مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره چهارم (پیاپی ۶۷)،زمستان ۹۹، ص ص ۹۸-۸۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست با داده‌های انعطاف‌پذیر

مریم علی‌زاده افروزی[1*]
۱- مربی، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۹ مهر ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۵ بهمن ۱۳۹۸

چکیده

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست (MPI) یکی از راه‌های تعیین پیشرفت و پسرفت عملکرد واحدها در لحظه فعلی نسبت به لحظه قبل می‌باشد. این شاخص با به کار بردن مدل‌های کلاسیک DEA به محاسبه بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه می‌پردازد. لکن در بسیاری از مسایل ارزیابی عملکرد، علاوه بر متغیرهای ورودی و خروجی، متغیرهای انعطاف‌پذیر نیز وجود دارند. در این مقاله می‌خواهیم شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را برای زمانی که مساله شامل متغیر انعطاف‌پذیر نیز می باشد، توسعه دهیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، شاخص بهره‌وری مالمکوئیست، داده‌های انعطاف‌پذیر.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی غیرپارامتری برای ارزیابی و محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است. اولین مدل DEA توسط چارنز و همکاران [۱] معرفی شده است. این مدل را CCR می‌نامند. اما در بسیاری از مسایل ارزیابی عملکرد، نقش بعضی از داده‌ها به صورت ورودی یا خروجی به طور قطع مشخص نیست و داده می‌تواند هم به عنوان ورودی و هم به عنوان خروجی در نظر گرفته شود که چنین مسایلی، انعطاف‌پذیر نامیده می‌شوند. برای حل مسایل انعطاف‌پذیر کوک [۲] مدلی را ارایه نموده است که هم می تواند کارایی واحدهای تصمیم گیرنده را محاسبه و هم نقش متغیرهای انعطاف‌پذیر را به عنوان ورودی یا خروجی تعیین نماید.

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست روشی بسیار مفید و پرکاربرد برای محاسبه بهره‌وری در DEA می‌باشد. این شاخص عملکرد نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در دو دوره زمانی مختلف محاسبه می‌نماید. محاسبه بهره‌وری توسط کیوز [۳] با مبنا قرار دادن ایده‌ی مالمکوئیست [۴] ارایه شده است. فار [۵] با ترکیب مدل محاسبه کارایی فارل [۶] و هم چنین مدل ارزیابی بهره‌وری توسط کیوز مدل MPI را ارایه نموده و هم چنین آن را به دو مولفه

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: malizade62@yahoo.com

تجزیه نموده است، که یکی از مولفه‌ها تغییرات کارایی و دیگری تغییرات فنی را محاسبه می‌نمایند. مدل‌های به کار رفته برای محاسبه MPI، مدل‌های کلاسیک DEA می‌باشد، که این مدل‌ها با به کار بردن ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه به محاسبه کارایی واحدها می‌پردازد. لذا زمانی که مساله علاوه بر متغیرهای ورودی و خروجی، شامل متغیر انعطاف‌پذیر هم باشد، نمی‌توان اقدام به محاسبه MPI نمود.

با توجه به این که شاخص بهره‌وری مالمکوئیست ابزاری کاربردی برای محاسبه تغییرات بهره‌وری برای واحدهای تولیدی مشابه در دو دوره زمانی متفاوت ارایه می‌دهد، لذا در این مقاله می‌خواهیم شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را برای زمانی که مساله دارای متغیرهای انعطاف‌پذیر نیز می‌باشد، توسعه دهیم.

بخش‌های این مقاله بدین صورت مرتب شده است: در بخش ۲ پیشینه تحقیق به صورت خلاصه‌ای از شاخص بهره‌وری مالمکوئیست و هم چنین طبقه‌بندی ورودی و خروجی آمده است. در بخش سوم شاخص بهره‌وری مالمکوئیست با داده‌های انعطاف‌پذیر پیشنهاد شده است. در بخش چهارم مثالی عددی آورده شده و نتیجه‌گیری نیز در بخش پنجم آمده است.

۲ پیشینه تحقیق

۲-۱ شاخص بهره‌وری مالمکوئیست

n واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی را در نظر بگیرید که هر واحد دارای m ورودی و s خروجی می‌باشد. شاخص بهره‌وری مالمکوئیست تغییرات بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده را در دو دوره زمانی t و $t+1$ محاسبه می‌نماید، که ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت x_{ij}^{t} و y_{rj}^{t} و هم چنین x_{ij}^{t+1} و y_{rj}^{t+1} برای DMU_j در دوره‌های زمانی t و $t+1$ به ترتیب، مشخص می‌شوند. برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست نیاز به حل چهار مدل ارزیابی زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
& D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)=\min \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \le \theta x_{io}^t, \quad i=1,\ldots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \ge y_{ro}^t, \qquad r=1,\ldots,s, \\
& \quad \lambda_j \ge 0, \quad j=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)=\min \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \le \theta x_{io}^{t+1}, \quad i=1,\ldots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \ge y_{ro}^{t+1}, \qquad r=1,\ldots,s, \\
& \quad \lambda_j \ge 0, \quad j=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right) = \min\theta \\
& s.t. \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{t+1} \le \theta x_{io}^{t+1}, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{t+1} \ge y_{ro}^{t+1}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \qquad \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^{t+1}\left(x_o^{t}, y_o^{t}\right) = \min\theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{t+1} \le \theta x_{io}^{t}, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{t+1} \ge y_{ro}^{t}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \qquad \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

که $D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)$ و $D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ کارایی DMU_o را در دوره زمانی t و $t+1$ به ترتیب، ارزیابی می‌نماید. $D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی را در دوره زمانی t با به کار بردن تکنولوژی تولید در دوره زمانی $t+1$ و $D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)$ کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی را در دوره زمانی $t+1$ با به کار بردن تکنولوژی تولید در دوره زمانی t محاسبه می‌نماید.

با توجه به مقدار کارایی‌های به دست آمده از حل مسایل فوق، فار [۵] شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را به صورتی که در زیر آمده است، ارایه نمودند:

$$
MPI_o = \left[\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} . \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)}\right]^{1/2}
\tag{5}
$$

MPI_o تغییر بهره‌وری DMU_o را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می‌نماید. بدین صورت، اگر $MPI_o > 1$ نشان دهنده افزایش بهره‌وری، $MPI_o < 1$ حاکی از کاهش بهره‌وری و $MPI_o = 1$ نیز بدین معناست که بهره‌وری بدون تغییر بوده است.

فار هم چنین شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را به دو مولفه تقسیم نموده به صورتی که در زیر آمده است:

$$
\begin{aligned}
MPI_o &= \left[\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} . \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)}\right]^{1/2} \\
&= \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} \left[\frac{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)} . \frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}\right]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

مولفه اول یعنی

$$\mathrm{TEC_o} = \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} \tag{۷}$$

تغییر کارایی DMU_{o} را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می‌نماید. اگر $TEC_o > 1$ باشد یعنی بهبود کارایی DMU_{o} و هنگامی که $TEC_o < 1$، کاهش در کارایی را نشان می‌دهد. مولفه دوم یعنی:

$$FS_o = \left[\frac{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)} \cdot \frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}\right]^{1/2} \tag{۸}$$

تغییر فنی DMU_{o} را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می‌نماید. اگر FS_o بزرگ‌تر از یک باشد حاکی از یک انتقال مثبت یا افزایش فنی می‌باشد و مقدار FS_o کم‌تر از یک حاکی از انتقال منفی یا کاهش فنی است و FS_o مساوی با یک یعنی هیچ انتقالی در مرز تکنولوژی نداریم.

۲-۲ طبقه‌بندی ورودی‌ها و خروجی‌ها

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده داریم که هر واحد دارای m ورودی، s خروجی و l متغیر انعطاف‌پذیر می‌باشد. کوک و ژو [۲] مدل زیر را برای محاسبه مقدار کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده برای مسایل انعطاف‌پذیر ارایه دادند:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^{L} d_l \gamma_l w_{lo}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{l=1}^{L}\left(1-d_l\right)\gamma_l w_{lo}} \\
s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^{L} d_l \gamma_l \omega_{lj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{l=1}^{L}\left(1-d_l\right)\gamma_l \omega_{lj}} \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n, \\
& d_l \in \{0,1\} \qquad \forall l, \\
& \mu_r, v_i, \gamma_l \ge 0, \qquad \forall r,i,l.
\end{aligned} \tag{۹}$$

که M عدد مثبت بزرگ است. کوک و ژو مدل کسری فوق را با به کار بردن تغییر متغیر $\delta_l = d_l \gamma_l \left(l = 1,\ldots,L\right)$ و اضافه نمودن محدودیت‌های زیر تبدیل به مدل خطی نمودند.

$$\begin{aligned}
& 0 \le \delta_l \le M d_l \\
& \delta_l \le \gamma_l \le \delta_l + M\left(1-d_l\right)
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

بنابراین، مدل (۹) به مدل خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{ro} + \sum_{l=1}^{L}\delta_l \omega_{lo} \\
s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rj} + 2\sum_{l=1}^{L}\delta_l \omega_{lj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^{L}\gamma_l \omega_{lj} \le 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + \sum_{l=1}^{L}\gamma_l \omega_{lo} - \sum_{l=1}^{L}\delta_l \omega_{lo} = 1, \\
& 0 \le \delta_l \le M d_l \\
& \delta_l \le \gamma_l \le \delta_l + M\left(1 - d_l\right), \\
& d_l \in \{0,1\}, \quad \delta_l, \gamma_l \ge 0, \quad \forall l, \\
& \mu_r, v_i \ge 0 \qquad \forall r, i.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

با حل مساله فوق می‌توان هم کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را محاسبه نموده و هم نقش متغیر انعطاف‌پذیر را به عنوان ورودی یا خروجی تعیین نمود. اگر $d = 0$، متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی و اگر $d = 1$ متغیر به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شود.

۳ شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای مسایل انعطاف‌پذیر

همان‌گونه که در بخش ۲ دیده شد، برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست مدل‌های پوششی به کار برده شده است. در این‌جا نیز می‌خواهیم برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای مسایل انعطاف‌پذیر مدل پوششی را به‌کار ببریم، لذا مدل پوششی مساله انعطاف‌پذیر (۱۱)، که طلوع [۷] به صورت زیر ارایه نموده را در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta \\
s.t. & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io} && i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} \ge y_{ro} && r = 1,\ldots,s \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \omega_{lj} \le \theta \omega_{lo} + M\bar{d}_l && l = 1,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \omega_{lj} \ge \omega_{lo} - M\left(1 - \bar{d}_l\right) && l = 1,\ldots,L \\
& \bar{d}_l \in \{0,1\} \quad \forall l \\
& \lambda_j \ge 0 \quad \forall j.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای مسایل انعطاف‌پذیر از مدل DEA پوششی را برای محاسبه مدل‌های $D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)$، $D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)$، $D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ و $D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
& D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right) = \min \quad \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \le \theta x_{io}^t \qquad i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \ge y_{ro}^t \qquad r = 1,\ldots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^t \le \theta \omega_{lo}^t + M\bar{d}_l \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^t \ge \omega_{lo}^t - M\left(1-\bar{d}_l\right) \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \bar{d}_l \in \{0,1\} \qquad \forall l \\
& \lambda_j \ge 0 \qquad \forall j.
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right) = \min \quad \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^t \le \theta x_{io}^{t+1} \qquad i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^t \ge y_{ro}^{t+1} \qquad r = 1,\ldots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^t \le \theta \omega_{lo}^{t+1} + M\bar{d}_l \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^t \ge \omega_{lo}^{t+1} - M\left(1-\bar{d}_l\right) \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \bar{d}_l \in \{0,1\} \qquad \forall l \\
& \lambda_j \ge 0 \qquad \forall j.
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right) = \min \quad \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{t+1} \le \theta x_{io}^{t+1} \qquad i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{t+1} \ge y_{ro}^{t+1} \qquad r = 1,\ldots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^{t+1} \le \theta \omega_{lo}^{t+1} + M\bar{d}_l \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^{t+1} \ge \omega_{lo}^{t+1} - M\left(1-\bar{d}_l\right) \qquad l = 1,\ldots,L \\
& \bar{d}_l \in \{0,1\} \qquad \forall l \\
& \lambda_j \ge 0 \qquad \forall j.
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)=\min \quad \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{t+1} \le \theta x_{io}^{t} && i=1,\ldots,m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{t+1} \ge y_{ro}^{t} && r=1,\ldots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^{t+1} \le \theta \omega_{lo}^{t} + M\bar{d}_l && l=1,\ldots,L \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_{lj}^{t+1} \ge \omega_{lo}^{t} - M\left(1-\bar{d}_l\right) && l=1,\ldots,L \\
& \bar{d}_l \in \{0,1\} && \forall l \\
& \lambda_j \ge 0 && \forall j.
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

که $D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)$ و $D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ کارایی نسبی DMU_o را در دوره‌های زمانی t و $t+1$ به ترتیب، محاسبه می‌نماید. $D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$ کارایی DMU_o را در دوره زمانی $t+1$ با استفاده از تکنولوژی تولید دوره زمانی t و $D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)$ کارایی DMU_o را در دوره زمانی t با به کار بردن تکنولوژی تولید دوره زمانی $t+1$ ارزیابی می‌نماید.

تغییرات بهره‌وری DMU_o را از دوره زمانی t به $t+1$ می‌توان با شاخص بهره‌وری مالمکوئیست (MPI_o) به صورت زیر به دست آورد:

$$
MPI_o=\left[\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} \cdot \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)}\right]^{1/2}
\tag{۱۷}
$$

مطابق تعریف فار MPI_o تغییر بهره‌وری DMU_o را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می‌نماید. بدین صورت، اگر $MPI_o>1$ نشان دهنده افزایش بهره‌وری، $MPI_o<1$ حاکی از کاهش بهره‌وری و $MPI_o=1$ نیز بدین معناست که بهره‌وری بدون تغییر بوده است.

$$
MPI_O=\left[\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)} \cdot \frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)}\right]^{1/2}
$$

$$
=\frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)}\left[\frac{D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)} \cdot \frac{D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)}\right]^{1/2}
\tag{۱۸}
$$

فار هم چنین شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را به صورت زیر به دو مولفه تقسیم نموده است:

$$MPI_o=\left[\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)}\cdot\frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t,y_o^t\right)}\right]^{1/2}$$

$$=\frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)}\left[\frac{D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t,y_o^t\right)}\cdot\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}\right]^{1/2} \quad (۱۹)$$

مولفه اول یعنی

$$TEC_o=\frac{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)} \quad (۲۰)$$

تغییر کارایی DMU_o را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می نماید. اگر $TEC_o>1$ باشد یعنی بهبود کارایی DMU_o و هنگامی که $TEC_o<1$، کاهش در کارایی را نشان می دهد. مولفه دوم یعنی:

$$FS_o=\left[\frac{D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^t,y_o^t\right)}\cdot\frac{D_o^t\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}{D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)}\right]^{1/2} \quad (۲۱)$$

تغییر فنی DMU_o را از دوره زمانی t به $t+1$ محاسبه می نماید. اگر FS_o بزرگ‌تر از یک باشد حاکی از یک انتقال مثبت یا افزایش فنی می‌باشد و مقدار FS_o کم‌تر از یک حاکی از انتقال منفی یا کاهش فنی است و FS_o مساوی با یک یعنی هیچ انتقالی در مرز تکنولوژی نداریم.

٤ مثال

پنج واحد تصمیم‌گیرنده را در نظر بگیرید که هر واحد دارای دو ورودی، دو خروجی و یک متغیر انعطاف‌پذیر می‌باشد. داده‌ها در دو دوره زمانی t و $t+1$ داده شده که در جدول ۱ و ۲ به ترتیب نشان داده شده است. برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست نیاز به محاسبه چهار مدل $D_o^t\left(x_o^t,y_o^t\right)$، $D_o^t\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)$، $D_o^{t+1}\left(x_o^t,y_o^t\right)$ و $D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1},y_o^{t+1}\right)$ می‌باشد. نتایج در جدول ۳ داده شده است. مقادیر شاخص بهره‌وری مالمکوئیست واحدهای تصمیم‌گیرنده برای تعیین پیشرفت و پسرفت واحدها و هم چنین مقادیر مولفه‌های شاخص یعنی TES و FS برای تعیین تغییر کارایی و تغییر فنی، به ترتیب، در جدول ۴ آمده است. با توجه به مقادیر ستون MPI در جدول ۴ می‌توان دید که واحدهای ۲، ۳ و ۴ افزایش بهره‌وری داشته‌اند و واحدهای ۱ و ۵ بهره‌وری آن‌ها کاهش یافته است. با دقت در ستون مولفه TES می‌توان دید که واحدهای ۲، ۳ و ۵ بهبود کارایی را از دوره t به $t+1$ دارند و واحدهای ۱ و ۴ مقدار کارایی آنها کاهش یافته است. آخرین ستون جدول ۴ یعنی FS برای واحدهای ۲، ۳ و ۴ حاکی از انتقال منفی و برای واحدهای تصمیم‌گیرنده ۱ و ۵ حاکی از انتقال مثبت می‌باشد.

جدول ۱. داده‌ها در دوره زمانی t

ردیف	ورودی		خروجی		انعطاف‌پذیر
۱	۲	۷	۱	۳	۱
۲	۳	۱	۶	۵	۳
۳	۶	۴	۳	۱	۲
۴	۲	۲	۱	۲	۴
۵	۴	۳	۲	۳	۲

جدول ۲. داده‌ها در دوره زمانی $t+1$

ردیف	ورودی		خروجی		انعطاف‌پذیر
۱	۱۰	۱۲	۱۵	۲۰	۷
۲	۱۵	۱۳	۱۸	۱۵	۶
۳	۸	۱۰	۹	۷	۱۰
۴	۶	۹	۱۳	۱۴	۳
۵	۱۲	۷۱۰	۱۷	۱۵	۷

جدول ۳. مقادیر شاخص بهره‌وری مالمکوئیست

DMU	$D_o^t\left(x_o^t, y_o^t\right)$	$D_o^t\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$	$D_o^{t+1}\left(x_o^t, y_o^t\right)$	$D_o^{t+1}\left(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}\right)$
۱	۰/۹	۱/۲	۱	۰/۶۴۲۹
۲	۱	۰/۶	۰/۷۲۷۹	۲/۴۷۰۶
۳	۰/۲۸۵۷	۰/۵۶۲۵	۰/۵۷۳۴	۰/۴۴۳۷
۴	۰/۶	۱/۴	۱	۰/۵۶۹۲
۵	۰/۴۶۴۳	۰/۷۵	۱	۰/۵۴۰۸

جدول ٤. مقادیر MPI و مولفه‌های آن

DMU	MPI	TES	FS
۱	۰/۹۲۵۸	۰/۷۱۴۳	۱/۲۹۶۱
۲	۱/۴۲۷۱	۲/۴۷۰۶	۰/۵۷۷۶
۳	۱/۲۳۴۳	۱/۵۵۳۰	۰/۷۹۴۷
۴	۱/۱۵۲۴	۰/۹۴۸۷	۱/۲۱۴۸
۵	۰/۹۳۴۷	۱/۱۶۴۸	۰/۸۰۲۴

۵ نتیجه‌گیری

DEA روشی مناسب برای محاسبه تغییرات بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده را روی زمان ارایه می‌دهد. مدل DEA به کار رفته در محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست واحدهای تصمیم‌گیرنده، مدل CCR می‌باشد. این مدل کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه محاسبه می‌نماید. اما بسیاری از مسایل ارزیابی عملکرد شامل متغیرهای انعطاف‌پذیر می‌باشند، که این متغیرها هم می‌توانند به عنوان ورودی و هم

به عنوان خروجی در نظر گرفته شوند. در این مقاله شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را برای مسایلی که شامل متغیرهای انعطاف‌پذیر می‌باشند، توسعه دادیم تا برای این مسایل ارزیابی عملکرد نیز بتوانیم تغییرات بهره‌وری را روی زمان محاسبه نماییم.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2 (6), 422–444.
[2] Cook, W. D., Zhu, J., (2007). Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 180, 692–699.
[3] Caves, D.W., Christensen, L. R., Diewert, W. E., (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity, Econometrica, 50 (6) 1393-1414.
[4] Malmquist, S., (1953). Index numbers and indifference surfaces, Trabajos de Estadistica, 4, 209-242.
[5] Fare, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., Roos, P., (1992), Productivity change in Swedish pharmacies 1980-1989: a nonparametric Malmquist approach, Journal of Productivity Analysis, 3, 85-102.
[6] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productivity efficiency, Journal of the Royal Statistical Society, 120(3), 253-290.
[7] M. Toloo, (2012). Alternative solutions for classifying inputs and outputs in data envelopment analysis, computers and mathematics with applications, 63, 1104-1110.