

توسיעی از يك روش گراديان مزدوج سه‌بخشی مبتنی بر مقادير تابع هدف با تضمين همگرایی بدون فرض تحذب

سامان بابایی کفاکی^{۱*}، محمد رضا آرزوم^۲

۱- دانشيار دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

۲- دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

رسيد مقاله: ۲۷ شهریور ۱۳۹۵

پذيرش مقاله: ۱۴ اسفند ۱۳۹۵

چکیده

با توجه به اهمیت روش‌های گراديان مزدوج در بهینه‌سازی بزرگ مقیاس، در این پژوهش يك روش گراديان مزدوج سه‌بخشی کاهشی مبتنی بر يك شرط سکانت اصلاح شده توسعه یافته ارایه می‌شود. در روش پیشنهادی، علاوه بر اطلاعات گراديان از مقادير تابع هدف نیز استفاده می‌شود. ضمناً، ثابت می‌شود که روش بدون فرض تحذب بر تابع هدف دارای ویژگی همگرایی است. آزمایش‌های عددی کارایی محاسباتی قابل قبول روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی نامقید، بهینه‌سازی بزرگ مقیاس، روش گراديان مزدوج، شرط سکانت، همگرایی سراسری.

۱ مقدمه

روش‌های گراديان مزدوج رده‌ای از روش‌های حل مسایل بهینه‌سازی نامقید را تشکیل می‌دهد که به دلیل استفاده اندک از حافظه ماشین، محاسبات ساده و همگرایی سراسری مناسب [۱، ۲]، امروزه به طور وسیع در اقتصاد [۳]، آمار [۴]، مسایل جریان در شبکه [۵]، پردازش تصویر [۶]، کنترل بهینه [۷]، علوم پایه [۸]، مهندسی [۹] و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که بر اساس استراتژی جریمه‌ای [۱۰] مسایل بهینه‌سازی مقید را می‌توان به مسایل نامقید تبدیل کرد، روش‌های گراديان مزدوج بعضاً برای حل مسایل مقید نیز قابل استفاده هستند.

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: sbk@semnan.ac.ir

مسأله بهینه‌سازی نامقید را در فرم کلی زیر در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (1)$$

با این فرض که تابع هدف f به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. روش‌های گرادیان مزدوج برای حل مسأله (۱) عموماً دارای فرمول تکراری به شکل کلی زیر است:

$$x_{k+1} \in \mathbb{R}^n, x_{k+1} = x_k + s_k, s_k = \alpha_k d_k, k \geq 0, \quad (2)$$

که در آن α_k طول گام حاصل از یک جستجوی خطی و d_k جهت جستجو است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{k+1} \in \mathbb{R}^n, d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, k \geq 0, \quad (3)$$

که در آن $g_k = \nabla f(x_k)$ و β_k پارامتر روش گرادیان مزدوج نامیده می‌شود که باید به گونه‌ای محاسبه شود تا جهت‌های جستجو در حالت درجه دوم دو به دو نسبت به هسی مزدوج باشند [۱۰]. ضمناً، طول گام α_k اغلب به گونه‌ای محاسبه می‌شود که در شرایط جستجوی خطی زیر، که به شرایط ولف معروف هستند [۱۰]، صدق کند:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k, \quad (4)$$

$$g_{k+1}^T d_k \geq \sigma g_k^T d_k, \quad (5)$$

که در آن $0 < \delta < \sigma < 1$. انتخاب‌های مختلفی برای β_k پیشنهاد شده است که در حالت درجه دوم با هم معادل هستند؛ ولی در حالت کلی عملکرد متفاوتی دارند [۲، ۱۱].

با تعریف $y_k = g_{k+1} - g_k$ ، از آنجا که از قضیه مقدار میانگین $\zeta \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که

$$d_k^T y_k = \alpha_k d_{k+1}^T \nabla^2 f(x_k + \zeta \alpha_k d_k) d_k, \quad (6)$$

و با توجه به مفهوم مزدوج بودن [۱۰]، شرط زیر را می‌توان معادل شرط مزدوج بودن جهت‌های d_{k+1} و d_k نسبت به هسی در نظر گرفت:

$$d_{k+1}^T y_k = 0. \quad (7)$$

معادله فوق و فرمول (۳) به پارامتر گرادیان مزدوج زیر منتهی می‌شوند:

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}, \quad (8)$$

که توسط هستنس و استیفل (HS) ارایه گردید [۱۲].

همان طور که می‌دانیم، روش‌های شبه‌نیوتن رده‌ای دیگر از روش‌های بهینه‌سازی نامقید را با فرمول تکراری (۲) تشکیل می‌دهند [۱۰]. جهت جستجو در این روش‌ها از رابطه $d_{k+1} = -B_{k+1}^{-1} g_{k+1}$ محاسبه می‌شود که در آن $B_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ تقریبی متقارن برای هسی در x_{k+1} است که در معادله زیر، که به شرط سکانت (استاندارد) معروف است، صدق می‌کند:

$$B_{k+1} s_k = y_k. \quad (9)$$

با توجه به ویژگی‌های روش شبه‌نیوتن، می‌توان نوشت:

$$d_{k+1}^T y_k = d_{k+1}^T B_{k+1} s_k = (B_{k+1} d_{k+1})^T s_k = -g_{k+1}^T s_k. \quad (10)$$

لذا، بر اساس رابطه فوق، دای و لیائو (DL) [۱۳] شرط مزدوج بودن توسعه یافته زیر را ارایه کردند:

$$d_{k+1}^T y_k = -t g_{k+1}^T s_k, \quad (11)$$

که در آن t یک پارامتر نامنفی است. شرط فوق پارامتر گرادیان مزدوج زیر را به دست می‌دهد:

$$\beta_k^{DL} = \beta_k^{HS} - t \frac{g_{k+1}^T s_k}{d_k^T y_k}, \quad (12)$$

که تحت جستجوی خطی دقیق و یا به ازای $t = 0$ به β_k^{HS} کاهش می‌یابد. ضمناً، در [۱۳] نشان داده شد که روش دای-لیائو برای توابع به طور یکنواخت محدب همگراست. برای دستیابی به همگرایی بدون فرض تحدب، ژو و ژنگ (ZZ) [۱۴] شرط سکانت اصلاح شده‌ی ارایه شده توسط لی و فوکوشیما [۱۵]؛ یعنی

$$B_{k+1} s_k = \bar{y}_k, \quad \bar{y}_k = y_k + h_k \|g_k\|^r s_k, \quad (13)$$

را در رویکرد دای-لیائو به خدمت گرفتند که در آن

$$h_k = C + \max \left\{ -\frac{s_k^T y_k}{\|s_k\|^r}, 0 \right\} \|g_k\|^{-r}, \quad (14)$$

به ازای برخی ثابت‌های مثبت C و r . در نتیجه این امر، نسخه اصلاح شده‌ی زیر از (۱۲) در [۱۴] ارایه گردید:

$$\beta_k^{ZZ} = \frac{g_{k+1}^T \bar{y}_k}{d_k^T \bar{y}_k} - t \frac{g_{k+1}^T s_k}{d_k^T \bar{y}_k}, \quad (15)$$

که در آن t یک پارامتر نامنفی است.

در حالت‌های خاص روش دای-لیائو قادر به تضمین شرط کاهشی می‌باشد [۱۶]؛ اما در حالت کلی جهت‌های جستجوی روش لزوماً کاهشی نیستند. اخیراً، در تلاشی برای رفع این مشکل بر اساس ساختار روش‌های گرادیان مزدوج سه‌بخشی [۱۷]، بابایی کفاکی و قنبری [۱۸] توسیعی از روش دای-لیائو را با جهت‌های جستجوی زیر پیشنهاد دادند:

$$d_0 = -g_0, \quad d_{k+1} = -g_{k+1} + \underbrace{\frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k} d_k - t \frac{g_{k+1}^T s_k}{d_k^T y_k} d_k}_{d_{k+1}^{DL}} - \frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T y_k} y_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (16)$$

که در آن t یک پارامتر نامنفی است. با فرض استفاده از شرایط جستجوی خطی ولف، از آنجا که

$$d_k^T y_k > 0, \quad (17)$$

جهت‌های فوق در شرط کافی کاهشی صدق می‌کنند؛ یعنی:

$$d_k^T g_k \leq -c \|g_k\|^r, \quad \forall k \geq 0, \quad (18)$$

به ازای برخی ثابت مثبت c . به علاوه، در [۱۸] نشان داده شد که روش فوق الذکر برای توابع به طور یکنواخت محدب همگراست. برای دستیابی به همگرایی بدون فرض تحدب، با رویکردی مشابه در [۱۸] به توسیع زیر از روش ژو-ژنگ پرداخته شد:

$$d_0 = -g_0, \quad d_{k+1} = -g_{k+1} + \underbrace{\frac{g_{k+1}^T \bar{y}_k}{d_k^T \bar{y}_k} d_k - t \frac{g_{k+1}^T s_k}{d_k^T \bar{y}_k} d_k - \frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T \bar{y}_k} \bar{y}_k}_{d_{k+1}^{ZZ}}, \quad \forall k \geq 0, \quad (19)$$

که بر شرط سکانت اصلاح شده‌ی (۱۳) استوار است.

در این پژوهش، بر اساس یک شرط سکانت اصلاح شده‌ی ترکیبی، یک روش گرادیان مزدوج سه بخشی کاهشی جدید ارایه می‌شود. سازمان بیان مطالب بدین صورت است که در بخش دوم، پس از ارایه شرط سکانت مذکور، به ارایه روش گرادیان مزدوج مورد نظر می‌پردازیم. سپس، همگرایی سراسری روش را به اثبات می‌رسانیم. در بخش سوم به انجام آزمایشات عددی به منظور سنجش میزان کارایی محاسباتی روش پیشنهادی در مقایسه با برخی روش‌های گرادیان مزدوج قبلاً ارایه شده می‌پردازیم. در پایان، نتایج حاصل را به اختصار بیان می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم که شرایط جستجوی خطی ولف ملاک عمل قرار می‌گیرند. پس، همواره نامساوی (۱۷) برقرار است و لذا در (۱۴) داریم $h_k = C$.

۲ ارایه یک روش گرادیان مزدوج سه بخشی کاهشی مبتنی بر مقادیر تابع هدف

به عنوان یک نقطه ضعف، در شرط سکانت استاندارد فقط از اطلاعات گرادیان استفاده می‌شود و مقادیر تابع هدف نقشی را در آن ایفا نمی‌کنند. برای رفع این مشکل، در [۱۹] بر اساس بسط تیلور شرط سکانت اصلاح شده‌ی زیر پیشنهاد گردید:

$$B_{k+1} s_k = \hat{y}_k, \quad \hat{y}_k = y_k + \frac{\theta_k}{s_k^T u_k} u_k, \quad (20)$$

که در آن $u_k \in \mathbb{R}^n$ یک پارامتر برداری صادق در $s_k^T u_k \neq 0$ است و

$$\theta_k = 2(f_k - f_{k+1}) + (g_k + g_{k+1})^T s_k. \quad (21)$$

به علاوه، در [۲۰] با رویکردی مشابه شرط سکانت اصلاح شده‌ی دیگری به صورت زیر ارایه شد:

$$B_{k+1} s_k = \tilde{y}_k, \quad \tilde{y}_k = y_k + \frac{\varrho_k}{s_k^T u_k} u_k, \quad (22)$$

که در آن $u_k \in \mathbb{R}^n$ یک پارامتر برداری صادق در $s_k^T u_k \neq 0$ است و $\varrho_k = 3\theta_k$. لازم به ذکر است که شرط فوق از نقطه نظر خطای برشی بسط تیلور از سایر شرایط سکانت معرفی شده دقیق تر است.

حال، در این مرحله با ترکیب معادلات (۱۳)، (۲۰) و (۲۲) شرط سکانت توسعه یافته زیر را معرفی

می‌کنیم:

$$B_{k+1}s_k = w_k, w_k = y_k + \xi \frac{\theta_k}{s_k^T u_k} u_k + C \|g_k\|^r s_k, \quad (23)$$

که در آن ξ ، C و r ثابت‌هایی نامنفی هستند و $u_k \in \mathbb{R}^n$ یک پارامتر برداری صادق در $s_k^T u_k \neq 0$ است. می‌توان مشاهده کرد که انتخاب‌های خاص برای ξ و C در (۲۳) شرایط سکانت قبلی را به دست می‌دهد. به عنوان یک نقیصه، چون θ_k ممکن است منفی باشد و لذا نامساوی $d_k^T w_k > 0$ لزوماً برقرار نیست، شرط سکانت (۲۳) قابل استفاده در رویکرد دای-لیائو نمی‌باشد. برای رفع این مشکل، در این پژوهش اصلاح زیر را بر شرط سکانت (۲۳) اعمال می‌کنیم:

$$B_{k+1}s_k = z_k, z_k = y_k + \xi \frac{\max\{\theta_k, 0\}}{s_k^T u_k} u_k + C \|g_k\|^r s_k, \quad (24)$$

با همان پارامترهای تعریف شده برای (۲۳). برای شرط سکانت اصلاح شده فوق مستقل از تحذب تابع هدف داریم $d_k^T z_k > 0$. در اینجا همواره فرض می‌کنیم $u_k = s_k$ ، برای هر $k \geq 0$.

با به کارگیری شرط سکانت توسعه یافته‌ی (۲۴) در رویکرد مطرح شده در [۱۸]، در این بخش یک روش گرادیان مزدوج غیرخطی سه‌بخشی را با جهت‌های جستجوی زیر (به عنوان نسخه اصلاح شده‌ی (۱۶)) معرفی می‌کنیم:

$$d_0 = -g_0, d_{k+1} = -g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T z_k}{d_k^T z_k} d_k - t \frac{g_{k+1}^T s_k}{d_k^T z_k} d_k - \frac{g_{k+1}^T d_k}{d_k^T z_k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (25)$$

که در آن t یک پارامتر نامنفی است. برای جهت‌های فوق داریم:

$$d_{k+1}^T g_{k+1} = -\|g_{k+1}\|^r - t \alpha_k \frac{(g_{k+1}^T d_k)^r}{d_k^T z_k} \leq -\|g_{k+1}\|^r, \quad \forall k \geq 0, \quad (26)$$

یعنی مستقل از تحذب تابع هدف، شرط کافی کاهشی (۱۸) به ازای $c=1$ برقرار است. در ادامه همگرایی سراسری روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. در این راستا به مفروضات زیر نیاز داریم [۱]:

مفروضات همگرایی (*). مجموعه تراز $\ell = \{x \mid f(x) \leq f(x)\}$ ، که در آن x نقطه آغازین دنباله تکراری (۲) است، کراندار می‌باشد. همچنین، در یک همسایگی \mathcal{N} از ℓ تابع f به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و ∇f پیوسته لیپ‌شیتز است؛ یعنی ثابت مثبت L وجود دارد به طوری که

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{N}. \quad (27)$$

مفروضات فوق تضمین می‌کنند که ثابت مثبت γ وجود دارد به طوری که

$$\|\nabla f(x)\| \leq \gamma, \quad \forall x, y \in \ell. \quad (28)$$

(به گزاره ۱،۳ از [۲۱] نگاه کنید.) قضیه زیر نقش مهمی را در تحلیل همگرایی روش پیشنهادی ایفا می‌کند.

قضیه ۱. [۲۲] فرض کنید مفروضات همگرایی (*) برقرار باشد. روش تکراری (۲) را در نظر بگیرید که در آن جهت‌های جستجو در شرط کافی کاهشی (۱۸) صدق می‌کنند و طول گام‌ها بر اساس شرایط جستجوی خطی ولف (۴) و (۵) محاسبه می‌شوند. اگر

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{\|d_k\|^r} = \infty, \quad (29)$$

آنگاه

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (30)$$

بر اساس مقدمات بالا، هم اکنون در وضعیتی قرار داریم که می‌توانیم قضیه همگرایی زیر را اثبات نماییم.
قضیه ۲. فرض کنید مفروضات همگرایی (*) برقرار باشد. روش تکراری (۲) را در نظر بگیرید که در آن جهت‌های جستجو توسط (۲۵) و طول گام‌ها بر اساس شرایط جستجوی خطی ولف (۴) و (۵) محاسبه می‌شوند. اگر $C > 0$ و ثابت مثبت M وجود داشته باشند به طوری که $t \leq M$ ، آنگاه روش همگراست؛ یعنی (۳۰) برقرار است.

اثبات. از شرط کافی کاهشی (۱۸) و شرط جستجوی خطی (۴) داریم $\{x_k\}_{k \geq 0} \subseteq \ell$. حال فرض کنید (۳۰) برقرار نباشد (برهان خلف). در این صورت $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\|g_k\| \geq \varepsilon, \quad \forall k \geq 0. \quad (31)$$

در نتیجه، با توجه به (۳۱) می‌توان نوشت:

$$s_k^T z_k = s_k^T y_k + \xi \max\{\theta_k, 0\} + C \|g_k\|^r \|s_k\|^r \geq C \varepsilon^r \|s_k\|^r. \quad (32)$$

از طرفی، از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$|\theta_k| = \left| -2 \nabla f(x_\mu)^T s_k + (\nabla f(x_k) + \nabla f(x_{k+1}))^T s_k \right|, \quad (33)$$

که در آن $x_\mu = \mu x_k + (1 - \mu)x_{k+1}$ ، به ازای برخی $\mu \in (0, 1)$ ؛ لذا، از (۲۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |\theta_k| &\leq \left(\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x_\mu)\| + \|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_\mu)\| \right) \|s_k\| \\ &\leq (L(1 - \mu)\|s_k\| + L\mu\|s_k\|) \|s_k\| = L\|s_k\|. \end{aligned} \quad (34)$$

حال از (۲۷)، (۲۸) و (۳۴) داریم:

$$\|z_k\| \leq \|y_k\| + \xi \frac{|\theta_k|}{\|s_k\|^r} \|s_k\| + C \gamma^r \|s_k\| \leq (L + L\xi + C\gamma^r) \|s_k\|. \quad (35)$$

در نهایت، از نامساوی کوشی-شوارتز، (۲۸)، (۳۲) و (۳۵) داریم:

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &\leq \|g_{k+1}\| + \frac{\|g_{k+1}\| \|z_k\|}{s_k^T z_k} \|s_k\| + t \frac{\|g_{k+1}\| \|s_k\|}{s_k^T z_k} \|s_k\| + \frac{\|g_{k+1}\| \|s_k\|}{s_k^T z_k} \|z_k\| \\ &\leq \gamma + \frac{\gamma(L + L\xi + C\gamma^r) \|s_k\|}{C\varepsilon^r \|s_k\|^2} \|s_k\| + M \frac{\gamma \|s_k\|}{C\varepsilon^r \|s_k\|^2} \|s_k\| \\ &= \left(1 + \frac{\gamma(L + L\xi + C\gamma^r) + M}{C\varepsilon^r} \right) \gamma. \end{aligned} \quad (36)$$

پس (۲۹) برقرار است و لذا از قضیه ۱ به (۳۰) می‌رسیم که با (۳۱) در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۳ مشاهدات عددی

در این بخش به مقایسه رفتار عددی روش پیشنهادی با روش‌های گرادیان مزدوج ارایه شده در [۱۸] می‌پردازیم. در همه روش‌ها، فرمول پیشنهاد شده در [۱۸] را برای محاسبه پارامتر t مورد استفاده قرار می‌دهیم. به طور دقیق‌تر، روش‌های پیاده‌سازی شده عبارتند از:

- ETTCG: روش گرادیان مزدوج توسعه یافته پیشنهادی با جهت جستجوی (۲۵) که در آن

$$t = \max \left\{ \xi_1, 1 - \frac{\|z_k\|^2}{s_k^T z_k} \right\}$$

- TTCG1: اولین روش گرادیان مزدوج ارایه شده در [۱۸] با جهت جستجوی (۱۶) که در آن

$$t = \max \left\{ \xi_1, 1 - \frac{\|y_k\|^2}{s_k^T y_k} \right\}$$

- TTCG2: دومین روش گرادیان مزدوج ارایه شده در [۱۸] با جهت جستجوی (۱۹) که در آن

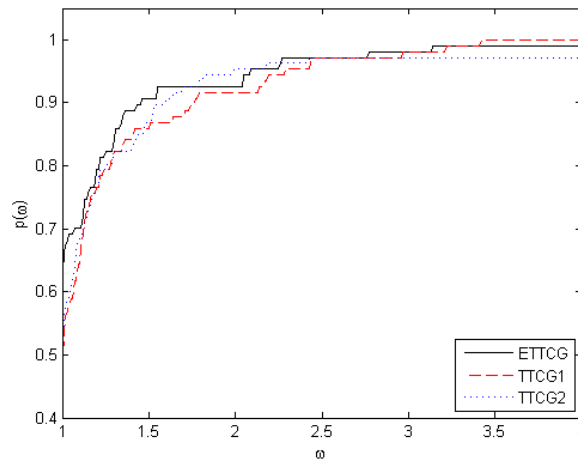
$$t = \max \left\{ \xi_1, 1 - \frac{\|\bar{y}_k\|^2}{s_k^T \bar{y}_k} \right\}$$

که در آن ξ_1 یک ثابت مثبت است. در این پژوهش، مقدار پیشنهاد شده برای ξ_1 در [۱۸] را پذیرفته و قرار دادیم $\xi_1 = 0/66$. به علاوه، در روش‌های ETTCG و TTCG2 قرار دادیم $C = 0/0001$ [۱۴] و به دلیل مؤثر بودن شرط سکانت اصلاح شده (۲۲)، در روش ETTCG قرار دادیم $\xi = 3$.

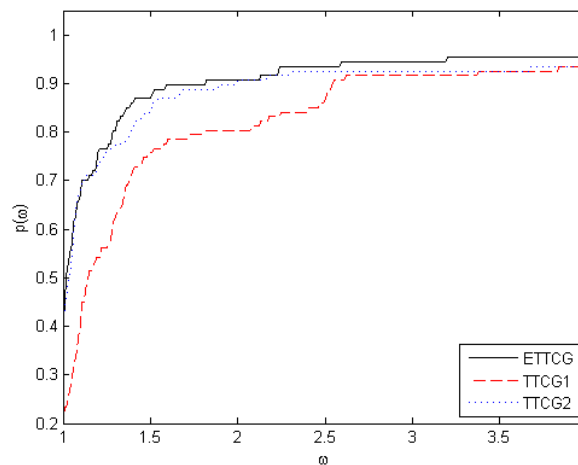
روش‌های فوق برای حل ۱۰۵ مساله با بعد حداقل ۱۰۰ ($n = 100$) انتخاب شده از کتابخانه CUTER [۲۳] به کار گرفته شدند. مشخصات کامل توابع مورد آزمون در [۲۴] آورده شده است. برنامه‌ها در محیط نرم‌افزاری MATLAB و بر کامپیوتری با پردازشگر ۲ گیگا هرتزی و رم ۱ گیگا بایتی اجرا شده‌اند. در فرایند جستجوی خطی از یک درون‌یابی درجه دوم برای رسیدن به طول گام صادق در شرایط ولف با $\delta = 0/0001$ و $\sigma = 0/9$ استفاده شده است [۱۰]. همچنین، شرایط توقف را رسیدن به تعداد ۱۰۰۰۰ تکرار یا دستیابی به

جوابی صادق در $\|g_k\|_\infty < 10^{-6} (1 + |f(x_k)|)$ در نظر گرفته‌ایم. برای مقایسه نتایج حاصل از معیار دولان‌موره روی زمان اجرا و تعداد کل ارزیابی تابع-معادل تعداد دفعات محاسبه تابع هدف به علاوه سه برابر تعداد دفعات محاسبه گرادیان-استفاده شده است [۲۵].

شکل‌های ۱ و ۲ نمودارهای دولان-موره را نشان می‌دهند. همان طور که از شکل‌ها برمی‌آید، از دیدگاه تعداد کل ارزیابی تابع روش‌ها رفتار تقریباً مشابهی دارند؛ اما از دیدگاه زمان اجرا برتری روش ETTCG، به ویژه نسبت به روش TTCG1، مشهود است؛ لذا به نظر می‌رسد به کارگیری مقادیر تابع هدف در قالب شرط سکانت ترکیبی (۲۴) در عمل تأثیر مثبتی را بر رفتار عددی روش‌های گرادیان مزدوج سه‌بخشی داشته باشد.



شکل ۱: مقایسه روش‌ها از دیدگاه تعداد کل ارزیابی تابع



شکل ۲: مقایسه روش‌ها از دیدگاه زمان اجرا

۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

استفاده از مقادیر تابع هدف در قالب شرط سکانت ترکیبی (۲۴) در روش‌های گرادیان مزدوج سه‌بخشی، علاوه بر اینکه از دیدگاه نظری سبب تضمین شرط کافی کاهشی و رسیدن به همگرایی بدون فرض تحدب گردید، از دیدگاه عددی نیز به نتایج قابل قبولی منجر شد. بر این اساس، امکان ارایه روش‌هایی کارا در بهینه‌سازی بزرگ مقیاس از نوع گرادیان مزدوج ترکیبی یا شبه‌نیوتن بی‌حافظه مبتنی بر شرط سکانت توسعه یافته (۲۴) وجود دارد.

منابع

- [1] Dai, Y. H., Han, J. Y., Liu, G. H., Sun, D. F., Yin, H. X., Yuan, Y. X., (1999). Convergence properties of nonlinear conjugate gradient methods. *SIAM Journal on Optimization*, 10, 348-358.
- [2] Hager, W. W., Zhang, H., (2006). A survey of nonlinear conjugate gradient methods. *Pacific Journal of Optimization*, 2, 35-58.
- [3] Tshilidzi, M., (2013). *Economic Modeling Using Artificial Intelligence Methods*, London: Springer.
- [4] Moyi, A. U., Leong, W. J., Saidu, I., (2014). On the application of three-term conjugate gradient method in regression analysis. *International Journal of Computer Applications*, 102, 1-4.
- [5] Wolkowicz, H., Zhao, Q., (1999). Semidefinite programming relaxations for the graph partitioning problem. *Discrete Applied Mathematics*, 97, 461-472.
- [6] Zhang, B., Zhu, Z., Li, S., (2014). A modified spectral conjugate gradient projection algorithm for total variation image restoration. *Applied Mathematics Letters*, 27, 26-35.
- [7] Pagurek, B., Woodside, C. M., (1968). The conjugate gradient method for optimal control problems with bounded control variables. *Automatica*, 4, 337-349.
- [8] Wang, L., Cao, H., Han, X., Liu, J., Xie, Y., (2015). An efficient conjugate gradient method and application to dynamic force reconstruction. *Journal of Computational Science*, 8, 101-108.
- [9] Guangbin, Z., Xiaotao, C., Xinfu, L., Xinhang, Z., Yuxing, L., (2012). On numerical methods for determination of Earth gravity field model using mass satellite gravity gradiometry data. *Geodesy and Geodynamics*, 3, 57-62.
- [10] Sun, W., Yuan, Y. X., (2006). *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*, Springer: New York.
- [11] Andrei, N., (2007). Numerical comparison of conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization. *Studies in Informatics and Control*, 16, 333-352.
- [12] Hestenes, M. R., Stiefel, E., (1952). Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49, 409-436.
- [13] Dai, Y. H., Liao, L. Z., (2001). New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods. *Applied Mathematics and Optimization*, 43, 87-101.
- [14] Zhou, W., Zhang, L., (2006). A nonlinear conjugate gradient method based on the MBFGS secant condition. *Optimization Methods and Software*, 21, 707-714.
- [15] Li, D. H., Fukushima, M., (2001). A modified BFGS method and its global convergence in nonconvex minimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 129, 15-35.
- [16] Babaie-Kafaki, S., Ghanbari, R., (2014). A descent family of Dai-Liao conjugate gradient methods. *Optimization Methods and Software*, 29, 583-591.
- [17] Zhang, L., Zhou, W., Li, D.H., (2007). Some descent three-term conjugate gradient methods and their global convergence. *Optimization Methods and Software*, 22, 697-711.
- [18] Babaie-Kafaki, S., Ghanbari, R., (2014). Two modified three-term conjugate gradient methods with sufficient descent property. *Optimization Letters*, 8, 2285-2297.
- [19] Wei, Z., Li, G., Qi, L., (2006). New quasi-Newton methods for unconstrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 175, 1156-1188.
- [20] Zhang, J. Z., Deng, N. Y., Chen, L. H., (1999). New quasi-Newton equation and related methods for unconstrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102, 147-167.

- [21] Babaie-Kafaki, S., Ghanbari, R., Mahdavi-Amiri, N., (2010). Two new conjugate gradient methods based on modified secant equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 1374-1386.
- [22] Sugiki, K., Narushima, Y., Yabe, H., (2012). Globally convergent three-term conjugate gradient methods that use secant conditions and generate descent search directions for unconstrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 153, 733-757.
- [23] Gould, N. I. M., Orban, D., Toint, Ph. L., (2003). CUTER: a constrained and unconstrained testing environment, revisited. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29, 373-394.
- [24] Babaie-Kafaki, S., (2012). A quadratic hybridization of Polak-Ribière-Polyak and Fletcher-Reeves conjugate gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154, 916-932.
- [25] Dolan, E. D., Morè, J. J., (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91, 201-213.