله ۲- میانه در فضای پیوسته و با روش تغییر در مختصات نقاط مورد بررسی قرار نگرفته بود، این مساله را با استفاده از ترکیب الگوریتم‌های فراابتکاری فرهنگی و ژنتیک حل نمودیم. تعمیم این دو مدل برای فضاهای غیر پیوسته و گراف‌ها مخصوصاً گراف‌های خاصی همچون درخت‌ها، دور گراف‌ها و ... می‌تواند از مسیرهای تحقیقاتی دیگر نیز باشد.

ضمیمه

جهت به دست آوردن روابط بازگشتی (۲۷) و (۲۸)، داریم:

$$\begin{aligned}
 f_h(\zeta_{11}, \dots, \zeta_{n1}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{n2}) = & \\
 (1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + (1-\rho) \sum_{i \in I_2} w_i & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_2)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_2)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 + \rho \sum_{i \in I_1 \cup I_2} w_i & \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_2)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i2} - b_2)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

تابع f_h دارای ۴ عبارت است که در اینجا هر عبارت را در یک سطر آورده‌ایم؛ بنابراین $\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_1}}$ برابر با جمع

مشتق هر سطر می باشد به عنوان نمونه مشتق سطر اول؛ یعنی :

$$(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

برابر است با :

$$\begin{aligned} & (1-\rho) w_i \frac{1}{p} \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{r} \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}-1} r (x_i + \zeta_{i_1} - a_1) \\ &= (1-\rho) w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}-1} (x_i + \zeta_{i_1} - a_1) \\ &= \frac{(1-\rho) w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{\left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(1-\rho) w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \end{aligned}$$

که

$$\begin{cases} Dx = \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ Sx_{a_1} = \left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \end{cases}$$

ولی از آنجایی که عبارت اول؛ یعنی:

$$(1-\rho) \sum_{i \in I_1} w_i \left(\left((x_i + \zeta_{i_1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{i_2} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

فقط برای $i \in I_1$ تعریف شده است؛ لذا مشتق بالا نیز فقط برای $i \in I_1$ به دست آمده است؛ یعنی :

$$\left. \frac{(1-\rho) w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \right|_{i \in I_1}$$

حال به طور مشابه اگر مشتقات عبارت سطرهای دوم و سوم و چهارم را نسبت به ζ_{i_1} نیز محاسبه کنیم به ترتیب

به عبارات زیر می‌رسیم :

$$\left. \frac{(1-\rho) w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_2)}{Dx \cdot Sx_{a_2}} \right|_{i \in I_2}$$

$$\left. \frac{\rho w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \right|_{i \in I_1 \cup I_2}$$

$$\left. \frac{\rho w_i (x_i + \zeta_{i_1} - a_2)}{Dx \cdot Sx_{a_2}} \right|_{i \in I_1 \cup I_2}$$

بنابراین مشتق $\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_1}}$ برابر با حاصل جمع مشتق هر ۴ سطر است؛ یعنی :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i1}} &= \frac{(1-\rho)w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \frac{(1-\rho)w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} \\ &+ \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1 \cup I_r} + \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_1 \cup I_r} \end{aligned}$$

در نتیجه :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i1}} &= \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} - \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} - \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} \\ &+ \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_r} + \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_1} + \frac{\rho w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i1}} &= \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_r} \\ &+ \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_1}, \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{ir}}$ نیز داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{ir}} &= \frac{w_i(y_i + \zeta_{ir} - b_1)}{Dx \cdot Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{ir} - b_1)}{Dx \cdot Sy_{b_1}} \Big|_{i \in I_r} \\ &+ \frac{w_i(y_i + \zeta_{ir} - b_r)}{D'x \cdot Sy_{b_r}} \Big|_{i \in I_r} + \rho \frac{w_i(y_i + \zeta_{ir} - b_r)}{D'x \cdot Sy_{b_r}} \Big|_{i \in I_1}. \end{aligned}$$

که:

$$\left\{ \begin{aligned} Dx &= \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ D'x &= \left(\left((x_i + \zeta_{i1} - a_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} + \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \\ Sx_{a_1} &= \left((x_i + \zeta_{i1} - a_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{a_r} &= \left((x_i + \zeta_{i1} - a_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{b_1} &= \left((y_i + \zeta_{ir} - b_1)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}, \\ Sx_{b_r} &= \left((y_i + \zeta_{ir} - b_r)^r + \epsilon \right)^{\frac{r-p}{r}}. \end{aligned} \right.$$

حال با مساوی صفر قرار دادن $\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{ir}}$ و $\frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i1}}$ به روابط ۲۷ و ۲۸ می‌رسیم که جزییات آن در زیر آمده است

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_1}} = & \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_1} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} \Big|_{i \in I_r} \\ & + \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_r} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \Big|_{i \in I_1} = 0. \end{aligned}$$

اگر $i \in I_1$ در این صورت :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial \zeta_{i_1}} = 0 \rightarrow & \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \rho \frac{w_i(x_i + \zeta_{i_1} - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} = 0. \\ \rightarrow & \frac{w_i(x_i - a_1)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{w_i \zeta_{i_1}}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i(x_i - a_r)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} + \frac{\rho w_i \zeta_{i_1}}{D'x \cdot Sx_{a_r}} = 0. \\ \rightarrow & \frac{w_i \zeta_{i_1}}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i \zeta_{i_1}}{D'x \cdot Sx_{a_r}} = \frac{w_i(a_1 - x_i)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i(a_r - x_i)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \\ \rightarrow & \zeta_{i_1} \left(\frac{w_i}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \right) = \frac{w_i(a_1 - x_i)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i(a_r - x_i)}{D'x \cdot Sx_{a_r}} \\ \rightarrow & \zeta_{i_1} = \frac{\frac{w_i(a_1 - x_i)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i(a_r - x_i)}{D'x \cdot Sx_{a_r}}}{\frac{w_i}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{\rho w_i}{D'x \cdot Sx_{a_r}}}; \quad i \in I_1 \end{aligned}$$

برای $i \in I_r$ نیز به صورت مشابه داریم:

$$\zeta_{i_1} = \frac{\frac{\rho w_i(a_1 - x_i)}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{w_i(a_r - x_i)}{D'x \cdot Sx_{a_r}}}{\frac{\rho w_i}{Dx \cdot Sx_{a_1}} + \frac{w_i}{D'x \cdot Sx_{a_r}}}; \quad i \in I_r$$

حال با استفاده از روش های تکراری همچون روش ژاکوبی $\zeta_{i_1}^k$ را با یک خطای از پیش تعیین شده می توان به

دست آورد؛ بنابراین :

$$\zeta_{i_1}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\frac{w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k \cdot Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i \alpha_{i_r}}{D'x^k \cdot Sx_{a_r}^k}}{\frac{w_i}{Dx^k \cdot Sx_{a_1}^k} + \frac{\rho w_i}{D'x^k \cdot Sx_{a_r}^k}} & i \in I_1 \\ \frac{\frac{\rho w_i \alpha_{i_1}}{Dx^k \cdot Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i \alpha_{i_r}}{D'x^k \cdot Sx_{a_r}^k}}{\frac{\rho w_i}{Dx^k \cdot Sx_{a_1}^k} + \frac{w_i}{D'x^k \cdot Sx_{a_r}^k}} & i \in I_r \end{cases}$$

که:

$$\begin{cases} \alpha_{i_1} = a_1 - x_i \\ \alpha_{i_r} = a_r - x_i \end{cases}$$

منظور از k در عبارات بالا تعداد تکرار است.

به طور مشابه برای k_{i2} نیز می توان این روابط را اثبات نمود.

منابع

- [۱۵] مدبر، ل.، علیزاده، ب.، باروقی، ف.، (۱۳۹۵). الگوریتم‌های بهینه برای مدل‌های مکانیابی ۲- مرکز ناخوشایند پشتیبان روی گراف‌های درختی، تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳(۲)، ۶۹-۸۳
- [1] Burkard, R. E., Pleschiutsching, C., Zhang, J. (2004). Inverse median problems, Discrete Optimization. 1, 23-39.
- [2] Galavii, M. (2008). Institute of Optimization and Discrete Mathematics, Graz University of Tech, Ph.D. Thesis. Graz, Austria.
- [3] Sepasian, A. R, Rahbarnia, F. (2015). An $(O(n \log(n)))$ alghorithm for the 1-median problem on the tree with variable vertex weight and edge reductions. Optimization, 64, 595-602.
- [4] Baroughi Bonab, F., Burkard, R. E., and Gassner, E. (2011). Inverse p- median locations problems with variable edge lengths. Mathematical Methods of Operation Research, 73, 263-280.
- [5] Baroughi Bonab, F., Burkard, R. E., and Gassner, E. (2011). Inverse p- median locations problems with variable edge lengths. Mathematical Methods of Operation Research, 73, 263-280.
- [6] Berman. O., Ingco. DI., Odoni, AR. ,(1992). Improving the location of minisum facility through network modification. Annals of Operations Research, 40, 1-16.
- [7] Burkard, R. E., Gassner, E., Hatzl, J. (2006). A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on cycle. Networks, 48, 16-23.
- [8] Burkard, R. E., Gassner, E., Hatzl, J. (2008). Reverse 2-median problems on trees. Discrete Applied Mathematics, 156, 1963-1976.
- [9] Wang Q., Bai Y. (2010). An Efficient Algorithm for Reverse 2-median Problem on A Cycle. JNW, 5, 1169-1176.
- [10] Jianfang Y., Juan J. (2012). Reverse 1-median problem with constraint in trees. The 2nd International Conference on Computer Application and System Modeling,
- [11] Kien, T. K., (2016). Reverse 1-center problem on weighted trees. Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 253-264.
- [12] Wang, H. L., Wu, B. Y., Chao, K. M., (2009). The backup 2-center and backup 2-median problems on trees. Networks, 53, 39-49.
- [13] Cheng, Y. K., Kang, L. Y., Yan, H., (2014). The backup 2-median problem on block graphs. Optimization Methods and Software, 164, 309-320.
- [14] Fathali, J., (2015). Backup multifacility location problem with lp norm. OPSEARCH, 52, 382-391.
- [16] Engelbrecht, P., (2007). Computational Intelligence An Introduction, Wiley, Second Edition.
- [17] Saleem. Saleh M., (2011). Knowledge-Based Solution to Dynamic Optimization Problems using Cultural Algorithms, Ph.D. thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan.
- [18] Reynolds, R., (1994). An Introduction to Cultural Algorithms, In Proceedings Of the 3rd Annual on Evolutionary Programming, World Scientific, River Edge, NJ, 131-139.