

## یک الگوریتم خطی برای مساله پیدا کردن هسته درخت‌های بازه‌ای وزن‌دار

سمانه متولی اشکذری<sup>۱</sup>، جعفر فتحعلی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی، شاهرود، ایران

رسید مقاله: ۱۸ آذر ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۵

### چکیده

در این مقاله ابتدا گراف‌های بازه‌ای را تعریف و سپس مساله‌ی پیدا کردن هسته روی گراف‌های بازه‌ای و درخت‌های بازه‌ای را بررسی می‌کنیم. یک هسته در یک گراف بازه‌ای، مسیری از بازه‌های متصل به هم است که مجموع فاصله‌های تمام بازه‌ها تا این مسیر کمینه شود. نشان می‌دهیم بازه‌هایی که روی هسته‌ی یک درخت قرار دارند نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. سپس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  برای پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای ارائه می‌دهیم.

**کلمات کلیدی:** گراف بازه‌ای، هسته درخت، مکانیابی.

### ۱ مقدمه

در جوامع امروزی، بهینه‌سازی در زمینه‌های مختلف اهمیت فراوانی برای صاحبان سرمایه و مدیران کارخانه‌ها دارد. پرکاربرد بودن این مسایل توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و تحقیقات فراوانی در این زمینه انجام شده‌است. یکی از مسایل مهم بهینه‌سازی، مساله‌ی مکانیابی است. این مساله انواع مختلفی دارد. اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکانیابی توسط هندلر و میرچندانی [۱] ارائه شد. پس از آن طبقه‌بندی‌های دیگری از جمله توسط هاماکر و نیکل [۲] انجام شد.

در یک شبکه با  $n$  رأس، مساله‌ی پیدا کردن مکان  $p$  سرویس‌دهنده روی شبکه به طوری که مجموع وزنی فاصله رؤس تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده مینیمم شود، مساله‌ی  $p$ -میانه نامیده می‌شود. هسین و تمیر [۳] مساله  $p$ -میانه را روی یک مسیر با وزن‌های مثبت در نظر گرفتند و برای حل آن الگوریتمی خطی با پیچیدگی زمانی

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: fathali@shahroodut.ac.ir

$O(pn)$  ارایه کردند. مایمانی [۴] و فتحعلی و همکاران [۵] مساله مکانیابی میانه را روی گراف‌های خاص بررسی کردند.

در مساله مکانیابی سرویس دهنده، سرویس دهنده می‌تواند به صورت یک مسیر در یک شبکه نیز مطرح شود. بنابراین مساله عبارت است از پیدا کردن مسیری از یک شبکه که مجموع فاصله‌های وزنی رئوس شبکه تا این مسیر کم‌ترین مقدار ممکن باشد. واضح است که برخلاف مساله  $p$ -میانه که سرویس دهنده‌ها بر روی چند نقطه‌ی جدا از هم قرار دارند، در این مساله سرویس دهنده یک وسیله‌ی بهم پیوسته است که بر روی یک مسیر قرار می‌گیرد. چنین مسیری را هسته‌ی شبکه و مساله را مساله‌ی هسته می‌نامند. مساله‌ی پیدا کردن هسته روی شبکه یا درخت به طور جداگانه قابل بررسی و دارای خواص متفاوتی است. پیدا کردن هسته یک درخت توسط مورگان و اسلیتر [۶] و بکر [۷] بررسی و الگوریتم‌هایی خطی برای حل آن پیشنهاد شده‌است. هم‌چنین حکیمی و همکاران [۸] در سال ۱۹۹۳ نشان داد که پیدا کردن مسیر بر روی شبکه یک مساله‌ی NP-سخت است. زعفرانیه و فتحعلی [۹] این مساله را روی شبکه‌های درختی با وزن مثبت و منفی مورد بررسی قرار دادند. سرویس دهنده‌ها در مسایل مکانیابی را می‌توان به صورت درخت نیز در نظر گرفت. این مساله توسط تمیر و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۵ بررسی شد.

مساله‌ی هسته مقید حالت دیگری از این مساله است که در آن طول مسیر مورد نظر باید از مقدار مشخصی مانند  $l$  کم‌تر شود. این حالت از مساله که به مساله‌ی  $l$ -هسته معروف است توسط نویسندگان مختلفی از جمله مراجع [۱۱-۱۴] مورد بررسی قرار گرفته‌است. هم‌چنین اگر هدف، یافتن زیردرختی با حداکثر  $k$  برگ باشد، مساله را مساله‌ی  $k$ -هسته می‌نامند. پنگ و همکاران [۱۵] دو الگوریتم با پیچیدگی زمانی  $O(kn)$  و  $O(n \log n)$  برای یافتن  $k$ -هسته‌ی یک درخت ارایه کردند.

حال اگر هدف یافتن زیردرختی با حداکثر  $k$  برگ و با قطر حداکثر  $l$  باشد که مجموع فاصله‌های رئوس درخت از زیردرخت انتخاب شده کمینه شود، مساله را مساله‌ی  $(K, L)$ -هسته می‌نامند که در آن قطر درخت، ماکزیمم فاصله بین دو رأس از درخت است. الگوریتمی با پیچیدگی  $O(n^2 \log n)$  برای حل این مساله بر روی درخت‌های بدون وزن و درخت‌های با وزن مثبت توسط بکر و همکارانش [۱۴] در سال ۲۰۰۲ ارایه شده‌است. متولی و همکاران [۱۶] الگوریتم آن‌ها را به حالت نیمه ناخوشایند یعنی درخت با وزن مثبت و منفی توسعه دادند. در این مقاله ما به بررسی مساله هسته بر روی گراف‌های بازه‌ای می‌پردازیم. یک گراف بازه‌ای مجموعه‌ای از بازه‌ها است که این بازه‌ها می‌توانند متناظر با رئوس یک گراف باشند به طوری که اگر یالی بین رأس  $v_i$  و  $v_j$  برقرار باشد، دوبازه متناظر با آن‌ها  $I_i$  و  $I_j$  دارای اشتراک هستند. گراف‌های بازه‌ای دارای ساختار توپولوژی مناسبی هستند. هم‌چنین ابزار مهمی در زمینه‌های کاربردی از جمله باستان‌شناسی، زیست‌شناسی، زمان‌بندی و کنترل ترافیک هستند [۱۷ و ۱۸]. به همین دلیل محققان زیادی علاقه‌مند به مطالعه بر روی گراف‌های بازه‌ای شدند (مراجع [۱۹-۲۱] را ببینید). مساله ۱-میانه روی گراف‌های بازه‌ای با وزن مثبت توسط بسپامیاتیخ و همکارانش [۱۹] بررسی شد. آن‌ها الگوریتمی خطی برای حل این مساله پیشنهاد کردند. چنگ و کانگ [۲۲] به بررسی

مساله p-ماکسین روی گراف‌های بازه‌ای پرداخته‌اند. قاسمی نیز در [۲۳] مساله‌ی P-ماکسین روی گراف‌های بازه‌ای که هر بازه دارای یک وزن مثبت است را بررسی کرده است. درخت‌های بازه‌ای حالت خاصی از گراف‌های بازه‌ای هستند که از هر بازه به بازه‌ی دیگر فقط یک مسیر وجود دارد و این گراف فاقد دور است. ساختار داده‌ای درخت‌های بازه‌ای در [۲۴] توسط ربیعی بررسی شده است. ما در این مقاله ابتدا هسته را در یک گراف بازه‌ای تعریف کرده، سپس با ارایه خواصی برای این مساله روی درخت‌های بازه‌ای الگوریتمی خطی برای پیدا کردن هسته درخت بازه‌ای ارایه می‌کنیم.

## ۲ مساله‌ی میانه بازه‌ای

فرض کنید  $G=(V,E)$  یک گراف با مجموعه رئوس  $V$  و مجموعه یال‌های  $E$  باشد. در یک گراف بازه‌ای هر رأس  $v_i$  تناظر یک به یک با بازه  $I_i$  دارد و یال  $(v_i, v_j) \in E$  در صورتی وجود دارد که  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . مساله p-میانه در یک گراف بازه‌ای عبارت است از یافتن p بازه یا سرویس‌دهنده روی شبکه با n بازه به عنوان نقاط تقاضا، به طوری که مجموع فاصله‌های n-p بازه‌ی دیگر تا p بازه مورد نظر کمینه شود.

در این مقاله طول هر یال را یک در نظر گرفته و اگر رأس  $v_i$  دارای وزن  $w_i$  باشد طول بازه  $I_i$  را  $w_i$  در نظر می‌گیریم. بنابراین یک گراف بازه‌ای مجموعه‌ای از بازه‌ها است که اگر دو بازه  $I_i$  و  $I_j$  با هم اشتراک داشته باشند، یالی بین رأس  $v_i$  و  $v_j$  برقرار است. هم‌چنین فرض کنید  $C(I_i, I_j)$  کوتاه‌ترین مسیر بازه‌های متصل  $I_i$  و  $I_j$  باشد. تعداد یال‌های روی  $C(I_i, I_j)$  را فاصله بین  $I_i$  و  $I_j$  در نظر گرفته و با  $d(I_i, I_j)$  نشان می‌دهیم. بنا بر تعاریف فوق مساله p-میانه در گراف‌های بازه‌ای عبارت است از پیدا کردن مجموعه  $I = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  به طوری که تابع هدف زیر کمینه شود:

$$F(I) = \sum_{k=1}^n w(I_k) \min_{1 \leq j \leq p} d(I_k, I_{i_j}) \quad (1)$$

فرض کنید  $I_i = [a_i, b_i]$  که  $a_i$  و  $b_i$  به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست بازه  $I_i$  هستند. فرض می‌کنیم هیچ دو بازه‌ای در مجموعه بازه‌های  $I$  نقاط انتهایی یکسانی ندارند و  $a_i < b_i$ . نقاط انتهایی بازه‌ها را مرتب کرده و در بردار  $L$  قرار می‌دهیم. بنابراین

$$L = \{p_1, p_2, \dots, p_{2n}\}$$

که  $p_i$ ها در آن یا  $a_i$  یا  $b_i$  هستند. بنابراین در این بردار اگر  $i < j$  آن گاه  $b_i < b_j$  و اگر انتهایی بازه‌ی  $I_i$  ابتدای بازه‌ی  $I_j$  باشد آن گاه در بردار  $L$ ،  $b_i$  قبل از  $a_j$  قرار می‌گیرد. چنگ و کانگ [۷] نشان داده‌اند که این برچسب‌گذاری در زمان  $O(n \log n)$  به دست می‌آید. اگر  $s$  کوچک‌ترین نقطه پایانی چپ و  $t$  بزرگ‌ترین نقطه پایانی راست باشد، آن گاه قرار می‌دهیم  $s = a_1$ ،  $t = b_n$  و  $L \in \{1, 2, \dots, n\}$ . هم‌چنین فرض می‌کنیم  $\bigcup_{i=1}^n I_i = [s, t]$ .

**تعریف ۱:** بازه‌ی  $I_i$  را در  $I$  ماکسیمال گوئیم، هر گاه مشمول هیچ بازه‌ی دیگری نباشد.

**تعریف ۲:** بازه‌ی  $I_i$  را در  $I$  مینیمال گوئیم، هر گاه شامل هیچ بازه‌ی دیگری نباشد و بازه‌ی ماکسیمالی مانند  $I_j$  وجود داشته باشد که شامل آن باشد.

برای ادامه بحث نیاز به لم زیر داریم که اثبات آن در [۲۱] آمده است.

**لم ۱:** اگر بازه‌ی  $I_i$  در بازه‌ی  $I_j$  قرار داشته باشد یعنی  $a_j < a_i < b_i < b_j$  آن‌گاه برای هر بازه‌ی دیگر مانند  $I_h$  ( $I_h \neq I_i, I_j$ ) داریم:

$$d(I_h, I_j) \leq d(I_h, I_i)$$

**قضیه ۱:** هیچ بازه‌ی مینیمالی نمی‌تواند کاندیدی برای جواب مساله ۱-میانه باشد.

**اثبات:** با توجه به لم ۱ اگر بازه‌ی  $I_i$  در بازه‌ی  $I_j$  قرار داشته باشد یا  $a_j < a_i < b_i < b_j$  آن‌گاه برای هر بازه‌ی دیگر  $I_h$  ( $I_h \neq I_i, I_j$ ) داریم:

$$d(I_h, I_j) \leq d(I_h, I_i)$$

بنابراین چون فاصله بازه‌های دیگر به  $I_j$  کم‌تر از  $I_i$  است و برای مینیمم شدن تابع  $F(I)$  کم‌ترین فاصله لازم است. بازه‌ی  $I_j$  می‌تواند جایگزین بازه  $I_i$  شود. بنابراین بازه  $I_i$  نمی‌تواند به عنوان کاندیدی برای مساله ۱-میانه در نظر گرفته شود.  $\square$

اگر  $q \in L$  یک نقطه پایانی از بازه‌ی  $I_i$  باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$I_i \cap I_j \neq \emptyset$$

هم چنین توابع  $F_{al}(q)$  و  $F_{ar}(q)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{al}(q) = \sum_{I_j \in L | a_j < q} w(I_j) d(I_j, I_i)$$

$$F_{ar}(q) = \sum_{I_j \in L | a_j > q} w(I_j) d(I_j, I_i)$$

بنابراین همان‌طور که در [۱۱] آمده‌است، برای یک کاندید ۱-میانه تابع هدف می‌تواند به صورت زیر فرمول‌بندی شود:

$$F(I_i) = \sum_{k=1}^n w(I_k) d(I_k, I_i) = F_{al}(a_i) + F_{ar}(a_i) \quad (2)$$

به طوری که بازه‌ای که تابع فوق را کمینه کند ۱-میانه است. هم چنین یانگ چنگ در [۱۱] نشان داده‌است که مساله‌ی ۱-ماکسین و ۱-میانه روی گراف‌های بازه‌ای که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند در زمان  $O(n)$  قابل حل هستند.

### ۳ مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای

هسته‌ی یک گراف مسیری است در گراف که مجموع فاصله‌ها از تمام رئوس تا این مسیر کمینه شود. بنابراین در یک گراف بازه‌ای یک هسته عبارت‌است از مجموعه‌ای از بازه‌های متصل بهم مانند  $I = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  که

مجموع فاصله‌ها از تمام بازه‌ها به این مسیر بازه‌ای کمینه شود. لذا با توجه به تعاریف فوق تابع هدف در این مساله را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$F(I) = \sum_{k=1}^n w(I_k) \min_{1 \leq j \leq p} d(I_k, I_{i_j}) \quad (3)$$

به طوری که  $\forall u \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  و  $I_{i_u} \cap I_{i_{u+1}} \neq \emptyset$ .

در ادامه به بررسی مساله پیدا کردن هسته روی یک درخت بازه‌ای می‌پردازیم.

**قضیه ۲:** در یک درخت بازه‌ای اگر دو بازه  $I_i$  و  $I_j$  که  $a_i \leq a_j$  و  $b_i \leq b_j$  با هم اشتراک داشته و یالی بین رئوس متناظر با آن‌ها موجود باشد، هیچ بازه‌ی  $I_h$  ( $I_h \neq I_i, I_j$ ) دیگری نمی‌تواند وجود داشته باشد به طوری که

$$a_j \leq a_h < b_h \leq b_i.$$

**اثبات:** فرض کنید بازه‌ی  $I_h$  وجود دارد که  $I_h \neq I_i, I_j$  و  $a_j \leq a_h < b_h \leq b_i$ . از آنجا که  $a_j \leq a_h < b_h \leq b_i$  و  $a_h < b_h \leq b_i$  و  $b_i \leq b_j$  بنابراین  $a_j < a_h \leq b_j$  یعنی بازه‌ی  $I_h$  با  $I_j$  دارای اشتراک است و  $I_j \cap I_h \neq \emptyset$ . هم چنین چون  $a_j \leq a_h$  و  $a_i \leq a_h$  بنابراین  $a_i \leq a_h$  می‌باشد و چون  $a_h < b_h \leq b_i$  لذا  $a_h \leq b_i$  در نتیجه  $a_i < b_h \leq b_i$  یعنی  $I_i \cap I_h \neq \emptyset$ . از طرفی طبق فرض  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  بنابراین  $I_i \cap I_h \cap I_j \neq \emptyset$  که نشان می‌دهد گراف دارای دور است و با فرض درخت بودن گراف تناقض دارد. □

**قضیه ۳:** اگر  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای  $G$  و  $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  هسته‌ی درخت  $G$  باشد. آن گاه

$$F(I_p) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

**اثبات:** می‌دانیم  $F(I_{i_1}) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1})$  با اضافه کردن بازه‌های  $I_{i_2}, I_{i_3}, \dots, I_{i_p}$  به مسیر  $I_{i_1}$  تشکیل می‌شود. به وضوح  $F(I_p) < F(I_{i_1})$  فرض کنید

$$F(I_p) = F(I_{i_1}) - E$$

که  $E > 0$ . ثابت می‌کنیم:

$$E = \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) + \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

برای بازه‌های  $I_j$  که  $b_{i_1} < a_j < b_j < b_{i_1}$ ، چون بازه‌ی  $I_j$  با  $I_{i_1}$  دارای اشتراک نیست و با  $I_{i_2}$  اشتراک دارد، پس  $d(I_j, I_{i_1}) = 2$  و  $d(I_j, I_{i_2}) = 1$ . از طرفی مجموع وزن‌های بازه‌های بین  $I_{i_1}$  و  $I_{i_2}$  به اندازه‌ی  $w_{ar}(I_{i_1}) - w_{ar}(I_{i_2})$  می‌باشد و از آنجا که فاصله تا  $I_{i_1}$ ، ۲ واحد است که یک واحد از آن فاصله تا  $I_{i_2}$  می‌باشد. بنابراین از مقدار  $F(I_{i_1})$  به اندازه‌ی  $w_{ar}(I_{i_1}) - w_{ar}(I_{i_2})$  کاسته می‌شود. هم چنین برای بازه‌های  $I_j$  که  $b_{i_2} < a_j < b_j < b_{i_2}$ ، چون بازه‌ی  $I_j$  با  $I_{i_2}$  دارای اشتراک نیست و با  $I_{i_1}$  اشتراک دارد، پس  $d(I_j, I_{i_1}) = 3$  و  $d(I_j, I_{i_2}) = 1$  و  $d(I_j, I_{i_3}) = 2$ . از طرفی مجموع وزن‌های بازه‌های بین  $I_{i_2}$  و  $I_{i_3}$  به اندازه‌ی

$I_{i_r}$  می‌باشد و از آن‌جا که فاصله تا  $I_{i_l}$ ، ۳ واحد است که یک واحد از آن فاصله تا  $I_{i_r}$  می‌باشد و  $d(I_{i_l}, I_{i_r}) = 2$ . بنابراین  $F(I_{i_l})$  به اندازه‌ی  $2[w_{ar}(I_{i_r}) - w_{ar}(I_{i_l})]$  کاهش می‌یابد. با ادامه این روند برای بازه‌های  $I_j$  که  $b_{i_{p-1}} < a_j < b_j < b_{i_p}$  داریم؛  $d(I_j, I_{i_l}) = p$  و  $d(I_j, I_{i_k}) = 1$  که به اندازه‌ی  $(p-1)[w_{ar}(I_{i_{p-1}}) - w_{ar}(I_{i_p})]$  و برای بازه‌های  $I_j$  که  $b_{i_p} < a_j$  اگر  $d(I_j, I_{i_p}) = k$ ، چون  $d(I_j, I_{i_l}) = p + k - 1$  بنابراین به اندازه  $(p-1)w_{ar}(I_{i_p})$  از مقدار  $F(I_{i_l})$  کم می‌شود. از طرف دیگر خود بازه‌های  $I_{i_r}, I_{i_r}, \dots, I_{i_p}$  که در مسیر قرار گرفته شده‌اند نیز مقدار  $F(I_{i_l})$  را کاهش می‌دهند این بازه‌ها در محاسبات قبل به طور کامل محاسبه نمی‌شوند. مثلاً بازه‌ی  $I_j$  در

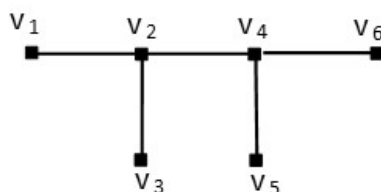
$$(j-2)[w_{ar}(I_{i_{j-2}}) - w_{ar}(I_{i_{j-1}})]$$

در نظر گرفته می‌شود اما  $d(I_j, I_{i_l}) = j-1$  بنابراین برای هر بازه‌ی  $I_j$ ،  $j = 2, 3, \dots, p$  به اندازه‌ی  $w_{ar}(I_{i_j})$  باید از مقدار  $F(I_p)$  کم کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} F(I_p) &= F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - [w_{ar}(b_{i_1}) - w_{ar}(b_{i_r})] \\ &- 2[w_{ar}(b_{i_1}) - w_{ar}(b_{i_r})] - \dots - (p-1)[w_{ar}(b_{i_{p-1}}) - w_{ar}(b_{i_p})] - pw_{ar}(b_{i_p}) = \\ &F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j}). \end{aligned}$$

مثال زیر کاربرد قضیه ۳ را نشان می‌دهد.

**مثال ۱:** گراف نشان داده شده در شکل ۱ همراه با وزن رئوسی که در جدول ۱ آمده است را در نظر بگیرید. بازه‌ای متناظر با گراف شکل ۱ در شکل ۲ آمده است.



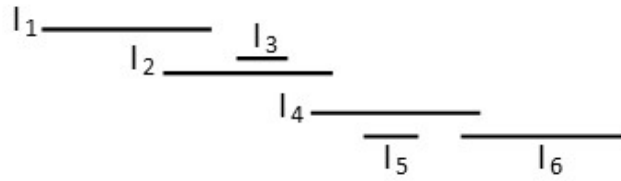
شکل ۱. گراف بازه‌ای

جدول ۱. وزن رئوس گراف شکل ۱

$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$
۲	۲	۱	۲	۱	۲

برای بازه‌ی  $I_v$ ، مقدار تابع هدف به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$F(I_v) = F_{al}(a_v) + F_{ar}(a_v) = 2 + 9 = 11$$



شکل ۲. بازه‌های متناظر با گراف شکل ۱

حال اگر مسیر  $I = \{I_r, I_f, I_s\} = \{I_i, I_{i_r}, I_{i_f}\}$  را در نظر بگیریم. داریم:

$$F(I) = F_{al}(a_r) + F_{ar}(a_r) - \sum_{j=1}^r w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^r w(I_{i_j}) = 11 - 3 - 3 = 5$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۳ اگر مقدار تابع هدف را در ابتدای مسیر داشته باشیم با استفاده از مجموع وزن‌ها با محاسبات کم‌تری می‌توان مقدار تابع هدف را برای مسیر مورد نظر به دست آورد. هم‌چنین با استفاده از این قضیه می‌توان تغییرات تابع هدف را در زمان اضافه و کم شدن بازه‌ها به راحتی به دست آورد.

**نتیجه ۱:** اگر  $I_1$  بازه‌ای در درخت بازه‌ای  $G$  و  $F(I_1) = F_{al}(a_1) + F_{ar}(a_1)$  و  $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_p}\}$  مسیری از درخت  $G$  باشد. آن‌گاه

$$F(I_p) = F(I_1) - w_{ar}(b_1) - w(I_r)$$

**قضیه ۴:** اگر  $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  یک هسته‌ی درخت  $G$  باشد هیچ یک از بازه‌های  $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_{p-1}}$  بازه مینیمال نیستند.

**اثبات:** طبق قضیه ۱ اگر بازه‌ی  $I_{i_j}$ ،  $j = 2, 3, \dots, p$  یک بازه‌ی مینیمال باشد بازه ماکسیمالی مشمول آن مانند  $I_{i_k}$  وجود دارد که فاصله‌ی بازه‌های دیگر تا آن از  $I_{i_j}$  کم‌تر است. بنابراین  $I_{i_k}$  می‌تواند جایگزین  $I_{i_j}$  باشد. □

**نتیجه ۲:** اگر  $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  یک هسته‌ی درخت  $G$  باشد هیچ یک از بازه‌های  $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}$  نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. به عبارت دیگر تمام بازه‌های روی هسته ماکسیمال هستند.

**قضیه ۵:** اگر  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای  $G$  و  $I_p = \{I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_p}\}$  مسیری از درخت  $G$  باشد و  $I_k = \{I_{i_k}, I_{i_{k+1}}, \dots, I_{i_p}\}$  که  $1 < k < p$  آن‌گاه

$$F(I_k) = F(I_p) - F_{al}(a_{i_1}) - F_{ar}(a_{i_1}) + F_{al}(a_{i_k}) + F_{ar}(a_{i_k}) - \sum_{j=1}^{k-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^k w(I_{i_j})$$

**اثبات:** از قضیه ۳ داریم:

$$F(I_p) = F_{al}(a_{i_1}) + F_{ar}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j})$$

و

$$F(I_k) = F_{al}(a_{i_k}) + F_{ar}(a_{i_k}) - \sum_{j=k}^{p-1} w_{ar}(b_{i_j}) - \sum_{j=k+1}^p w(I_{i_j})$$

برای یافتن اختلاف  $F(I_p)$  و  $F(I_k)$ ، تفاضل دو رابطه‌ی فوق را به دست می‌آوریم.

$$F(I_p) - F(I_k) = F_{aL}(a_{i_1}) + F_{aR}(a_{i_1}) - \sum_{j=1}^{p-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^p w(I_{i_j}) -$$

$$[F_{aL}(a_{i_k}) + F_{aR}(a_{i_k}) - \sum_{j=k}^{p-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=k+1}^p w(I_{i_j})] = F_{aL}(a_{i_1}) + F_{aR}(a_{i_1}) - F_{aL}(a_{i_k})$$

بنابراین

$$F(I_k) = F(I_p) - F_{aL}(a_{i_1}) - F_{aR}(a_{i_1}) + F_{aL}(a_{i_k}) + F_{aR}(a_{i_k}) - \sum_{j=1}^{k-1} w_{aR}(b_{i_j}) - \sum_{j=2}^k w(I_{i_j}).$$

### ۳-۱ الگوریتم

با استفاده از قضایا و نتایج فوق می‌توان الگوریتمی برای به دست آوردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای پیشنهاد کرد. به این صورت که اگر سمت چپ‌ترین بازه  $I_1$  باشد،  $F(I_1)$  را محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی ۴ و نتیجه‌ی ۲ بازه‌های مینیمال نمی‌توانند کاندیدی برای قرار گرفتن در هسته باشند و بازه‌های ماکسیمال هسته را تشکیل می‌دهند. بنابراین برای ساختن هسته از  $I_1$  شروع کرده و از بین بازه‌هایی است که شامل  $b_1$  هستند بازه‌ی ماکسیمال  $I_p$  را که بزرگ‌ترین نقطه‌ی انتهایی  $b_p$  را دارد انتخاب و آن را  $RSUC(I_1)$  نامیده و به مسیر  $I_p = \{I_1\}$  اضافه می‌کنیم. بنابراین  $RSUC(I_1) = I_p$  که در آن همانند [۶] برای هر نقطه  $q$  روی خط حقیقی  $RSUC(q) = I_k$  اگر  $b_k = \max\{b_i | q \in I_i\}$  و برای هر بازه  $I_j$  تعریف می‌کنیم  $RSUC(I_j) = RSUC(b_j)$ . بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱ داریم:

$$F(I_p) = F(I_1, I_p) = F(I_1) - w_{aR}(b) - w(I_p)$$

حال  $RSUC(I_p)$  را یافته و آن را  $I_p$  نامیده و به مسیر اضافه می‌کنیم. با ادامه‌ی این روند رابطه‌ی بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم.

$$F(I_p) = F(I_1, I_p, \dots, I_k) = F(I_1, I_p, \dots, I_{k-1}) - w_{aR}(b_{k-1}) - w(I_k) \quad (۴)$$

اضافه شدن بازه‌ها به مسیر را تا سمت راست‌ترین بازه ادامه می‌دهیم. مسیر به دست آمده هسته می‌باشد.

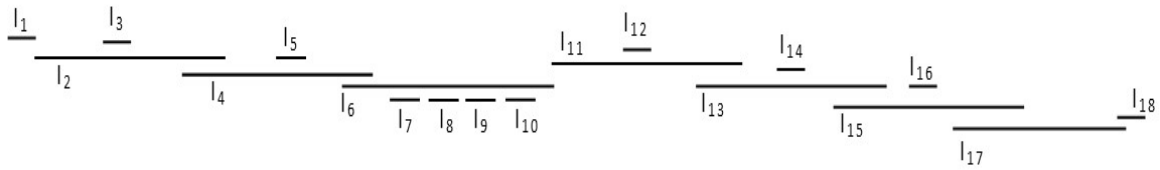
**قضیه ۶:** مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند، می‌تواند در زمان  $O(n)$  حل شود.

**اثبات:** فرض کنیم  $I = \{I_1, I_p, \dots, I_n\}$  مجموعه‌ی بازه‌ها در درخت بازه‌ای  $G$  باشد. با توجه به الگوریتم ارایه شده، در بدترین حالت اگر  $n$  بازه‌ی ماکسیمال متصل به هم داشته باشیم، هسته شامل تمام بازه‌ها است. مقدار  $F(I_n)$  می‌تواند در زمان ثابت محاسبه شود و چون  $n$  بازه داریم، مساله‌ی پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای

که نقاط پایانی آن‌ها مرتب شده‌اند، می‌تواند در زمان  $O(n)$  حل شود. □

**مثال ۲:** بازه‌های شکل ۳ را در نظر بگیرید. که وزن رئوس در جدول ۲ داده شده‌است.





شکل ۳. بازه‌های مثال ۲

جدول ۲. وزن رئوس متناظر با بازه‌های شکل ۳

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$
۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱

$w_{11}$	$w_{12}$	$w_{13}$	$w_{14}$	$w_{15}$	$w_{16}$	$w_{17}$	$w_{18}$
۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱	۱	۰/۱

برای به دست آوردن هسته‌ی آن طبق الگوریتم از سمت چپ‌ترین بازه شروع می‌کنیم. بنابراین

$$F(I_p) = F(I_1) = ۳۲/۷$$

سپس برای اضافه کردن بازه‌ی بعدی به مسیر، بازه‌ی  $I_2$  را انتخاب می‌کنیم زیرا  $RSUC(I_2) = I_2$ .

$$F(I_p) = F(I_1, I_2) = F(I_1) - w_{ar}(b_1) - w(I_2) = ۳۲/۷ - ۷ - ۱ = ۲۴/۷$$

داریم:  $RSUC(I_2) = I_2$  بنابراین بازه‌ی  $I_3$  به مسیر اضافه می‌شود.

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3) = F(I_2) - w_{ar}(b_2) - w(I_3) = ۲۴/۷ - ۵/۹ - ۱ = ۱۷/۸$$

به همین ترتیب در هر مرحله RSUC آخرین بازه را به دست آورده و به مسیر اضافه می‌کنیم. این روند را تا رسیدن

به سمت راست‌ترین بازه یعنی  $I_{18}$  ادامه می‌دهیم.

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4) = F(I_3) - w_{ar}(b_3) - w(I_4) = ۱۷/۸ - ۴/۸ - ۱ = ۱۲$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}) = F(I_4) - w_{ar}(b_4) - w(I_{11}) = ۱۲ - ۳/۴ - ۱ = ۷/۶$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}, I_{13}) = F(I_{11}) - w_{ar}(b_{11}) - w(I_{13}) = ۷/۶ - ۲/۳ - ۱ = ۴/۳$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}, I_{13}, I_{15}) = F(I_{13}) - w_{ar}(b_{13}) - w(I_{15}) = ۴/۳ - ۱/۲ - ۱ = ۲/۱$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}) = F(I_{15}) - w_{ar}(b_{15}) - w(I_{17}) = ۲/۱ - ۰/۱ - ۱ = ۱$$

$$F(I_p) = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}, I_{18}) = F(I_{17}) - w_{ar}(b_{17}) - w(I_{18}) = ۱ - ۰/۱ = ۰/۹$$

بنابراین هسته‌ی گراف بازه‌ای فوق مسیر  $P = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_{11}, I_{13}, I_{15}, I_{17}, I_{18}\}$  است و  $F(I_p) = ۰/۹$

می‌باشد.

## ۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی مساله پیدا کردن هسته روی درخت‌های بازه‌ای پرداختیم و نشان دادیم بازه‌هایی که روی هسته‌ی یک درخت قرار دارند نمی‌توانند بازه‌ای غیر ماکسیمال باشند. سپس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  برای پیدا کردن هسته‌ی یک درخت بازه‌ای ارائه دادیم. در مطالعات بعدی می‌توان هسته‌ی درخت با محدودیت طول در نظر گرفت. بنابراین هدف یافتن هسته‌ای با طول  $L$  روی درخت بازه‌ای است. هم‌چنین می‌توان مساله را از یافتن هسته به  $(K, L)$ -هسته تغییر داد که در این حالت هدف یافتن زیردرختی با طول حداکثر  $L$  و تعداد برگ‌های حداکثر  $K$  است که مجموع فاصله‌های تمام بازه‌ها تا این زیردرخت کمینه شود.

## منابع

- [۲۱] امینی، ف.، (۱۳۸۸). گراف‌های بازه‌ای کاوشگر. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۳(۲۲)، ۷۰-۶۱.
- [۲۳] قاسمی، ح.، (۱۳۹۱)، مساله مکانیابی  $p$ -ماکسین، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی.
- [۲۴] ربیعی، ا.، (۱۳۹۴)، گراف بازه‌ای و کاربردهایش، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده ریاضی.
- [1] Handler, G. Y., Mirchandani, P. B., (1979). Location On Network. Theory And Algorithms, Cambridg.
- [2] Hamacher, H. W., Nickel, S., (1998). Classification of location models. Location science, 6, 229-242.
- [3] Hassin, R., Tamir, A., (1991). Improved complexity bounds for location problems on the real line. Operation Research Letters, 10, 395-402.
- [4] Maimani, H. R., (2008). Median and center of zero-divisor graph of commutative semigroups. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 3, 69-76.
- [5] Fathali, J., Jafari-Rad, N., Sherbaf, S. R., (2014). The  $p$ -median and  $p$ -center problems on bipartite graphs. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 9, 37-43.
- [6] Morgan, C. A., Slater, P. J., (1980). A linear algorithm for a core of atree. Journal of Algorithms, 1, 247-258.
- [7] Becker, R. I., (1990). Inductive algorithms on finite trees. Quaest Math., 13, 165-181.
- [8] Hakimi, S. L., Schmeichel, E. F., Labbe, M., (1993). On locating path or tree shaped facilities on network. Networks, 23, 543-555.
- [9] Zaferanieh, M, Fathali, J., (2012). Finding a core of a tree with pos/neg weight. Math. Meth. Oper. Res., 26, 147-160.
- [10] Tamir, A., Puerto, J., Mesa, J. A., Rodriguez-chia, A. M., (2005). Conditional location of path and tree shaped facilities on trees, Journal of Algorithms, 56, 50-75.
- [11] Peng, S., Lo, W., (1996). Efficient algorithms for finding a core of a tree with a specified length, Journal of Algorithms, 20, 445-458.
- [12] Minioka, E., Patel, N. H., (1983). On finding the core of a treewith a specified length. J. Alg., 345-352.
- [13] Becker, R. I., Chang, Y. I., Lari, I., Scozzari, A., and Storchi, G., (2002). Finding the  $l$ -core of a tree, Discrete Applied Mathematics, 118, 25-42.
- [14] Becker, R. I., Lari, I., Storchi, G., Scozzari, A., (2002). Efficient algorithms for finding the  $(k, l)$ -core of tree networks. Networks, 40, 208-215.
- [15] Peng, S. T., Stephens, A. B., Yesha, Y., (1993). Algorithms for a core and  $k$ -tree core of a tree. Journal of Algorithms, 15, 143-159.
- [16] Motevalli, S., Fathali, J., Zaferanieh, M., (2015). An efficient algorithm for finding the semi-obnoxious  $(k, l)$ -core of a tree. Journal of Mathematical Modeling, 3, 129-144.
- [17] Halldorsson, M. M., Kortsarz, G., Shachnai, H., (2003). Sum coloring interval and  $k$ -claw free graphs with application to scheduling dependent jobs. Algorithmica, 37, 187-209.
- [18] Irani, S., Leung, V., (2003). Scheduling with conflicts on bipartite interval graphs. J. Scheduling, 6, 287-307.

- [19] Bespamyatnikh, S., Bhattacharya, B., Keil, M., Kirkpatrick, D., Segal, M., (2002). Efficient algorithms for centers and medians in interval and circular-arc graphs. *Networks*, 29, 144-152.
- [20] Cheng, T. C. E., Kang, L. Y., Ng, C. T., (2007). An improved algorithm for the p-center problem on interval graphs with unit lengths. *Comput. Oper. Res.*, 34, 2215-2222.
- [22] Cheng, Y., Kang, L., (2010). The p-maxian problem on interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158, 1986-1993.