مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره دوم (پیاپی ۴۹)، تابستان ۹۵، ص ص ۳۳-۱۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک الگوریتم کارا برای زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی

اکرم طاعتی[۱]، مازیار صلاحی[*۲]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۰ آذرماه ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

چکیده

زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان (TRS) که در واقع مساله‌ی مینیمم‌سازی یک تابع درجه‌ی دوم روی یک گوی است، نقش کلیدی در حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی نامقید ایفا می‌کند و علی رغم این که لزوماً محدب نیست، الگوریتم‌های کارای متعددی برای حل آن به ویژه برای حل آن در ابعاد بزرگ ارایه شده است. اخیراً توسیع زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به مساله‌ای با قیود خطی اضافی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد هنگامی که قیود خطی مساله‌ی توسیع یافته درون گوی اشتراک ندارند، جواب بهینه‌ی مساله را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی بهینه‌سازی مخروطی به دست آورد. در هر صورت حل مسایل بهینه‌سازی مخروطی در ابعاد بزرگ و حتی در ابعاد متوسط عملی نیست. در این مقاله حل مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی روی قیود آن مورد مطالعه قرار گرفته است. جدیدترین الگوریتم‌های موجود برای حل زیرمساله‌ی ناحیه اطمینان و محاسبه‌ی مینیمم موضعی غیر سراسری آن که مساله را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کنند برای حل مساله‌ی توسیع یافته در ابعاد بزرگ توسعه داده می‌شود. در پایان کارایی الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارزیابی می‌شود.

کلمات کلیدی: زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته، مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته، بهینه‌سازی سراسری.

۱ مقدمه

مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته‌ی (eTRS) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Min \quad & q(x) := \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \le \delta, \\ & b_i^T x \le \beta_i, \quad i = 1,2, \end{aligned} \tag{1}$$

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: salahim@guilan.ac.ir

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس متقارن، $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$، $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ و $\delta \in \mathbb{R}^{++}$. این دسته از مسایل در حل سایر مسایل بهینه‌سازی غیرخطی به ویژه در حل مسایل بهینه‌سازی نامقید به روش ناحیه اطمینان [۱،۲] و همچنین در حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم متوالی(SQP) [۳] ظاهر می‌شود. در حالتی که $(b_i, \beta_i) = (0, 0), i = 1, 2$، مساله‌ی (۱) به زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان (TRS) معروف است که علی‌رغم این که لزوماً محدب نیست، الگوریتم‌های کارایی برای حل آن ارایه شده است [۴–۸] که پایه واساس همه‌ی آن‌ها را می‌توان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این بین الگوریتم پیشنهادی در منبع [۵] مساله‌ی (TRS) را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کند. این روش با بهره‌گیری از الگوریتم‌های کارای موجود برای حل مسایل مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های تنک و بزرگ برای حل مساله‌ی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست. همچنین، ارتباط بین روش‌های حل مساله‌ی (TRS) و برنامه‌ریزی نیمه معین که در منبع [۹] به آن پرداخته شده است، نشان می‌دهد مساله‌ی آزادسازی نیمه معین مساله‌ی (TRS) دقیق است و با استفاده از تجزیه‌ی رتبه یک می‌توان جواب بهینه‌ی مساله‌ی (TRS) را از جواب مساله‌ی آزادسازی آن به دست آورد [۹].

اخیراً توسیع مساله‌ی (TRS) به مساله‌ای با قیود خطی اضافی موضوع تحقیق بسیاری از مقالات قرار گرفته است [۹–۱۵]. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد بر خلاف مساله‌ی (TRS)، مساله‌ی آزادسازی نیمه معین مساله‌ی توسیع یافته لزوماً دقیق نیست. هدف تعدادی از مطالعات انجام شده بیان شرایطی بوده است که تحت آن مساله‌ی آزادسازی نیمه معین توسیع‌های (TRS) دقیق است [۱۰،۱۱]. تعدادی از مقالات نیز به معرفی یک مساله‌ی آزادسازی جدید پرداخته‌اند که با افزودن تعدادی قیود مخروطی درجه‌ی دوم و قیود خطی به مساله‌ی آزادسازی نیمه معین به دست می‌آید [۱۲،۱۳]. در برخی از موارد براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده‌ی مساله‌ی توسیع یافته، می‌توان جواب بهینه‌ی مساله را از حل مساله‌ی آزادسازی جدید آن به دست آورد و در برخی از موارد نیز می‌توان کرانی بهتر از کران به دست آمده از مساله‌ی آزادسازی نیمه معین به دست آورد. هنگامی که m قید خطی مساله‌ی توسیع یافته، $b_i^T x \le \beta_i, i = 1, \dots, m$، درون گوی $\|x\|^2 \le \delta$ اشتراک ندارند، جواب بهینه‌ی مساله‌ی توسیع یافته را می‌توان با حل مساله‌ی محدب زیر به دست آورد [۱۲]:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \frac{1}{2} A \bullet X + a^T x \\
& trac(X) \le \delta, \quad X \ge x x^T, \\
& \left\|\beta_i x - X b_i\right\| \le \sqrt{\delta}(\beta_i - b_i^T x), \qquad i = 1, \dots, m \\
& \beta_i \beta_j - \beta_j b_i^T x - \beta_i b_j^T x + b_i^T X b_j \ge 0, \quad 1 \le i < j \le m.
\end{aligned} \tag{2}
$$

در هر صورت حل مسایل بهینه‌سازی مخروطی تنها در ابعاد کوچک امکان‌پذیر است و این بدان معناست که حتی تحت شرایطی که مساله‌ی (eTRS) با مساله‌ی(۲) معادل است، نمی‌توان از آن برای حل (eTRS) در ابعاد بزرگ و یا حتی در ابعاد متوسط بهره برد. در منبع [۱۱] مساله‌ی (TRS) با m قید خطی اضافی مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان با تکیه بر نتایج به دست آمده توسط مارتینز در خصوص مینیمم موضعی غیر سراسری مساله‌ی (TRS) [۱۶]، نشان دادند

جواب بهینه‌ی مساله‌ی مورد مطالعه را می‌توان از میان مینیمم موضعی غیر سراسری مساله‌ی (TRS) و جواب‌های بهینه‌ی به دست آمده از حل دنباله‌ای از زیر مسایل ناحیه اطمینان، تعیین کرد. لازم به ذکر است که هیچگونه نتایج عددی توسط نویسندگان مقاله گزارش نشده است. الگوریتم ارایه شده توسط مارتینز در هر تکرار به حل یک دستگاه معادلات خطی نامعین نیاز دارد، از این رو برای حل مساله در ابعاد بزرگ هزینه‌بر به نظر می‌رسد. در منبع [۱۴] زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی موضوع تحقیق نویسندگان قرار گرفته است. در مقاله‌ی مذکور تحت شرط اینکه چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A حداقل دو است، با استفاده از روش قطری‌سازی و استفاده از دوگانی لاگرانژ مساله‌ی مورد مطالعه از طریق حل یک مساله‌ی دومتغیره‌ی محدب مقید حل می‌شود. با توجه به اینکه روش قطری‌سازی به تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A نیازمند است، استفاده از این روش برای حل مساله در ابعاد بزرگ مناسب نمی‌باشد. اخیراً در منبع [۱۵] حل مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی در ابعاد بزرگ مورد توجه قرار گرفته است. در منبع مذکور ابتدا نشان داده می‌شود که مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) را همانند مینیمم سراسری آن می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه کرد، سپس با استفاده از این واقعیت، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ ارایه شده است.

در این پژوهش حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با دو قید خطی اضافی مورد توجه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهند مینیمم موضعی و سراسری مساله‌ی (TRS) را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل کرد، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ پیشنهاد می‌شود. در واقع الگوریتم پیشنهادی مساله را از طریق حل تعدادی مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کند. در پایان کارایی روش پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۱-۱ نمادگذاری

در سرتاسر این مقاله، $\lambda_{\min}(A)$ به کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A، $Range(A)$ به برد ماتریس A و $Null(A)$ به فضای پوچ ماتریس A اشاره می‌کند. همچنین ماتریس معین مثبت (نیمه معین مثبت) به صورت $A \succ 0$ ($A \succcurlyeq 0$) نشان داده می‌شود و I به ماتریس همانی اشاره می‌کند.

۲ الگوریتم پیشنهادی

در سرتاسر این مقاله، فرض می‌کنیم هیچ یک از قیود خطی مساله‌ی (۱) زاید نیست؛ چون در غیر این صورت مساله‌ی (۱) به مساله‌ی (TRS) یا مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی تبدیل می‌شود که در منابع [۵] و [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حل مساله‌ی (۱) را براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده‌ی آن در دو حالت جداگانه بررسی می‌کنیم. حالت اول را حالتی در نظر می‌گیریم که دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\|^2 \le \delta$ هیچ اشتراکی ندارند. به عبارت دیگر به ازای هر x که $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ آنگاه $\|x\|^2 \ge \delta$. حالت دوم حالتی است که دو ابرصفحه مذکور درون گوی یکدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی xی وجود دارد به طوری که $b_1^T x = \beta_1$،

$b_2^T x = \beta_2$ و $\|x\|^2 < \delta$. توجه می‌کنیم که هر یک از این حالات به آسانی قابل شناسایی است. دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ موازی هستند اگر و فقط اگر $b_1 \| b_2$ باشد. حال حالتی را در نظر بگیرید که دو ابرصفحه‌ی مذکور موازی نیستند. فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مساله‌ی بهینه سازی درجه‌ی دوم

$$\begin{aligned} Min \quad & \| x \|^2 \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned}$$

است. اگر $\| x^* \|^2 < \delta$ باشد، آنگاه دو ابرصفحه درون گوی $\|x\|^2 \le \delta$ اشتراک دارند. در غیر این صورت دو ابرصفحه خارج از گوی یا روی گوی یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲-۱ دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\|^2 \le \delta$ هیچ اشتراکی ندارند

در این حالت الگوریتم ۱ برای حل مساله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \| x \|^2 \le \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1. \end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \| x \|^2 \le \delta, \\ & b_2^T x = \beta_2. \end{aligned} \tag{۴}$$

الگوریتم ۱.

گام اول. مساله‌ی (TRS) را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینه‌ی آن است، اگر $b_1^T x_g^* \le \beta_1$ و $b_2^T x_g^* \le \beta_2$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) نیز است، بنابراین متوقف شوید. در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)، x_ℓ^*، را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $b_1^T x_\ell^* \le \beta_1$ و $b_2^T x_\ell^* \le \beta_2$، x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. مسایل (۳) و (۴) را حل کنید و جواب بهینه‌ی آن‌ها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) است.

۲-۲ دو ابر صفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ درون گوی $\|x\|^2 \le \delta$ یکدیگر را قطع می‌کنند

در این حالت الگوریتم ۲ برای حل مساله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \| x \|^2 \le \delta, \\ & b_1^T x \le \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x \\ & \|x\|^2 \le \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x \le \beta_2. \end{aligned} \tag{۶}$$

الگوریتم۲.

گام اول. مسالهی (TRS) را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینهی آن است. اگر $b_1^T x_g^* \le \beta_1$ و $b_2^T x_g^* \le \beta_2$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینهی مسالهی (۱) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مسالهی (TRS)، x_ℓ^*، را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $b_1^T x_\ell^* \le \beta_1$ و $b_2^T x_\ell^* \le \beta_2$، x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید، مسایل (۵) و (۶) را حل کنید و جواب بهینهی آنها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جوابهای موجود، جواب با کمترین مقدار تابع هدف، جواب بهینهی مسالهی (۱) است.

۳ حل زیر مسایل موجود در الگوریتم۱ و۲

در این بخش به جزئیات حل هر یک از زیر مسایل موجود درالگوریتم ۱ و ۲ میپردازیم.

۳-۱ مسالهی (TRS)

همانطور که در مقدمه اشاره شد تاکنون الگوریتمهای کارای متعددی برای مسالهی (TRS) ارایه شده است که پایه و اساس همه آنها را میتوان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این مقاله الگوریتم ارایه شده در منبع [۵] برای حل مسالهی (TRS) پیشنهاد میشود که قادر است مسالهی (TRS) مقیاس شده زیر را از طریق حل یک مسالهی مقدار ویژهی تعمیم یافته حل کند:

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2}x^T Ax + a^T x \\ & x^T Bx \le \delta, \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن B یک ماتریس معین مثبت است. الگوریتم مذکور که بر پایه نتایج زیر استوار است، با بهرهگیری از الگوریتمهای کارای موجود برای حل مسالهی مقدار ویژهی ماتریسهای بزرگ و تنک، برای حل مسالهی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست. x_g^* جواب بهینهی مسالهی (۷) است اگر و فقط اگر $\lambda_g^* \ge 0$ وجود دارد به طوری که [۵]

$$(A+\lambda_g^* B)x_g^* = -a, \tag{۸}$$

$$x_g^{*T} Bx_g^* \le \delta, \tag{۹}$$

$$\lambda_g^*(x_g^{*T} Bx_g^* - \delta) = 0, \tag{۱۰}$$

$$A+\lambda_g^* B \succeq 0. \tag{۱۱}$$

لم۱([۵]). به ازای هر ضریب $\lambda \ne 0$ که در روابط (۸) تا (۱۰) صدق میکند، داریم $\det(M(\lambda)) = 0$ که:

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix} -B & A+\lambda B \\ A+\lambda B & -\dfrac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix}.$$

قضیه‌ی ۱ ([۵]). فرض کنید (x_g^*, λ_g^*) یک جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۷) با $x_g^{*T} B x_g^* = \delta$ باشد، در این صورت ضریب لاگرانژ بهینه، λ_g^*، با بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس $M(\lambda)$ برابر است و $\lambda_g^* \in [\mu_n, \infty)$ که μ_n بزرگ‌ترین مقدار ویژه $A+\lambda B$ است. به علاوه اگر $\lambda_g^* > \mu_n$، آنگاه $x_g^* = -\dfrac{\delta}{a^T y_۲} y_۱$ که در آن $\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{pmatrix}$ بردار ویژه‌ی $M(\lambda)$ متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_g^* است و همچنین داریم $a^T y_۲ \neq ۰$.

الگوریتم ۳ (حل مساله‌ی (۷) [۵])

گام اول. دستگاه معادلات خطی $Ax_0 = -a$ را با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل کنید. اگر $x_0^T B x_0 \leq \delta$، x_0 را به عنوان کاندیدای جواب بهینه درنظر بگیرید.

گام دوم. بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی $M(\lambda)$، λ_g^*، و بردار ویژه‌ی متناظر با آن، $\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید به طوری که

$$\begin{bmatrix} -B & A \\ A & -\dfrac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = -\lambda_g^* \begin{bmatrix} O_{n\times n} & B \\ B & O_{n\times n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}.$$

گام سوم. اگر $\|y_1\| \leq \tau$ (به طور پیش فرض $\tau = 10^{-4}$)آنگاه مساله‌ی (۷) یک نمونه‌ی سخت است. گام‌های چهارم تا ششم را اجرا کنید، در غیر این صورت به گام هفتم بروید.

گام چهارم. ماتریس $H := A + \lambda_g^* B + \alpha \sum_{i=۱}^{d} B v_i v_i^T B$ را محاسبه کنید که در آن α یک عدد مثبت دلخواه و $V = [v_۱, ..., v_d]$ یک پایه‌ی B-متعامد برای فضای پوچ ماتریس $A + \lambda_g^* B$ است؛ یعنی $V^T B V = I$.

گام پنجم. دستگاه $Hq = -a$ را با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل کنید.

گام ششم. مقدار η را طوری محاسبه کنید که $(q+\eta v)^T B (q+\eta v) = \delta$ که در آن v یکی از بردارهای محاسبه شده در گام چهارم است. $x_g^* = q + \eta v$ جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۷) است و متوقف شوید.

گام هفتم. $x_۱ = -sign(a^T y_۲)\sqrt{\delta}\dfrac{y_۱}{\sqrt{y_۱^T B y_۱}}$ را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید.

گام هشتم. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۷) است.

۳-۲ مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)

در سرتاسر این مقاله، منظور از مینیمم موضعی، مینیمم موضعی غیر سراسری است. فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) است، اگر $b_۱^T x^* < \beta_۱$ و $b_۲^T x^* < \beta_۲$ باشد، آنگاه x^* یک مینیمم موضعی (نه لزوماً مینیمم سراسری) مساله‌ی (TRS) است؛ لذا مطالعه و ارایه‌ی روشی کارا برای محاسبه‌ی مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) حائز اهمیت است.

در ادامه ابتدا به مطالعات اولیه انجام شده توسط مارتینز در این زمینه اشاره می‌کنیم [۱۶]، سپس به نتایج به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) همانند مینیمم سراسری آن در صورت وجود می‌تواند از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه شود. برخلاف مینیمم سراسری، مساله‌ی (TRS) می‌تواند فاقد مینیمم موضی باشد. به وضوح اگر ماتریس A نیمه معین مثبت باشد، مساله‌ی (TRS) محدب و لذا فاقد مینیمم موضعی است. لم زیر حالت‌هایی را که در آن مساله‌ی نامحدب (TRS) فاقد مینیمم موضعی است، بیان می‌کند.

لم۲ ([۱٦]). اگر چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A، $\lambda_{\min}(A)$، حداقل دو یا بردار a بر برخی از بردارهای ویژه‌ی متناظر با $\lambda_{\min}(A)$ عمود باشد، آنگاه مساله‌ی (TRS) فاقد مینیمم موضعی است.

فرض کنید $A=Q\Lambda Q^T$ تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشد که در آن $Q=[q_1,q_2,...,q_n]$ ماتریس متعامد و $\Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$ با $\lambda_{\min}(A):=\lambda_1\le\lambda_2\le...\le\lambda_n$. قضیه‌ی زیر شرایط لازم برای مینیمم موضعی را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۲ ([۱٦]). فرض کنید x_ℓ^* مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه $\lambda^*\in(\max\{0,-\lambda_2\},-\lambda_1)$ وجود دارد به طوری که:

$$(A+\lambda^* I)x_\ell^*=-a,\qquad \|x_\ell^*\|^2=\delta. \tag{۱۲}$$

تابع $\phi(\lambda)=\|(A+\lambda I)^{-1}a\|^2$ را روی بازه‌ی $(\max\{0,-\lambda_2\},-\lambda_1)$ در نظر بگیرید. با استفاده از تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A داریم

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i+\lambda)^2},\\ \phi'(\lambda)&=-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i+\lambda)^3},\\ \phi''(\lambda)&=6\sum_{i=1}^{n}\frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i+\lambda)^4}.\end{aligned} \tag{۱۳}$$

معادله (۱۳) نشان می‌دهد که تابع $\phi(\lambda)$ روی بازه‌ی $(\max\{0,-\lambda_2\},-\lambda_1)$ اکیداً محدب است و لذا معادله‌ی $\phi(\lambda)-\delta=0$ در این بازه حداکثر دو ریشه دارد. قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که تنها بزرگ‌ترین ریشه در این بازه می‌تواند ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد.

قضیه‌ی ۳ ([۱٦]). مساله‌ی (TRS) حداکثر یک مینیمم موضعی دارد که در روابط (۱۲) صدق می‌کند و $\phi'(\lambda^*)\ge 0$.

در ادامه به نتیجه‌ی به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)، λ^*، در صورت وجود از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته به دست می‌آید. در این مقاله اثبات جدیدی برای این قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ٤ ([۱٥]). ماتریس $M(\lambda)$ که در آن $B=I$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x_ℓ^* مینیمم موضعی یکتای مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه ضریب لاگرانژ متناظر، λ^*، با دومین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس $M(\lambda)$

برابر است. به علاوه $x_{\ell}^{*}=-\frac{\delta}{a^{T}y_{۲}}y_{۱}$ که در آن $\begin{pmatrix}y_{۱}\\y_{۲}\end{pmatrix}$ بردار ویـژه‌ی $M(\lambda)$ متنـاظر بـا مقـدار ویـژه‌ی λ^{*} اسـت و همچنین داریم $a^{T}y_{۲}\neq ۰$.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم چون x_{ℓ}^{*} مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) است؛ بنابراین با توجه به لم ۲، چنـدگانگی جبـری $\lambda_{۱}$ برابر است با یک و $a^{T}v\neq ۰$ که در آن v بردار ویژه‌ی متناظر با $\lambda_{۱}$ است. به عبارت دیگـر (TRS) یـک نمونـه آسـان است. بر اسـاس لـم ۱، λ^{*} یـک مقـدار ویـژه‌ی $M(\lambda)$ اسـت ؛ یعنـی $\det(M(\lambda^{*}))=۰$. بـه عـلاوه بنـابر قضـیه‌ی ۱، بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس $M(\lambda)$ که ضریب لاگرانژ متناظر با مینـیمم سراسـری مسـاله‌ی (TRS) اسـت، ریشه‌ی منحصر به فرد معادله $\phi(\lambda)-\delta=۰$ در بازه‌ی $(-\lambda_{۱},\infty)$ است. همچنین با توجه به قضیه‌ی ۳، ضـریب لاگرانـژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)، بزرگ‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $\phi(\lambda)-\delta=۰$ در بـازه ی $(\max\{۰,-\lambda_{۲}\},-\lambda_{۱})$ است. توجه می‌کنیم $-\lambda_{۱}$ مقدار ویژه‌ی $M(\lambda)$ نیست. برای اثبات این واقعیت فـرض خلـف مـی‌کنـیم کـه چنـین باشـد؛ بنابراین بردار ناصفر $\begin{pmatrix}y_{۱}\\y_{۲}\end{pmatrix}$ وجود دارد به طوری که

$$(A-\lambda_{۱}I)y_{۲}=y_{۱}, \tag{۱۴}$$

$$(A-\lambda_{۱}I)y_{۱}=\frac{aa^{T}}{\delta}y_{۲}. \tag{۱۵}$$

اگر $a^{T}y_{۲}\neq ۰$، بنابر (۱۵) $a\in Range(A-\lambda_{۱}I)$ که متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه‌ی آسان است. به علاوه اگر $a^{T}y_{۲}=۰$ آنگاه از رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود $y_{۱}\in Null(A-\lambda_{۱}I)$. همچنین بنا بر (۱۴) داریم $y_{۱}\in Range(A-\lambda_{۱}I)$؛ بنابراین $y_{۱}=۰$ است. حال اگر $y_{۱}=۰$ باشد، آنگاه براساس رابطه‌ی (۱۴)، $y_{۲}$ یک بردار ویژه‌ی متناظر با $\lambda_{۱}$ است. دراین صورت فرض $a^{T}y_{۲}=۰$ متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه آسان است؛ بنابراین $-\lambda_{۱}$ نمی‌تواند مقدار ویژه‌ی $M(\lambda)$ باشد. بحث انجام شده نشان می‌دهد که λ^{*} دومین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی $M(\lambda)$ است. حال فرض کنید $\begin{pmatrix}y_{۱}\\y_{۲}\end{pmatrix}$ یک بردار ویژه‌ی $M(\lambda^{*})$ باشد، داریم:

$$(A+\lambda^{*}I)y_{۲}=y_{۱}, \tag{۱۶}$$

$$(A+\lambda^{*}I)y_{۱}=\frac{aa^{T}}{\delta}y_{۲}. \tag{۱۷}$$

ابتدا نشان می‌دهیم $a^{T}y_{۲}\neq ۰$ است. فرض خلف می‌کنیم $a^{T}y_{۲}=۰$ باشد، در ایـن صـورت چـون مـاتریس $A+\lambda^{*}I$ وارون‌پذیر است از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود $y_{۱}=y_{۲}=۰$ که متناقض است با فرض اینکه $\begin{pmatrix}y_{۱}\\y_{۲}\end{pmatrix}$ یـک بـردار ویژه‌ی $M(\lambda^{*})$ است؛ بنابراین $a^{T}y_{۲}\neq ۰$. حال با ضرب طرفین رابطه (۱۷) در $-\frac{\delta}{a^{T}y_{۲}}$، داریم

$$(A+\lambda^{*}I)\frac{-\delta}{a^{T}y_{۲}}y_{۱}=-a.$$

قرار دهید $x_{\ell}^{*}=-\frac{\delta}{a^{T}y_{۲}}y_{۱}$. از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود

$$\|x_{\ell}^{*}\|^{۲}=\frac{\delta^{۲}}{(a^{T}y_{۲})^{۲}}y_{۱}^{T}y_{۱}=\frac{\delta^{۲}}{(a^{T}y_{۲})^{۲}}y_{۲}^{T}(A+\lambda^{*}I)(A+\lambda^{*}I)^{-۱}\frac{aa^{T}}{\delta}y_{۲}=\delta,$$

که نشان می‌دهد x_{ℓ}^{*} از رابطه $x_{\ell}^{*}=-\frac{\delta}{a^{T}y_{۲}}y_{۱}$ محاسبه می‌شود.

۳-۳ حل زیر مسایل (۳) و (٤)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۳) و (۴) می‌پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قید تساوی را به صورت $b^{T}x=\beta$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین مساله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} Min\quad & \frac{۱}{۲}x^{T}Ax+a^{T}x\\ & \|x\|^{۲}\leq\delta,\\ & b^{T}x=\beta. \end{aligned}\qquad (۱۸)$$

با حذف قید تساوی $b^{T}x=\beta$ مساله‌ی فوق را به مساله‌ی معادلی به فرم مساله‌ی (۷) تبدیل می‌کنیم. بدین منظور فرض کنید $|b_{\ell}|=\max\{|b_{i}|\}$ که در آن b_{i} مولفه‌ی i ام بردار b است، آنگاه ماتریس

$$W=\begin{bmatrix} b_{\ell}I_{\ell-۱} & O_{\ell-۱,n-\ell}\\ -b_{۱:\ell-۱}^{T} & -b_{\ell+۱:n}^{T}\\ O_{n-\ell,\ell-۱} & b_{\ell}I_{n-\ell}\end{bmatrix},$$

یک پایه برای $Null(b^{T})$ است. $b_{i:j}$ به قسمتی از بردار b اشاره می‌کند که شامل درایه‌های i ام تا j ام است.

نقطه‌ی $\hat{x}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{x}=\begin{cases} ۰ & if\ \beta=۰\\ \frac{\beta}{\|b\|^{۲}}b & if\ \beta\neq۰\end{cases}$$

توجه می‌کنیم که $b^{T}\hat{x}=\beta$ ، $\|\hat{x}\|^{۲}\leq\delta$ ، $W^{T}\hat{x}=۰$ و همچنین داریم:

$$b^{T}x=\beta\Leftrightarrow x=\hat{x}+Wy\quad for\ some\ y\in\mathbb{R}^{n-۱}$$

با جایگذاری x در مساله‌ی(۱۸) ، به مساله‌ی معادل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} Min\quad & \frac{۱}{۲}y^{T}\bar{A}y+\bar{a}^{T}y\\ & y^{T}By\leq\bar{\delta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A}=W^{T}AW,\ \bar{a}=W^{T}(A\hat{x}+a),\quad B=W^{T}W,\quad \bar{\delta}=\delta-\hat{x}^{T}\hat{x}.$$

مساله‌ی فوق را می‌توان را با استفاده از الگوریتم ۳ حل کرد.

۳-٤ حل زیر مسایل (٥) و (٦)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۵) و (۶) می‌پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قید تساوی را به صورت $b^T x = \beta$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین مساله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{۱}{۲}x^T Ax + a^T x \\ & \|x\|^۲ \le \delta, \\ & b^T x = \beta, \\ & b_۲^T x \le \beta_۲. \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با حذف قید تساوی $b^T x = \beta$ مساله‌ی فوق را به زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی تبدیل می‌کنیم. بدین منظور فرض کنید $|b_\ell| = \max\{|b_i|\}$ که در آن b_i مولفه‌ی i ام بردار b است، آنگاه ماتریس

$$W = \begin{bmatrix} b_\ell I_{\ell-۱} & O_{\ell-۱,n-\ell} \\ -b_{۱:\ell-۱}^T & -b_{\ell+۱:n}^T \\ O_{n-\ell,\ell-۱} & b_\ell I_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

یک پایه برای $Null(b^T)$ است. نقطه‌ی $\hat{x}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{x} = \begin{cases} ۰ & if\ \beta = ۰ \\ \dfrac{\beta}{\|b\|^۲} b & if\ \beta \ne ۰ \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که $b^T \hat{x} = \beta$ ، $\|\hat{x}\|^۲ \le \delta$ ، $W^T \hat{x} = 0$ و همچنین داریم:

$$b^T x = \beta \Leftrightarrow x = \hat{x} + Wy \quad for\ some\ y \in \mathbb{R}^{n-۱}$$

با جایگذاری x در مساله‌ی (۱۹)، به مساله‌ی معادل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{۱}{۲}y^T \bar{A} y + \bar{a}^T y \\ & y^T B y \le \bar{\delta}, \\ & \bar{b}^T y \le \bar{\beta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A} = W^T A W,\ \bar{a} = W^T (A\hat{x} + a),\ B = W^T W,\ \bar{\delta} = \delta - \hat{x}^T \hat{x},\ \bar{b} = W^T b_2,\ \bar{\beta} = \beta_2 - b_2^T \hat{x}.$$

از طرفی $B = W^T W = b_\ell^۲ I_{n-۱} + \tilde{b}\tilde{b}^T$ که در آن $\tilde{b}$ از بردار b با حذف مولفه‌ی b_ℓ به دست می‌آید؛ لذا با توجه به ساختار بهنگام رتبه یک ماتریس معین مثبت B داریم

$$B^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{|b_\ell|}\left(I_{n-۱} - \frac{۱ + \sqrt{\dfrac{b_\ell^۲}{b_\ell^۲ + \tilde{b}^T \tilde{b}}}}{\tilde{b}^T \tilde{b}} \tilde{b}\tilde{b}^T \right).$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $y := B^{\frac{1}{2}}y$ به مساله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} Min \quad & \frac{1}{2}y^T\hat{A}y + \hat{a}^T y \\ & y^T y \le \bar{\delta}, \\ & \hat{b}^T y \le \bar{\beta}, \end{aligned} \tag{20}$$

که در آن

$$\hat{A} = B^{-\frac{1}{2}}\bar{A}B^{-\frac{1}{2}}, \qquad \hat{a} = B^{-\frac{1}{2}}\bar{a}, \qquad \hat{b} = B^{-\frac{1}{2}}\bar{b}.$$

حل مساله‌ی (٢٠) که در واقع مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی است در منبع [١٥] به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. الگوریتم ۴ برای حل مساله‌ی فوق پیشنهاد می‌شود.

الگوریتم٤ (حل مساله‌ی (٢٠)).

گام اول. مساله‌ی (TRS) متناظر را حل کنید. فرض کنید x_g^* جواب بهینه‌ی آن است، اگر $\hat{b}^T x_g^* \le \bar{\beta}$ باشد، آنگاه x_g^* جواب بهینه‌ی مساله‌ی (٢٠) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

گام دوم. مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر، x_ℓ^*، را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر $\hat{b}^T x_\ell^* \le \bar{\beta}$، x_ℓ^* را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. مساله‌ی (٢٠) با قید خطی تساوی را در نظر بگیرید. این مساله را که به فرم مساله‌ی (٣) است حل کنید و جواب بهینه‌ی آن را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (٢٠) است.

٤ نتایج محاسباتی

در این بخش نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله‌ی (١) روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارایه می‌شود. از آنجا که حل مساله‌ی (٢) در ابعاد بزرگ امکان‌پذیر نیست، تنها برای مسایل با ابعاد کوچک $(n \le 400)$ و در حالتی که مساله‌ی (١) با مساله‌ی (٢) معادل است، روش پیشنهادی با مساله‌ی (٢) مقایسه و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای مسایل با ابعاد بزرگ تنها نتایج حاصل از حل مساله‌ی (١) با الگوریتم پیشنهادی گزارش می‌شود. برای حل مساله (٢) از بسته‌ی نرم‌افزاری CVX استفاده شده است [١٧]. از تابع A=sprandsym(n,density) در متلب برای تولید ماتریس متقارن A استفاده شده است که در آن density به چگالی ماتریس تولید شده و n به بعد مساله اشاره می‌کند. از لم زیر نیز برای تولید مساله‌ی (TRS) استفاده شده است.

لم ٣ ([١٥، **لم ٨**]). فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس متقارن با $\lambda_1 < \min\{0, \lambda_2\}$ باشد، تعریف کنید $a = -(A + \mu I)v_1$ که در آن v_1 بردار ویژه‌ی متناظر با λ_1 با $\|v_1\|^2 = \delta$ و $\mu \in (\max\{0, -\lambda_2\}, -\lambda_1)$، آنگاه v_1 مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر است.

۴-۱ دسته‌ی اول از مسایل تست

فرض کنید $xopt$ جواب بهینه‌ی مساله‌ی (TRS) تولید شده باشد، به منظور حذف $xopt$ از ناحیه شدنی مساله‌ی (۱)، قرار می‌دهیم $b_1 = 0/9xopt$ ، $b_2 = -b_1$ ، $\beta_1 = \|b_1\|^2$ و $\beta_2 = -\beta_1 + 0/1$. در این صورت دو ابرصفحه‌ی $b_1^T x = \beta_1$ و $b_2^T x = \beta_2$ موازی هستند و بنابراین مساله‌ی (۱) تولید شده، با مساله‌ی (۲) معادل است. نتایج عددی به دست آمده از اجرای الگوریتم پیشنهادی و همچنین حل مساله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد کوچک در جدول ۱ خلاصه شده است. در هر بعد، ده مساله تولید و میانگین نتایج به دست آمده گزارش شده است. دقت هر یک از روش‌ها از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\frac{|q(x^*) - q(x_{best})|}{|q(x_{best})|}$$

که در آن x^* جواب بهینه‌ی به دست آمده از هر روش و x_{best} جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف از میان دو جواب به دست آمده از دو روش است. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) را با دقت تقریباً یکسان و در مدت زمان کوتاه‌تری نسبت به مساله‌ی (۲) محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد بزرگ در جداول ۲ و ۳ بیان شده است. از مباحث مطرح شده در بخش ۲ می‌دانیم جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱)، x^*، یا مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر است و یا جواب بهینه‌ی یک زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان است. اگر x^* مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد، در تمامی جداول $KKT\,1$ و $KKT\,2$ به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده‌است:

$$KKT\,1 = \|(A + \lambda^* I)x^* + a\|_\infty,$$
$$KKT\,2 = \lambda^*(\|x^*\|^2 - \delta),$$

که در آن λ^* ضریب لاگرانژ متناظر است. اگر x^* جواب بهینه یک زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان باشد، $KKT\,1$ و $KKT\,2$ به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده‌است:

$$KKT\,1 = \|(\tilde{A} + \lambda^* I)x^* + \tilde{a}\|_\infty,$$
$$KKT\,2 = \lambda^*(\|x^*\|^2 - \tilde{\delta}),$$

که در آن λ^* ضریب لاگرانژ متناظر، $\tilde{A}$ هسیان تابع هدف، $\tilde{a}$ بردار متناظر با جمله‌ی خطی تابع هدف و $\tilde{\delta}$ اسکالر مثبت سمت راست قید نرمی مساله‌ی ناحیه اطمینانی است که x^* جواب بهینه‌ی آن است. همان‌طور که در جداول ۲ و ۳ مشاهده می‌شود با کاهش میزان چگالی ماتریس A زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان در هزینه‌ی محاسباتی حاصل‌ضرب یک بردار در یک ماتریس دانست که هزینه‌ی غالب در الگوریتم‌های موجود برای حل مسایل مقدار ویژه است و این نیز با کاهش میزان چگالی ماتریس کاهش می‌یابد.

جدول ۱. مقایسه بین الگوریتم پیشنهادی و حل مساله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست

	مساله‌ی (۲)		الگوریتم پیشنهادی	
بعد	دقت	زمان	دقت	زمان (ثانیه)
۱۰۰	$۵/۴۷۸۰\times ۱۰^{-۱۲}$	۲/۶۵	$۶/۲۵۸۹\times ۱۰^{-۱۱}$	۰/۲۰
۲۰۰	$۱/۶۲۷۴\times ۱۰^{-۱۰}$	۱۸/۱۵	$۴/۵۱۳۶\times ۱۰^{-۱۱}$	۰/۳۸
۳۰۰	$۵/۵۹۸۳\times ۱۰^{-۱۲}$	۷۲/۵۷	$۲/۰۸۵۸\times ۱۰^{-۱۰}$	۰/۳۹
۴۰۰	$۴/۱۴۳۹\times ۱۰^{-۱۰}$	۱۹۶/۹۳	$۸/۹۴۴۹\times ۱۰^{-۱۱}$	۰/۵۶

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با density=۰/۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۱/۱۶	$۱/۶۳۳۸\times ۱۰^{-۱۰}$	$-۸/۲۳۲۱\times ۱۰^{-۱۷}$
۲۰۰۰	۳/۳۶	$۸/۳۵۱۱\times ۱۰^{-۱۰}$	$۳/۱۴۵۳\times ۱۰^{-۱۷}$
۳۰۰۰	۶/۸۱	$۵/۶۳۰۲\times ۱۰^{-۱۰}$	$-۵/۱۱۴۹\times ۱۰^{-۱۶}$
۴۰۰۰	۱۲/۵۳	$۴/۲۵۱۶\times ۱۰^{-۱۰}$	$-۲/۹۶۲۲\times ۱۰^{-۱۴}$
۵۰۰۰	۲۱/۸۱	$۲/۰۶۴۲\times ۱۰^{-۱۰}$	$۲/۱۹۳۹\times ۱۰^{-۴۳}$

جدول ۳. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با density=۰/۰۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۰/۶۳	$۲/۷۷۶۷\times ۱۰^{-۹}$	$-۳/۸۱۲۸\times ۱۰^{-۱۷}$
۲۰۰۰	۱/۵۲	$۳/۳۲۷۵\times ۱۰^{-۹}$	$-۱/۱۳۴۱\times ۱۰^{-۱۵}$
۳۰۰۰	۲/۴۸	$۱/۸۳۹۶\times ۱۰^{-۱۰}$	$-۱/۰۷۲۶\times ۱۰^{-۱۶}$
۴۰۰۰	۴/۶۱	$۲/۹۷۱۱\times ۱۰^{-۹}$	$۱/۲۵۲۸\times ۱۰^{-۱۶}$
۵۰۰۰	۳/۸۸	$۳/۴۹۵۴\times ۱۰^{-۹}$	$۲/۶۶۸۱\times ۱۰^{-۱۶}$

٤-٢ دسته دوم از مسایل تست

فرض کنید x_ℓ و $xopt$ به ترتیب مینیمم موضعی و مینیمم سراسری مساله‌ی (TRS) تولید شده باشد، قرار می‌دهیم $b_۱ = xopt - x_\ell$ و $\beta_۱ = b_۱^T x_\ell + ۰/۰۱\|b_۱\|^۲$. همچنین $b_۲$ را برداری در نظر می‌گیریم که درایه‌های آن دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند و قرار می‌دهیم $\beta_۲ = b_۲^T x_\ell + ۰/۱$. در این صورت $xopt$ برای مساله‌ی (۱) حاصل، نشدنی و x_ℓ شدنی است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، در هر بعد ده مساله تولید و میانگین نتایج به دست آمده در جداول ۴ و ۵گزارش شده است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، با کاهش چگالی ماتریس A زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد.

جدول ٤. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با density= ۰/۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۳/۴۶	$۴/۷۸۲۷\times۱۰^{-۹}$	$۱/۲۱۲۵\times۱۰^{-۱۵}$
۲۰۰۰	۶/۲۳	$۱/۱۱۷۱\times۱۰^{-۹}$	$۲/۳۸۴۳\times۱۰^{-۱۵}$
۳۰۰۰	۱۴/۹۱	$۸/۰۶۱۲\times۱۰^{-۱۱}$	$-۶/۴۵۹۹\times۱۰^{-۱۶}$
۴۰۰۰	۵۳/۶۲	$۶/۰۲۸۱\times۱۰^{-۸}$	$۱/۰۰۵۳\times۱۰^{-۱۴}$
۵۰۰۰	۶۴/۱۲	$۴/۲۱۶۳\times۱۰^{-۱۱}$	$۱/۹۲۲۷\times۱۰^{-۱۴}$

جدول ٥. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با density=۰/۰۰۱

بعد	زمان (ثانیه)	KKT ۱	KKT ۲
۱۰۰۰	۱/۴۲	$۷/۱۱۷۲\times۱۰^{-۱۰}$	$۲/۳۵۱۱\times۱۰^{-۱۶}$
۲۰۰۰	۱/۶۸	$۷/۹۵۲۴\times۱۰^{-۱۰}$	$۷/۵۵۸۵\times۱۰^{-۱۶}$
۳۰۰۰	۳/۳۲	$۲/۸۸۲۲\times۱۰^{-۱۰}$	$۲/۸۴۵۵\times۱۰^{-۱۶}$
۴۰۰۰	۴/۱۷	$۵/۱۸۱۹\times۱۰^{-۷}$	$۲/۳۶۶۵\times۱۰^{-۱۵}$
۵۰۰۰	۵/۶۹	$۴/۶۷۱۶\times۱۰^{-۱۱}$	$۱/۱۱۵۱\times۱۰^{-۱۵}$

۵ نتیجه گیری

زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه قیود خطی در حل سایر مسایل بهینه‌سازی غیرخطی مقید به روش ناحیه اطمینان و همچنین به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ظاهر می‌شوند. در این مقاله حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی در ابعاد بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهد جواب بهینه زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان و مینیمم موضعی آن را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه نمود، به حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی پرداخته شد. این امر حل مساله‌ی توسیع یافته را در ابعاد بزرگ از طریق حل تعدادی مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته ممکن می‌سازد. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با فرمول‌بندی مخروطی مساله‌ی توسیع یافته نشان می‌دهد که روش پیشنهادی جواب بهینه‌ی مساله را در مدت زمان کوتاه‌تری و با دقت تقریباً یکسانی محاسبه می‌کند.

سپاسگزاری

نویسنده دوم از حمایت مالی دانشگاه گیلان در طول دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه واترلو کانادا قدردانی می‌نماید.

منابع

[1] Conn, A. R., Gould, N. I., Toint, P. L., (2000). Trust region methods. SIAM, Philadelphia, PA.

[2] Celis, M. R., Dennis, J. E., Tapia, A. R., (1985). A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. Numerical Optimization, 71-82.

[3] Boggs, P. T., Tolle, J. W., (1995). Sequential quadratic programming. Acta Numerica,4, 1-51.

[4] Sorensen, D. C., (1997). Minimization of a large-scale quadratic function subject to a spherical constraint. SIAM Journal on Optimization, 7(1), 141-161.

[5] Adachi, S., Iwata, S., Nakatsukasa, Y., Takeda, A., (2015). Solving the trust region subproblem by a generalized eigenvalue problem. Technical report, Mathematical Engineering, The University of Tokyo.

[6] Rendl, F., Wolkowicz, H., (1997). A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization. Mathematical Programming, 77(1), 273-299.

[7] Gould, N. I., Lucidi, S., Roma, M., Toint, P. L., (1999). Solving the trust-region subproblem using the Lanczos method. SIAM Journal on Optimization, 9(2), 504-525.

[8] Fortin, C., Wolkowicz, H., (2004). The trust region subproblem and semidefinite programming. Optimization Methods and Software, 19(1), 41-67.

[9] Sturm , J. F., Zhang, S., (2003). On cones of nonnegative quadratic functions. Mathematics of Operations Research, 28(2) , 246-267.

[10] Jeyakumar, V., Li, G. Y., (2014). Trust-region problems with linear inequality constraints: exact SDP relaxation, global optimality and robust optimization. Mathematical Programming, 147(1-2), 171-206.

[11] Hsia, Y., Sheu, R. L., (2013). Trust region subproblem with a fixed number of additional linear inequality constraints has polynomial complexity. Report, Beihang University, Beijing, China.

[12] Burer, S., Yang, B., (2013). The trust region subproblem with non-intersecting linear constraints. Mathematical Programming, 149(1-2), 253-264.

[13] Burer, S., Anstreicher, K. M., (2013). Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. SIAM Journal on Optimization, 23(1), 432-451.

[14] Salahi, M., Fallahi, S., (2016). Trust region subproblem with an additional linear inequality constraint. Optimization Letters, 10(4), 821-832.

[15] Salahi, M., Taati, A., Wolkowicz, H., (2016). Local nonglobal minima for solving large scale extended trust region subproblems. Computational Optimization and Applications, DOI: 10.1007/s10589-016-9867-4.

[16] Martínez, J. M., (1994). Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres. SIAM Journal on Optimization, 4(1), 159- 176.

[17] Grant, M., Boyd, S., (2013). CVX: Matlab software for disciplined convex programming. version 2.0 beta. http://cvxr.com/cvx.