مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۲)، پاییز ۹۸، ص‌ص ۱۲۲-۱۱۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک مساله حمل و نقل خاکستری در محیط فازی

سید هادی ناصری[1*]، بابک خبیری[2]

۱- دانشیار، دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۸ مرداد ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۹ بهمن ۱۳۹۵

چکیده

در مدل‌های حمل و نقل کلاسیک همواره فرض می‌شود که پارامترهایی مانند مسافت از هر گره عرضه به هر گره تقاضا یا هزینه انتقال کالا از یک گره به گره دیگر و همچنین مواردی مانند میزان عرضه و تقاضا مقادیری قطعی و معین هستند؛ اما در مسایل واقعی، درنظر گرفتن این فرض‌ها واقع‌بینانه نیست. از سوی دیگر، ممکن است در مدل‌سازی ریاضی یک مساله واقعی با انواع ابهام در داده‌ها به‌طور هم‌زمان مواجه باشیم که؛ حتی از یک جنس نباشند. در این مقاله یک مساله حمل و نقل را در نظر می‌گیریم که در آن دو نوع ابهام از جنس فازی و خاکستری به‌طور همزمان ظاهر می‌شود. در مدل مورد مطالعه، ضرایب تابع هدف خاکستری و مقادیر عرضه و تقاضا فازی در نظر گرفته شده است. در این مقاله ثابت می‌کنیم که با سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی، می‌توان جواب مساله مورد مطالعه را با حل یک مساله حمل و نقل قطعی وابسته به دست آورد. برای تشریح فرایند حل یک مثال عددی، ارایه شده است.

کلمات کلیدی: مساله حمل و نقل، اعداد خاکستری، اعداد فازی، مدل‌سازی، عدم قطعیت، سفیدسازی.

۱ مقدمه

در مسایل کلاسیک بهینه‌سازی ریاضی، با فرض اینکه اطلاعات مربوط به مساله مورد مطالعه دقیق و قطعی باشد، می‌توان به کمک روش‌های معمولی آن را با به‌دست آوردن نتایج دقیق حل نمود. در هر صورت، ممکن است موقعیت‌ها و شرایط فراوانی در یک مساله واقعی به‌وجود آید که قابل پیش‌بینی نیستند. به‌ویژه در مورد مسایل مهندسی یا شاخه‌های مختلف تحقیق در عملیات، تصمیم‌گیرنده مجبور است در شرایط عدم قطعیت تصمیم‌گیری کند و به‌طور طبیعی برخی عناصر نادقیق یا نادرست وارد مدل می‌شوند. برای تعریف پارامترهای نادرست یا نادقیق و مبهم ظاهر شده در مسایل تحقیق در عملیات و مدیریت، از رویکردهای گوناگونی استفاده می‌شود. برای

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

مثال در رویکرد تصادفی، پارامترهای نادقیق، به‌صورت متغیرهای تصادفی مطابق برخی توزیع‌های احتمال شناخته‌شده در نظر گرفته می‌شوند [۱]. از طرف دیگر، در رویکردهای فازی، عدم قطعیت را مانند یک مجموعه فازی با تابع عضویت مناسب یا عدد فازی نشان می‌دهند. همچنین، در برخی از موارد، هر دو رویکرد برای مقابله با نادقیق بودن به‌کار برده می‌شوند. پس از معرفی نظریه مجموعه فازی توسط زاده [۲]، و سپس با معرفی مفهوم تصمیم‌گیری فازی توسط بلمن و زاده [۳] در سال ۱۹۷۰، به‌طور گسترده‌ای، به‌ویژه در بهینه‌سازی مورد مطالعه قرار گرفت [۴]. اساسا در این رویکردها، سؤالی که مطرح می‌شود این است که انتخاب تابع توزیع‌های احتمال یا تابع عضویت چگونه انجام می‌شود؟ در حقیقت در محیط نادقیق همواره با چالش همراه است و پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. برای غلبه بر این مشکلات، مفهوم اعداد خاکستری توسط دنگ [۵] معرفی شد و سپس به طور گسترده در زمینه‌های گوناگون از جمله بهینه‌سازی مورد توجه قرار گرفت [۶-۱۰]. (در حقیقت، عدد خاکستری عددی غیرقطعی است که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه‌ای از اعداد اتخاذ می‌کند. دامنه یک عدد خاکستری ممکن است یک بازه و یا یک مجموعه اعداد باشد). یکی از مسایل بسیار مهم و کاربردی مرتبط با بهینه‌سازی مساله حمل و نقل است. به‌طور کلی در یک مساله حمل و نقل، هدف ما پیدا کردن کم‌ترین هزینه ممکن برای انتقال یک کالا از تعدادی منبع (مانند کارخانه) به تعدادی مقصد (مانند عمده‌فروشان) است. در این مسایل اطلاعاتی که در اختیار داریم، شامل سطح موجودی منبع و سطح تقاضای مقصد و همچنین هزینه انتقال یک واحد از کالا از هر منبع به هر مقصد است. در این مقاله فرض می‌کنیم برای انتقال کالا یک نوع وسیله نقلیه وجود دارد و یک کالا منتقل می‌گردد. واضح است یک گره تقاضا می‌تواند کالای خود را از بیش از یک گره عرضه‌کننده دریافت نماید؛ لذا هدف ما این است که مشخص نماییم چه مقدار کالا باید از هر منبع به هر تقاضا ارسال گردد تا هزینه انتقال کل را کمینه کنیم. فرض کنید در یک شبکه جریان، m گره عرضه و n گره تقاضا وجود داشته باشد. فرض کنید مقدار موجودی در گره عرضه iام با a_i نشان داده شده و مقدار درخواست در گره تقاضای j ام را با b_j نشان دهیم. همچنین فرض کنید هزینه انتقال یک واحد کالا بین گره عرضه i و گره تقاضای j برابر با c_{ij} است و x_{ij} نشان‌دهنده مقدار منتقل شده از عرضه i به تقاضای j باشد. در این‌صورت، مدل حمل و نقل کلاسیک به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} c_{ij}x_{ij},\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} \le a_i\ , \qquad i=۱,\dots,m,\\
&\qquad \sum_{i=۱}^{m} x_{ij} \ge b_j, \qquad j=۱,\dots,n,\\
&\qquad x_{ij}\ge ۰\ ,\ i=۱,\dots,m \quad , \quad j=۱,\dots,n.
\end{aligned}
$$

دسته اول محدودیت‌ها بیان می‌کند که مجموع جریان منتقل‌شده کل از یک گره عرضه نمی‌تواند بیش‌تر از موجودی آن باشد و دسته دوم از محدودیت‌ها نشان می‌دهد که مقدار جریان ورودی به یک گره عرضه نباید از مقدار تقاضا کم‌تر باشد. از این‌رو موجودی کل گره‌های عرضه، یعنی $\sum_{i=1}^{m} a_i$ بزرگ‌تر یا مساوی مقدار کل تقاضاها؛ یعنی $\sum_{j=1}^{n} b_j$ است. هنگامی که عرضه کل برابر با تقاضای کل باشد؛ یعنی $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ می‌گوییم مدل حمل و نقل متعادل است و در غیراین‌صورت آن‌را نامتعادل گوییم.

در مدل‌های حمل و نقل همواره فرض می‌شود مسافت از یک گره مبدا به گره تقاضا یا هزینه انتقال جریان مقداری معین است؛ اما در موقعیت‌های عملی ممکن است این فرض منطقی نباشد. از سوی دیگر، در برخی از مدل‌های ریاضی در جهان واقعی ممکن است نوعی از ابهام ظاهر شود. فرض وجود چند نوع همزمان عدم قطعیت پارامترها شامل خاکستری، فازی یا تصادفی اخیرا مورد توجه قرار گرفته است که در این مورد پیش از این مطالبی بیان گردید. در این مقاله یک مساله حمل و نقل را درنظر می‌گیریم که در آن ممکن است عدم قطعیت در پارامترهای مختلف آن و از دو نوع فازی و خاکستری رخ دهد. چاناس و کوچتا [۱۱] و سعد و سمیر [۱۲] الگوریتم‌هایی برای حل مساله حمل و نقل در محیط فازی ارایه دادند. گائو و لیو[۱۳] با درنظر گرفتن یک مساله چندهدفه حمل و نقل در محیط فازی یک الگوریتم دو فازی برای حل آن پیشنهاد دادند. این مساله در محیط فازی و/یا با اعداد خاکستری در [۱۴-۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. در اینجا فرض ما بر این است که خاکستری بودن در ضرایب هزینه و فازی بودن در محدودیت‌ها رخ می‌دهد. در این بخش نشان می‌دهیم که مساله حمل و نقل خاکستری فازی را می‌توان توما یا در دو مرحله با سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی حل کرد.

بای و همکاران [۱۴] یک مدل مناسب برای مساله حمل و نقل در فضای عدم قطعیت بر پایه نظریه سیستم خاکستری ارایه دادند. در مدل آن‌ها، فرض بر این است که فقط ضرایب هزینه نامعین هستند. در این مقاله، تعمیمی از مدل آن‌ها ارایه خواهیم داد که با موقعیت‌های واقعی سازگارتر است. به طوری که ضرایب تابع هدف از نوع خاکستری و مقادیر عرضه و تقاضا شامل پارامترهای فازی هستند و سپس روشی برای حل این مدل پیشنهاد می‌کنیم.

در ادامه، ابتدا در بخش ۲ مفاهیم پایه در ارتباط با اعداد خاکستری، سفیدسازی، اعداد فازی، غیرفازی‌سازی و مفاهیم مرتبط بیان خواهد شد. در بخش ۳ ابتدا یک مدل حمل و نقل خاکستری فازی معرفی شده و سپس یک روش برای حل آن پیشنهاد می‌شود که بر اساس رویکردهای متداول رتبه‌بندی و غیرفازی‌سازی اعداد فازی از یک سو و نیز رویکرد سفیدسازی اعداد خاکستری عمل می‌کند. این روش با یک مثال عددی در بخش ۴ تشریح می‌شود تا سادگی و مطلوبیت فرایند نمایان شود. در بخش ۵ نیز نتایج مطالعات انجام شده در این مقاله بیان خواهد شد.

۲ پیشنیازها

در این بخش، برخی از مفاهیم پایه و پیشنیازهای اساسی در ارتباط با نظریه‌های سیستم‌های خاکستری و فازی بیان خواهد شد.

یک عدد خاکستری معمولا به‌وسیله نماد $\otimes x$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف ۲-۱ عدد خاکستری، عددی است که کران بالا و پایین آن مشخص است؛ اما مقدار آن در میان بازه مشخص نیست. یک عدد خاکستری را به صورت ریاضی می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}] = \{t : \underline{x} \le t \le \overline{x}\}$$

که در آن $\otimes x$ عدد خاکستری، t اطلاعات، $\underline{x}$ و $\overline{x}$ کران پایین و کران بالای اطلاعات می‌باشند.

در ادبیات موضوع، انواع گوناگونی از اعداد خاکستری تعریف گردیده است [۱۸] که در اینجا اعداد خاکستری بازه‌ای مورد استفاده ما هستند.

تعریف ۲-۲ عدد خاکستری بازه‌ای، عددی است با حد پایین $\underline{x}$ و حد بالای $\overline{x}$:

$$\otimes x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$$

تعریف ۲-۳ وقتی $\otimes \in [-\infty, \infty]$ یا $x \in [\otimes_{1}, \otimes_{2}]$ باشد، بدین معنی که حد بالا و پایین وجود نداشته باشد، آن را عدد سیاه می‌نامند. همچنین وقتی $\otimes \in [\underline{a}, \overline{a}]$ و $\underline{a} = \overline{a}$ باشد عدد سفید نامیده می‌شود.

تذکر۲-۱ برای هر عدد حقیقی a، نماد $\otimes a$ را به عنوان عدد خاکستری متناظر با آن می‌شناسیم و در واقع $\otimes a \in [a, a]$؛ یعنی هر عدد حقیقی یک عدد سفید است؛ بنابراین، بدون خلل در کلیت، فرض می‌کنیم $\otimes 0 \in [0, 0]$ عدد خاکستری صفر است.

مجموعه همه اعداد خاکستری را با $R(\otimes)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، یک عضو $R(\otimes)$؛ یعنی $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ را با $[\underline{x}, \overline{x}]_G$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-٤ فرض کنید $\otimes_{1} \in [a,b], a<b$ و $\otimes_{2} \in [c,d], c<d$. مجموع $\otimes_{1}$ و $\otimes_{2}$ به صورت $\otimes_{1} + \otimes_{2}$ نوشته می‌شود و به صورت $\otimes_{1} + \otimes_{2} \in [a+c, b+d]$ تعریف می‌شود. همچنین قرینه $\otimes_{1}$ به صورت $-\otimes_{1}$ نوشته می‌شود و به صورت $-\otimes_{1} \in [-b, -a]$ تعریف می‌شود.

با توجه به تعریف بالا، $\otimes x - \otimes x = 0$.

تعریف ۲-۵ فرض کنید $\otimes_{1} \in [a,b], a<b$ و $\otimes_{2} \in [c,d], c<d$. ضرب $\otimes_{1}$ و $\otimes_{2}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes_{1}.\otimes_{2} \in \left[min\{ac, ad, bc, bd\}, max\{ac, ad, bc, bd\}\right]$$

تعریف ۲-٦ فرض کنید $\otimes \in [a,b], a<b$ و k یک عدد حقیقی مثبت باشد. ضرب اسکالر k در $\otimes$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k.\otimes \in [ka, kb].$$

تعریف ۲-۷ مقدار سفیدشده یک عدد خاکستری $\otimes x$ را با $\tilde{\otimes} x$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت یک عدد قطعی تعریف می‌شود که مقدار آن بین کران‌های بالا و پایین $\otimes x$ است؛ یعنی:

$$\underline{x} \le \tilde{\otimes} x \le \overline{x}$$

در واقع برای عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes \in [a,b]$، مقدار سفیدشده $\tilde{\otimes}$ به صورت:

$$\tilde{\otimes} = \alpha a + (1-\alpha) b, \alpha \in [0,1]$$

خواهد بود.

تعریف ۲-۸ برای عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]$، که در آن $\underline{x} \le \overline{x}$، مقدار $\otimes \hat{x} = \frac{1}{2}(\underline{x} + \overline{x})$ را هسته عدد خاکستری $\otimes x$ گوییم.

یکی از مفاهیم مهم در ارتباط با اعداد خاکستری، بحث رتبه‌بندی آن‌ها می‌باشد. تاکنون روش‌های گوناگونی برای مقایسه دو عدد خاکستری پیشنهاد گردیده است که یکی از آن‌ها مقایسه اعداد خاکستری به‌وسیله مقادیر سفیدسازی متناظر آن‌ها است [۱۹]. یک رویکرد مناسب و عملی برای مرتب‌سازی اعضای $R(\otimes)$، تخصیص یک مقدار سفیدسازی به هر عدد خاکستری است. در واقع تابع سفیدسازی $R^G : R(\otimes) \to R$ به هر عدد خاکستری یک مقدار حقیقی نسبت می‌دهد و از این‌رو با توجه به ترتیب طبیعی روی اعدادحقیقی می‌توان به کمک تابع مذکور، اعداد خاکستری را مقایسه کرد. در واقع برای هر $\otimes x \in R(\otimes)$ داریم $R^G(\otimes x) = \hat{\otimes} x$؛ بنابراین ترتیب زیر را روی $R(\otimes)$ خواهیم داشت:

$$\hat{\otimes} x \ge \hat{\otimes} y \Leftrightarrow \otimes x \ge_G \otimes y$$
$$\hat{\otimes} x > \hat{\otimes} y \Leftrightarrow \otimes x >_G \otimes y$$
$$\hat{\otimes} x = \hat{\otimes} y \Leftrightarrow \otimes x =_G \otimes y$$

که در آن $\otimes x, \otimes y \in R(\otimes)$. ترتیب برای $\otimes x \le_G \otimes y$ به‌طور مشابه تعریف می‌گردد.

با توجه به لزوم به کارگیری مفاهیم نظریه مجموعه‌های فازی در ادامه بحث، در اینجا به معرفی برخی مفاهیم در ارتباط با اعداد فازی خواهیم پرداخت.

تعریف ۲-۹ فرض کنید X مجموعه مرجع باشد. $\tilde{A}$ را یک مجموعه فازی در X گوییم هرگاه $\tilde{A}$ یک مجموعه از زوج‌های مرتب $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ باشد که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت x در $\tilde{A}$ است. تابع عضویت، هر عضو از X را به یک مقدار عضویت بین ۰ و ۱ می‌نگارد.

در این مقاله همواره فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}$.

تعریف ۲-۱۰ مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in [0,1]$، داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}.$$

تعریف ۲-۱۱ یک مجموعه فازی محدب $\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) حداقل یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$، ۲) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد.

تعریف ۲-۱۲ یک چهارتایی $\tilde{A}=(a^L,a^U,\alpha,\beta)$ را یک عدد فازی ذوزنقه‌ای گوییم هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\left(a^L-\alpha\right)}{\alpha} & , \quad a^L-\alpha\le x\le a^L\\ ۱ & , \quad a^L\le x\le a^U\\ \dfrac{\left(a^U+\beta\right)-x}{\beta} & , \quad a^U\le x\le a^U+\beta\\ ۰ & , \quad else\end{cases}$$

در این مقاله مجموعه همه اعداد فازی ذوزنقه‌ای روی $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

یکی از روش‌های مقایسه اعداد فازی، استفاده از یک تابع رتبه‌بندی $R:\mathcal{F}(\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}$ است که در این مقاله از تابع رتبه‌بندی یاگر [۲۰] استفاده می‌کنیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\tilde{A})=\frac{a^L+a^U}{۲}+\frac{۱}{۴}(\beta-\alpha).$$

با توجه به این تابع، برای دو عدد فازی $\tilde{a}=(a^L,a^U,\alpha,\beta)$ و $\tilde{b}=(b^L,b^U,\gamma,\theta)$، داریم $\tilde{a}\succeq\tilde{b}$ اگر و تنها اگر $a^L+a^U+\frac{۱}{۲}(\beta-\alpha)\ge b^L+b^U+\frac{۱}{۲}(\theta-\gamma)$.

۳ مدل حمل و نقل خاکستری فازی

در این بخش مدل مورد نظر را معرفی می‌کنیم. فرض کنید در شبکه مورد بررسی، m گره عرضه $A_۱$، ...، A_m و n گره تقاضای $B_۱$، ...، B_n وجود دارد. فرض کنید $\tilde{a}_i$ موجودی A_i، $\tilde{b}_j$ مقدار تقاضای B_j و هزینه انتقال از A_i به B_j عدد خاکستری $\otimes c_{ij}$ باشد به طوری که $i=۱,\ldots,m$ و $j=۱,\ldots,n$. دراین‌صورت، مساله برنامه‌ریزی انتقال فازی با ضرایب هزینه خاکستری[۱] (FTPGCC) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&Min\otimes Z=_G\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}\otimes c_{ij}x_{ij}\\ &s.t.\quad \sum_{j=۱}^{n}x_{ij}=\tilde{a}_i,\qquad i=۱,۲,۳,\ldots,m,\\ &\qquad\ \sum_{i=۱}^{m}x_{ij}=\tilde{b}_j\qquad j=۱,۲,۳,\ldots,n,\\ &\qquad x_{ij}\ge ۰, i=۱,۲,۳,\ldots,m,\ j=۱,۲.۳,\ldots,n.\end{aligned}\tag{۱}$$

که در آن $x_{ij}\in R$، $\otimes c_{ij}\in R(\otimes)$ و $\tilde{a}_i,\tilde{b}_j\in F(R)$ و $\tilde{a}_i\succeq\tilde{۰}$ و $\tilde{b}_j\succeq\tilde{۰}$.

[۱] Fuzzy Transportation Programming with Grey Cost Coefficients

هر مجموعه از x_{ij} ها را که در مجموعه محدودیت‌های (۱) صدق می‌کند یک جواب شدنی مساله گوییم. فرض کنید $Q \subseteq R$ مجموعه همه جواب‌های شدنی (۱) باشد. گوییم $x^* \in Q$ یک جواب بهینه برای (۱) است اگر به ازای هر جواب شدنی دیگر $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}$، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij}^* \leq_G \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij}.$$

لم زیر نشان می‌دهد که می‌توان مساله (۱) را به یک مساله حمل و نقل خاکستری تقلیل داد.

لم ۳-۱ مساله (۱) و مساله زیر که یک مساله حمل و نقل خاکستری (GT) است، معادلند:

$$Min \otimes Z =_G \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij} \tag{۲}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i^R, \quad i = 1,2,3,\dots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j^R \quad j = 1,2,3,\dots,n, \\ & x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3,\dots,m,\ j = 1,2.3,\dots,n. \end{aligned}$$

که در آن a_i^R و b_j^R اعداد حقیقی هستند که به ترتیب متناظر با اعداد فازی $\tilde{a}_i$ و $\tilde{b}_j$ می‌باشند. همچنین، $\otimes c_{ij} \in R(\otimes)$ برای هر $i = 1,2,3,\dots,m,\ j = 1,2,3,\dots,n$.

برهان. فرض کنید Q_1 و Q_2 به ترتیب مجموعه همه جواب‌های (۱) و (۲) باشند. دراین‌صورت، $x \in Q_1$ اگر و تنها اگر:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = R(\tilde{a}_i), i = 1,2,\dots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = R(\tilde{b}_j), j = 1,2,\dots,n, \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن R تابع رتبه‌بندی خطی برای اعداد فازی است. پس رابطه (۱) برقرار است اگر و تنها اگر:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i^R, i = 1,2,\dots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j^R, j = 1,2,\dots,n, \end{aligned}$$

که در آن $a_i^R = R(\tilde{a}_i)$ و $b_j^R = R(\tilde{b}_j)$. از این‌رو رابطه اخیر برقرار است اگر و تنها اگر $x \in Q_2$. در نتیجه $Q_1 = Q_2$. اکنون فرض کنید x^* یک جواب شدنی بهینه برای (۱) باشد. آنگاه برای هر $x \in Q_1$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij}^* \leq_G \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \otimes c_{ij} x_{ij}.$$

بنابراین، چون $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\otimes c_{ij}x_{ij}^{*} \leq_G \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\otimes c_{ij}x_{ij}$ ، x^* یک جواب بهینه برای مساله (۲) نیز هست. قسمت عکس را به‌طور مشابه می‌توان اثبات کرد. □

با توجه به لم بالا، جواب بهینه مساله (۱) را درصورت وجود می‌توان با حل مساله (۲) به‌دست آورد. حال به دنبال روشی هستیم که یک نقطه شدنی برای (۲) پیدا کنیم. چون محدودیت‌های مساله (۲) قطعی هستند، از این‌رو می‌توان به کمک روش‌های مرسوم در محیط قطعی مانند روش گوشه شمال غربی، روش ماتریس کمینه، تقریب وگل و غیره یک نقطه آغازین پیدا کرد. پیش از بیان شرایط بهینگی برای ارزیابی نقطه شدنی پیدا شده، به معرفی مسیر بسته می‌پردازیم.

از یک سلول خالی استفاده نشده شروع کنید، یک مسیر بسته یا دور را برای برگشت به سلول اولیه از طریق سلول‌هایی که در حال استفاده/مشغول هستند بپیمایید. یک مسیر بسته یا دور، دنباله‌ای از سلول‌ها در جدول حمل و نقل است که اولین سلول خالی/استفاده نشده است و همه سلول‌های دیگر استفاده شده/مشغول هستند و دارای شرایط زیر است:

۱) هر زوج از سلول‌های استفاده شده/مشغول مجاور یا در یک سطر مشترک قرار دارند یا در یک ستون مشترک.

۲) هیچ سه سلول استفاده شده/مشغول مجاور در یک سطر مشترک یا ستون مشترک قرار نمی‌گیرند.

۳) اولین و آخرین سلول از یک دنباله در سطر یا ستون یکسان قرار می‌گیرند.

۴) هیچ سلولی بیش از یک مرتبه در دنباله ظاهر نمی‌شود.

۵) فقط حرکت‌های افقی و عمودی مجاز هستند و فقط می‌توان جهت‌ها را در سلول‌های استفاده شده/ مشغول تغییر داد.

حال به‌دنبال یافتن روشی برای معین کردن بهینگی یک جواب شدنی پایه‌ای آغازین هستم که توسط یکی از روش‌های گفته شده به‌دست آمده است. در ادامه گام‌های اصلی برای ارزیابی بهینگی و/یا بهبود جواب شدنی جاری را ارایه می‌دهیم.

۱- مربع استفاده نشده‌ای را برای ارزیابی انتخاب کنید.

۲- از این مربع آغاز نمایید. یک مسیر بسته برای برگشت به مربع اصلی از طریق مربعاتی که در حال استفاده هستند را بپیمایید (فقط حرکات افقی و عمودی مجاز است).

۳- با یک علامت مثبت (+) در مربع استفاده نشده شروع کنید و یک در میان علامت‌های منفی (-) و مثبت روی هر مربع گوشه‌ای از مسیر بسته طی شده قرار دهید.

۴- یک اندیس بهبود را با جمع زدن هزینه واحد روی مربعاتی که علامت مثبت دارند و سپس کم کردن هزینه واحد مربعات شامل علامت منفی، محاسبه کنید.

۵- گام‌های ۱ تا ۴ را تا زمانی که یک اندیس بهبود برای هر مربع استفاده نشده محاسبه گردد به‌دست آورید.

-اگر همه اندیس‌های محاسبه شده بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند، یک جواب بهینه به‌دست آمده است.

- در غیر این‌صورت، می‌توان جواب جاری را بهبود و هزینه کل انتقال را کاهش داد.

حال با توجه به لمی که بیان کردیم، مساله حمل و نقل خاکستری تقلیل‌یافته را می‌توان از طریق الگوریتم زیر حل کرد:

ورودی: داده‌ها $\tilde{a}_i,\tilde{b}_j \in F(R)$ و $\otimes c_{ij} \in R(\otimes)$ در مساله (۱) که $i=۱,\ldots,m$ و $j=۱,\ldots,n$. همچنین فرض کنید یک تابع رتبه‌بندی روی اعداد فازی وجود دارد.

گام ۱. مساله حمل و نقل خاکستری معادل (۲) را به‌دست آورید.

گام ۲. یک جواب شدنی آغازین برای مساله گام ۱ به‌دست آورید.

گام ۳. شرایط بهینگی جواب شدنی جاری را با تابع سفیدسازی ارزیابی کنید. اگر جواب جاری بهینه بود، متوقف شوید، در غیر این‌صورت جواب شدنی جاری را به هنگام کنید.

گام ٤. به گام ۳ بروید.

خروجی. یک جواب بهینه x^* برای مساله (۱).

کارکرد عملی فرایند حل الگوریتم داده شده در بخش بعد با مثال تشریح می‌گردد.

٤ مثال عددی

مساله حمل و نقل زیر را درنظر بگیرید که بر اساس یک مدل واقعی به‌دست آمده است. به دلیل برخی مسایل اقتصادی از بیان نام دقیق کارخانه‌های مورد بررسی، اجتناب شده است. همچنین در این جدول اعداد خاکستری سفیدسازی و اعداد فازی، به کمک تابع رتبه‌بندی، غیرفازی شده‌اند.

جدول ۱. داده‌های مساله حمل و نقل خاکستری فازی

توزیع‌کننده				
کارخانه	D	E	F	عرضه
A	⊗۲	⊗۱	⊗۵	$\widetilde{۱۰}$
B	⊗۷	⊗۳	⊗۴	$\widetilde{۲۵}$
C	⊗۶	⊗۵	⊗۳	$\widetilde{۲۰}$
تقاضا	$\widetilde{۱۵}$	$\widetilde{۲۲}$	$\widetilde{۱۸}$	$\widetilde{۵۵}$

هدف ما پیدا کردن کم‌ترین مقدار هزینه خاکستری برای مساله حمل و نقل خاکستری با مقادیر عرضه و تقاضای فازی داده شده است. ابتدا، یک جواب شدنی پایه آغازین با روش ماتریسی کمینه پیدا می‌کنیم. این جواب در جدول زیر نشان داده شده است:

جدول ۲. جواب شدنی پایه آغازین با روش ماتریس کمینه

توزیع کننده				
کارخانه	D	E	F	عرضه
A	⊗۲	⊗۱ ۱۰	⊗۵	$\widetilde{۱۰}$
B	⊗۷ ۱۳	⊗۳ ۱۲	⊗۴	$\widetilde{۲۵}$
C	⊗۶ ۲	⊗۵	⊗۳ ۱۸	$\widetilde{۲۰}$
تقاضا	$\widetilde{۱۵}$	$\widetilde{۲۲}$	$\widetilde{۱۸}$	$\widetilde{۵۵}$

در اینجا، $m+n-۱=۵$ تعداد متغیرهای پایه‌ای است. چون همه مقادیر متغیرهای پایه‌ای مثبت هستند، از این‌رو جواب جاری تباهیده نیست. همچنین مقدار خاکستری تابع هدف در جواب شدنی پایه آغازین به‌دست آمده به‌صورت زیر است:

$$Z =_G ۱\times۱۰+۷\times۱۳+۳\times۱۲+۶\times۲+۳\times۱۸ =_G ۲۰۳$$

سلول $AD(۲)$ خالی است و از این‌رو یک واحد به آن تخصیص داده می‌شود. اکنون یک مسیر بسته حاصل می‌شود.

جدول ۳. مسیر بسته برای سلول AD

توزیع کننده				
کارخانه	D	E	F	عرضه
A	⊗۲ ۱	⊗۱ ۹	⊗۵	$\widetilde{۱۰}$
B	⊗۷ ۱۲ +	⊗۳ - ۱۳	⊗۴	$\widetilde{۲۵}$
C	⊗۶ ۲ -	⊗۵ +	⊗۳ ۱۸	$\widetilde{۲۰}$
تقاضا	$\widetilde{۱۵}$	$\widetilde{۲۲}$	$\widetilde{۱۸}$	$\widetilde{۵۵}$

افزایش و یا کاهش مقدار خاکستری در هزینه حمل و نقل در واحد کمیت تخصیص مجدد عبارت است از:

$$+۲-۱+۳-۷ =_G -۳$$

تخصیص برای سایر سلول‌های اشغال نشده به‌صورت زیر است:

جدول ٤. تخصیص سلول‌های اشغال‌نشده

سلول‌های اشغال نشده	افزایش ویا کاهش مقدار خاکستری در هزینه خاکستری حمل و نقل در واحد کمیت تخصیص مجدد	ملاحظات
AF	$+\otimes ۵ - \otimes ۱ + \otimes ۳ - \otimes ۷ + \otimes ۶ - \otimes ۳ =_G \otimes ۳$	افزایش هزینه خاکستری
CE	$+\otimes ۵ - \otimes ۳ + \otimes ۷ - \otimes ۶ =_G \otimes ۳$	افزایش هزینه خاکستری
BF	$+\otimes ۴ - \otimes ۷ + \otimes ۶ - \otimes ۳ =_G \otimes ۳$	نه افزایش و نه کاهش

اندیس‌هایی که از مسیر عبوری از AD می‌گذرند برای شرکت سودمند خواهند بود. بیش‌ترین مقدار که می‌توان به AD تخصیص داد، برابر با ۱۰ است و این مقدار، متغیر پایه جاری متناظر با سلول AE را غیرپایه‌ای می‌کند. جدول زیر نشان دهنده جدول حمل و نقل بعد از تخصیص مجدد است.

جدول ۵. جدول بهینه مساله حمل و نقل خاکستری فازی

توزیع‌کننده				
کارخانه	D	E	F	عرضه
A	⊗۲ ۱۰	⊗۱	⊗۵	$\tilde{۱۰}$
B	⊗۷ ۳	⊗۳ ۲۲	⊗۴	$\tilde{۲۵}$
C	⊗۶ ۲	⊗۵	⊗۳ ۱۸	$\tilde{۲۰}$
تقاضا	$\tilde{۱۵}$	$\tilde{۲۲}$	$\tilde{۱۸}$	$\tilde{۵۵}$

چون تخصیص مجدد در هر سلول اشغال‌نشده دیگر نمی‌تواند هزینه حمل و نقل را کاهش دهد، و هزینه خاکستری حمل و نقل کمینه برابر است با:

$$۲\times۱۰+۷\times۳+۳\times۲۲+۶\times۲+۳\times۱۸ =_G ۱۷۳$$

و در نهایت، جواب بهینه به‌صورت زیر است:

$$X^*_{AD}=۱۰,\ X^*_{AE}=۰,\ X^*_{AF}=۰,$$
$$X^*_{BD}=۳,\ X^*_{BE}=۲۲,\ X^*_{BF}=۰,$$
$$X^*_{CD}=۲,\ X^*_{CE}=۰,\ X^*_{CF}=۱۸.$$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک نوع جدید از مدل حمل و نقل که در آن ضرایب تابع هدف اعدادی خاکستری و تواما میزان عرضه و تقاضا فازی است، مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به وجود انواع مختلف ابهامی که ممکن است در مسایل واقعی رخ دهد، این روش با مسایل واقعی سازگاری بیش‌تری دارد. برای حل این مساله، نشان دادیم که

می‌توان به کمک سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی، به یک مساله قطعی معادل دست‌یافت که براساس آن جواب مساله اصلی را به‌دست آورد. یکی از ویژگی‌های این روش این است که به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد از روش‌های مختلف سفیدسازی و غیرفازی‌سازی بهره بگیرند و محدودیتی در این مورد اعمال نشده است. همچنین می‌توان این روش را برای انواع اعداد خاکستری و فازی تعمیم داد. همچنین روش پیشنهادی را می‌توان برای حل سایر مسایل متداول در بهینه‌سازی خطی مانند مسایل جریان در شبکه با کمترین هزینه، انتقال جریان بیشینه، تخصیص و غیره به‌کار برد.

منابع

[1] Heyman, D. P., Sobel, M. J., (2003). Stochastic Models in Operations Research: Stochastic Optimization. New Jersey: Courier Corporation.

[2] Zadeh, L. A., (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

[3] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., (1970). Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, 17, B141-B164.

[4] Rommelfanger, H., (1996). Fuzzy linear programming and applications. European Journal of Operational Research, 92, 512-527.

[5] Deng, J. L, (1982). Control problems of grey systems. Systems & Control Letters, 1, 288-294.

[6] Huang, G., Moore, D. R. (1993). Grey linear programming, its solving approach, and its application. International Journal of Systems Science, 24, 159-172.

[7] Julong, D. (1989). Introduction to grey system theory. The Journal of grey system, 1, 1-24.

[8] Liu, S., Lin, Y. (2006). Grey information: theory and practical applications. London: Springer.

[9] Wang ,W., (1997). Study on grey linear programming. The Journal of Grey System, 9, 4-41.

[10] Yang, Y., John, R., (2012). Grey sets and greyness. Information Sciences, 185, 249-264.

[11] Chanas, S., Kuchta, D. (1996) A concept of the optimal solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficients. Fuzzy Sets and Systems, 82, 299-305.

[12] Saad, O. M., Abass, S.A., (2002) A Parametric Study On Transportation Problem Under Fuzzy Environment. Engineering Journal of Qatar University, 15, 165-176.

[13] Gao, S., Liu, S., (2004). Two-phase fuzzy algorithms for multi-objective transportation problem. Journal of Fuzzy Mathematics, 12, 147-156.

[14] Bai, G., Mao, J., Lu, G., (2004) Grey transportation problem. Kybernetes, 33, 219-224.

[15] Bai, Y., Wang, P., Xie, J. (2014) Optimization of Urban Water Supply Schemes based on Grey System Theory. International Journal of Control and Automation, 7, 239-246.

[16] Karmakar, S., Mujumdar, P., (2006) Grey fuzzy optimization model for water quality management of a river system. Advances in Water Resources, 29, 1088-1105.

[17] Samanta, B., Roy, T.K., (2005) Multiobjective entropy transportation model with trapezoidal fuzzy number penalties, sources, and destinations. Journal of Transportation Engineering, 131, 419-428.

[18] Liu, S.F., and Lin, Y. (2011). Grey Systems: Theory and Applications. Springer-Verlag, Berlin.

[19] Nasseri, S. H., Yazdani, A., Darvishi-Salokolaei, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problems with grey cost coefficients. Journal of New Researches in Mathematics, 1, 121-142.

[20] Yager, R. R., (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Inform. Sci., 24, 143-161.