

## پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی: کاربرد در برنامه‌ریزی هندسی

سید مرتضی میردهقان<sup>۱\*</sup>، محمود مهدیلو<sup>۲</sup>

۱- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

۲- دکتری، گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

رسید مقاله: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۶ دی ۱۳۹۶

### چکیده

یکی از مفاهیم اساسی در آنالیز محدب و بهینه‌سازی مفهوم درون نسبی یک مجموعه است. این مفهوم وقتی استفاده می‌شود که درون یک مجموعه به علت کامل نبودن بعد آن تهی است. در این مقاله، ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک مجموعه چندوجهی پیشنهاد می‌کنیم. سپس، کاربرد این مدل در برنامه‌ریزی هندسی را بحث می‌کنیم. به‌طور مشخص، ما نشان می‌دهیم که فرم خاصی از مدل پیشنهادی ما می‌تواند تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی را با تعیین یک نقطه درونی نسبی ناحیه شدنی دوگان آن مشخص کند. در نهایت، دو مثال عددی برای تشریح کاربردهای مدل پیشنهادی ارائه می‌کنیم.

**کلمات کلیدی:** مجموعه چندوجهی، رویه، درون نسبی، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی هندسی.

### ۱ مقدمه

یکی از پرکاربردترین مفاهیم در ریاضیات و به‌خصوص در آنالیز محدب و بهینه‌سازی، مفهوم نقطه درونی است. در یک فضای توپولوژیکی، یک نقطه از یک مجموعه را یک نقطه درونی آن نامند هرگاه، یک همسایگی از آن نقطه موجود باشد به طوری که زیرمجموعه‌ی آن مجموعه باشد [۱]. مجموعه تمام نقاط درونی یک مجموعه را درون آن مجموعه می‌نامند. اگر یک مجموعه دارای بعد کامل نباشد، آنگاه درون آن تهی خواهد بود. در این حالت، مفهوم درون نسبی به‌عنوان تعمیمی از مفهوم درون معرفی می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، اگر یک مجموعه به‌عنوان یک زیرمجموعه از پوسته آفینی‌اش (نه فضایی که در آن قرار دارد) در نظر گرفته شود، آنگاه درون آن به‌عنوان درون نسبی آن مجموعه تعریف می‌شود [۱]. نکته قابل توجه این است که اگر یک مجموعه دارای بعد کامل باشد، آنگاه درون نسبی آن همان درون آن مجموعه است.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mirdehghan@shirazu.ac.ir

با استفاده از هر ابرصفحه، فضای اقلیدسی به دو بخش تقسیم می‌شود که نیم‌فضاهای (محدب بسته) تولیدشده توسط این ابرصفحه نامیده می‌شود. یک چندوجهی، مجموعه‌ای است که از اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا به وجود می‌آید. همچنین، مجموعه‌ی نقاطی از یک چندوجهی که در اشتراک یک دسته از ابرصفحه‌های سازای آن قرار دارند، یک رویه آن چندوجهی نامیده می‌شود. هر رویه یک چندوجهی خود یک چندوجهی است. به تمام رویه‌های یک چندوجهی به‌جز خود چندوجهی و مجموعه‌ی تهی، رویه‌های غیر بدیهی می‌گویند. رویه‌های غیر بدیهی یک چندوجهی، مرز آن را می‌سازد. در واقع، مرز چندوجهی از اجتماع تمام رویه‌های غیر بدیهی آن به وجود می‌آید. در برخی از مسایل بهینه‌سازی، از جمله مسایل برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی چندهدفه خطی، جواب‌های بهینه یا جواب‌های کارا بر روی مرز ناحیه شدنی و در نتیجه روی رویه‌های غیر بدیهی ناحیه شدنی قرار دارند؛ بنابراین، رویه‌های غیر بدیهی نقش بسیار مهمی در بهینه‌سازی دارند.

از آنالیز محدب [۱]، می‌دانیم که درون نسبی هر مجموعه محدب ناتهی و در حالت خاص هر مجموعه چندوجهی ناتهی، یک مجموعه محدب ناتهی است. با توجه به این مطلب، سؤال مهمی که پیش می‌آید این است که چگونه می‌توان یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی یا یک نقطه درون نسبی یک رویه از یک چندوجهی را پیدا کرد. به دلایل زیر، پاسخ این سؤال در بهینه‌سازی از اهمیت بسزایی برخوردار است:

- مشخص کردن یک نقطه درونی نسبی رویه‌ی بهینه یک مساله برنامه‌ریزی خطی برای تحلیل پارامتری مفید است [۲].
- هر جفت از نقاط درونی نسبی رویه‌های بهینه اولیه و دوگان یک مساله برنامه‌ریزی خطی یک جواب مکمل قوی را تولید می‌کند [۲].
- یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی را می‌توان برای تعیین وجود معادلات صریح (قیود نامساوی که سرتاسر ناحیه شدنی به‌صورت تساوی برقرارند) استفاده نمود [۲].
- هر جفت از نقاط درونی نسبی رویه‌های بهینه اولیه و دوگان یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی یک جواب مکمل قوی را تولید می‌کند [۳].
- بررسی وضعیت کارایی یک نقطه درونی نسبی یک رویه از ناحیه شدنی یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه وضعیت دیگر نقاط آن رویه را مشخص می‌کند. به‌طور دقیق‌تر، اگر نقطه درونی نسبی مذکور کارا باشد، آنگاه همه نقاط روی آن رویه کاراست [۴].
- در تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه مرجع سراسری یک واحد تصمیم‌گیرنده ناکارا توسط یک نقطه درونی نسبی تصویری از یک مجموعه چندوجهی (که بنا بر لم تصویر یک چندوجهی است) مشخص می‌شود. همچنین، بازده به مقیاس یک واحد تصمیم‌گیرنده ناکارا توسط یک نقطه درونی نسبی رویه‌ی مینیمال متناظر آن در مجموعه (چندوجهی) امکان تولید تعیین می‌شود [۵].
- در تحلیل پوششی داده‌ها، می‌توان کلاس‌بندی هر واحد تصمیم‌گیرنده را با استفاده از یک نقطه درونی نسبی مجموعه امکان تولید شامل همه واحدهای مغلوب‌کننده آن واحد مشخص نمود [۶].

• عدم تباهدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی، امکان پیدا نمودن جواب بهینه مساله اولیه را از طریق حل مساله دوگان آن (با استفاده از روش‌های موجود برای حل مسایل برنامه‌ریزی محدب) فراهم می‌کند. در واقع، اگر ناحیه شدنی دوگان یک مساله برنامه‌ریزی هندسی شامل عضوی با همه مؤلفه‌های مثبت باشد، آنگاه جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی هندسی را می‌توان با حل دوگان آن به دست آورد [۷].

تاکنون، روش‌های مختلفی در مقالات برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی پیشنهاد شده‌است. جفرسون و اسکات [۷] یک الگوریتم برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی ارائه نمودند. همچنین، یه [۸] یک روش برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک رویه از چندوجهی با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی ارائه کرد که تابع هدف آن مینیمم‌سازی فاصله یک نقطه درونی چندوجهی از آن رویه است. به علاوه، تو [۹] یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن نقاط درونی نسبی رویه‌های یک چندوجهی ارائه نمود و از آن برای مشخص کردن رویه‌های کارای ماکسیمال یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی استفاده نمود. اخیراً، مهدیلوزاد و همکاران [۲] روشی برای پیدا کردن یک عضو ماکسیمال یک مجموعه محدب نامنفی پیشنهاد نمودند که از آن می‌توان در پیدا نمودن نقطه درونی نسبی یک چندوجهی بهره برد.

هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای یافتن یک نقطه درونی نسبی یک مجموعه چندوجهی (با قیود از نوع تساوی و نامساوی) و بررسی کاربرد آن در برنامه‌ریزی هندسی است. برای این منظور، ابتدا، مجموعه چندوجهی را به‌طور معادل با یک مجموعه چندوجهی در یک بعد بالاتر نمایش می‌دهیم. سپس، ثابت می‌کنیم که هر عضو ماکسیمال (یک عضو با بیش‌ترین تعداد مؤلفه مثبت) مجموعه چندوجهی جدید یک نقطه درونی نسبی چندوجهی داده‌شده را مشخص می‌کند. در ادامه، یک مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌کنیم که یک عضو ماکسیمال مجموعه چندوجهی جدید و در نتیجه یک نقطه درونی نسبی چندوجهی اولیه را می‌یابد. در نهایت، به‌عنوان یک نتیجه کاربردی، یک فرم خاص از مدل پیشنهادی را برای تشخیص تباهدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی ارائه می‌کنیم.

ساختار این مقاله در ادامه به‌صورت زیر است. در بخش دوم، ابتدا نمادگذاری‌های استفاده‌شده را در این مقاله معرفی می‌کنیم و سپس، مقدماتی را از آنالیز محدب و برنامه‌ریزی هندسی به‌اختصار بیان می‌کنیم. در بخش سوم، روش پیشنهادی را به همراه قضیه‌های مربوطه ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم، کاربرد نتایج ارائه‌شده را با استفاده از دو مثال عددی تشریح می‌کنیم. با مثال اول، کاربرد مدل پیشنهادی را برای تعیین نقاط درونی نسبی رویه‌های یک چندوجهی توضیح می‌دهیم. همچنین، با مثال دوم، نحوه استفاده از روش پیشنهادی را برای تشخیص تباهدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی توضیح می‌دهیم.

## ۲ نمادگذاری و مقدمات

در این بخش، ابتدا نمادگذاری‌های استفاده‌شده را در این مقاله معرفی می‌کنیم. سپس، مقدماتی از آنالیز محدب و برنامه‌ریزی هندسی را که در بخش‌های آینده استفاده می‌شوند به‌اختصار بیان می‌کنیم.

## ۲-۱ نمادگذاری

در این مقاله، از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $\mathbb{R}^d$  نشان‌دهنده فضای اقلیدسی  $d$ -بعدی است و  $\mathbb{R}_+^d$  ( $\mathbb{R}_{++}^d$ ) نشان‌دهنده فضای اقلیدسی نامنفی (مثبت) از همان بعد است. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ  $A, B, \dots$ ، ماتریس‌ها را با حروف بزرگ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ، بردارها را با حروف کوچک برجسته  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  و مؤلفه‌های بردارها را با حروف کوچک ایتالیک  $a_1, a_2, \dots$  نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم که همه بردارها ستونی هستند و برای نمایش ترانهاده یک بردار از بالانویس  $T$  استفاده می‌کنیم. به‌علاوه، از نمادهای  $\mathbf{o}_d$  و  $\mathbf{1}_d$  برای نمایش بردارهایی در  $\mathbb{R}_+^d$  استفاده می‌کنیم که همه مؤلفه‌های آن‌ها به ترتیب برابر  $0$  و  $1$  هستند. برای نمایش مجموعه اندیس‌گذار مؤلفه‌های مثبت بردار  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ ، از نماد  $\sigma(\mathbf{x})$  استفاده می‌کنیم و تعداد اعضای آن را به صورت  $n^+(\mathbf{x}) = \text{Card}(\sigma(\mathbf{x}))$  یعنی  $n^+(\mathbf{x}) = \text{Card}(\sigma(\mathbf{x}))$  نمایش می‌دهیم؛ یعنی  $n^+(\mathbf{x}) = \text{Card}(\sigma(\mathbf{x}))$ .

## ۲-۲ مقدماتی از آنالیز محدب

در این بخش، تعاریف و مفاهیمی مقدماتی از آنالیز محدب ارائه می‌شود که در ادامه، در بحث‌ها و تئوری‌های پیشنهادی ما، استفاده می‌گردد. تعاریف و مفاهیم بیان‌شده در این بخش برگرفته از [۱، ۲، ۱۰] است.

**تعریف ۱** فرض کنید  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ . در این صورت، یک ترکیب آفین از این نقاط، نقطه  $\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j$  است به طوری که  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  و  $\mathbf{1}_k^T \lambda = 1$ .

**تعریف ۲** پوسته آفین مجموعه  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  عبارت است از مجموعه همه ترکیبات آفین زیرمجموعه‌های متناهی آن و با نماد  $\text{aff}(X)$  نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۳** مجموعه  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  محدب است اگر و تنها اگر،  $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \mathbf{x}_2 \in X$  به ازای هر  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$  و هر  $\lambda \in [0, 1]$ .

**تعریف ۴** مجموعه محدب  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  نامنفی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر زیرمجموعه  $\mathbb{R}_+^n$  باشد.

**تعریف ۵** یک عضو ماکسیمال مجموعه محدب نامنفی  $X \subseteq \mathbb{R}_+^d$  است اگر و تنها اگر  $\mathbf{x}^{\max} \in \arg \max_{\mathbf{x} \in X} n^+(\mathbf{x})$ .

حال، مفهوم درون نسبی یک مجموعه دلخواه در  $\mathbb{R}^d$  را معرفی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا  $\varepsilon$ -همسایگی یک نقطه  $\mathbf{x}_0$  در  $\mathbb{R}^d$  را به صورت مجموعه  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$  تعریف می‌کنیم به طوری که  $\|\cdot\|$  نشان‌دهنده یک نرم است.

**تعریف ۶** اگر مجموعه  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  به عنوان یک زیرمجموعه  $\text{aff}(X)$  در نظر گرفته شود، آنگاه درون این مجموعه به عنوان درون نسبی آن تعریف و با نماد  $\text{ri}(X)$  نمایش داده می‌شود؛ به عبارت دیگر،  $\mathbf{x}_0 \in \text{ri}(X)$  اگر و تنها اگر  $\varepsilon > 0$  موجود باشد به طوری که  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap \text{aff}(X) \subseteq X$ .

مجموعه تمام نقاط درونی (نسبی) یک مجموعه را درون (نسبی) آن مجموعه می‌نامند. توجه کنید که اگر درون یک مجموعه ناتهی باشد، آنگاه نقاط درونی آن، همان نقاط درونی نسبی آن هستند. به‌علاوه، درون نسبی مجموعه محدب  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  را می‌توان به فرم معادل زیر بیان کرد:

$$\text{ri}(X) = \{ \mathbf{x} \in X : \forall \mathbf{y} \in X, \exists \delta > 1 \text{ such that } \delta \mathbf{x} + (1-\delta)\mathbf{y} \in X \}. \quad (1)$$

**تعریف ۷** ابرصفحه  $H_{\mathbf{p},\alpha} \subseteq \mathbb{R}^d$  با بردار گرادیان  $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}_d$  عبارت است از مجموعه متناظر با جفت  $(\mathbf{p}, \alpha)$  که به صورت  $H_{\mathbf{p},\alpha} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{p}^T \mathbf{x} = \alpha \}$  تعریف می‌شود.

با استفاده از هر ابرصفحه، فضای  $\mathbb{R}^d$  به دو بخش تقسیم می‌شود که نیم‌فضاهای (محدب بسته) تولیدشده توسط این ابرصفحه نامیده می‌شود. دو نیم‌فضای متناظر  $H_{\mathbf{p},\alpha}$  به صورت زیر هستند:

$$H_{\mathbf{p},\alpha}^+ = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{p}^T \mathbf{x} \geq \alpha \}, \quad H_{\mathbf{p},\alpha}^- = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq \alpha \}.$$

چون هر نیم‌فضا یک مجموعه محدب بسته است، اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا تشکیل یک مجموعه محدب بسته می‌دهد. بر این اساس، تعریف زیر را داریم:

**تعریف ۸** مجموعه تولیدشده به وسیله اشتراک تعداد متناهی از نیم‌فضاها یک چندوجهی نامیده می‌شود؛ به عبارت دیگر، هر مجموعه چندوجهی به فرم  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{p}_i^T \mathbf{x} \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m \}$  است به طوری که  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  و  $\mathbf{o}_d \neq \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$  به ازای هر  $i = 1, \dots, m$ .

## ۲-۳ مقدماتی از برنامه‌ریزی هندسی

برنامه‌ریزی هندسی یکی از انواع مسایل بهینه‌سازی غیرخطی است که توسط دافین و همکاران [۱۱] در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد شد. تابع هدف و قیود این مساله دارای ساختار خاصی هستند. از ویژگی‌های جالب برنامه‌ریزی هندسی می‌توان به (الف) وجود جواب بهینه سراسری و (ب) تبدیل یک مساله برنامه‌ریزی هندسی اولیه با تابع هدف غیرخطی و قیود غیرخطی به یک مساله دوگان با تابع هدف غیرخطی و قیود خطی اشاره کرد [۷]. در حالت کلی، مساله برنامه‌ریزی هندسی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad z &= \sum_{k \in K_0} c_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in X &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{k \in K_i} c_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} \leq 1, i = 1, \dots, m, \mathbf{x} > \mathbf{o}_n \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

به طوری که  $K_0 = \{1, \dots, p_1\}$ ،  $K_i = \{p_i + 1, \dots, p_{i+1}\}$  و  $p_{m+1} = p$ . همان‌طور که می‌بینیم، تابع هدف، قید اول، ...، و قید  $m$  تشکیل‌دهنده  $X$  همگی توابع پوزینومیال (توابع چندجمله‌ای با ضرایب مثبت  $c_k \in \mathbb{R}_{++}$  و توان‌های حقیقی  $a_{kj} \in \mathbb{R}$ ) از بردار متغیر  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^n$  هستند به طوری که تعداد جملات آن‌ها به ترتیب برابر با  $p_1, p_2 - p_1, \dots, p - p_m$  است. همچنین، مجموعه‌های  $K_0, K_1, \dots, K_m$  یک افزاز از مجموعه  $\{1, \dots, p\}$  را تشکیل می‌دهند. از این رو، مساله (۲) مساله برنامه‌ریزی پوزینومیال نیز نامیده می‌شود.

متناظر مساله اولیه (۲)، مساله دوگان به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= \prod_{k=1}^p \left( \frac{c_k}{y_k} \right)^{y_k} \times \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\lambda_i} \\ \text{s.t. } \mathbf{y} \in Y &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \sum_{k=1}^p \mathbf{a}_k y_k = \mathbf{o}_n, \sum_{k \in K_0} y_k = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{o}_p \right\}, \\ \text{که در آن } \lambda_i &= \sum_{k \in K_i} y_k \text{ و } \mathbf{a}_k^T = (a_{k1}, \dots, a_{kn})^T, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

به وضوح، ناحیه شدنی  $Y$  یک مجموعه چندوجهی است. اگر  $Y \cap \mathbb{R}_{++}^p = \emptyset$ ، آنگاه مساله برنامه‌ریزی هندسی تباهیده نامیده می‌شود. این بدین معنی است که تباهیدگی وقتی اتفاق می‌افتد که جوابی شدنی برای مساله دوگان یافت نشود به طوری که همه مؤلفه‌های آن مثبت باشند.

می‌توان ثابت نمود که تابع هدف مساله (۳) یک تابع محدب است و لذا، مساله (۳) یک مساله برنامه‌ریزی محدب با قيود خطی است [۱۰]. این نشان می‌دهد که حل این مساله به مراتب ساده‌تر از حل مساله اولیه است. از طرف دیگر، در صورت عدم وجود تباهیدگی، رابطه زیر بین متغیرهای مسایل اولیه و دوگان نشان می‌دهد که جواب بهینه مساله اولیه را می‌توان از جواب بهینه مساله دوگان متناظر آن به دست آورد [۷]:

$$c_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} = \begin{cases} y_k w, & k \in K_0, \\ \frac{y_k}{\lambda_i}, & k \in K_i, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4)$$

به طور خلاصه، تشخیص تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی حایز اهمیت است؛ زیرا این تشخیص امکان پیدا نمودن جواب بهینه مساله اولیه از طریق حل مساله دوگان متناظر آن، با استفاده از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی محدب را فراهم می‌کند.

### ۳ پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی

فرض کنیم  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  دو ماتریس حقیقی به ترتیب از مرتبه‌های  $m \times n$  و  $p \times n$  هستند. به علاوه،  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  و  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ . در این بخش، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی به فرم زیر ارائه می‌کنیم:

$$P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{Cx} \leq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}_n \}. \quad (5)$$

برای یافتن یک نقطه درونی نسبی مجموعه چندوجهی  $P$ ، ابتدا ارتباط میان نقاط درونی نسبی این مجموعه و عناصر ماکسیمال مجموعه چندوجهی نامنفی زیر را در قضیه ۱ مشخص می‌کنیم:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{Cx} + \mathbf{s} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}_n, \mathbf{s} \geq \mathbf{o}_p \right\}. \quad (6)$$

قضیه ۱ اگر  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\max} \\ \mathbf{s}^{\max} \end{pmatrix}$  یک عضو ماکسیمال مجموعه  $Q$  باشد، آنگاه  $\mathbf{x}^{\max} \in \text{ri}(P)$ .

**اثبات:** به برهان خلف، فرض کنیم  $\mathbf{x}^{\max} \notin \text{ri}(P)$  در این صورت، بنا بر (۱)،  $\hat{\mathbf{y}} \in P$  موجود است به طوری که  $\delta \mathbf{x}^{\max} + (1-\delta)\hat{\mathbf{y}} \notin P$  به ازای هر  $\delta > 1$  برقرار است. اگر قرار دهیم  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{d} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{y}}$ ، آنگاه به راحتی می توان بررسی نمود که  $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} \in Q$  از طرف دیگر، پوسته آفینی  $Q$  به صورت زیر است:

$$\text{aff}(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{Cx} + \mathbf{s} = \mathbf{d} \right\}.$$

به ازای هر  $\delta > 1$ ، داریم  $\delta \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\max} \\ \mathbf{s}^{\max} \end{pmatrix} + (1-\delta) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} \in \text{aff}(Q) \setminus Q$ ، در نتیجه، به ازای هر  $\delta > 1$ ،  $\delta \mathbf{x}^{\max} + (1-\delta)\hat{\mathbf{y}} \not\geq \mathbf{o}_n$  یا  $\delta \mathbf{s}^{\max} + (1-\delta)\hat{\mathbf{s}} \not\geq \mathbf{o}_p$  و یا هر دو برقرارند.

اگر  $\delta \mathbf{x}^{\max} + (1-\delta)\hat{\mathbf{y}} \not\geq \mathbf{o}_n$ ، آنگاه  $k \in \{1, \dots, n\}$  موجود است، به طوری که  $\delta x_k^{\max} + (1-\delta)\hat{y}_k < 0$  به ازای هر  $\delta > 1$  برقرار است، در نتیجه  $x_k^{\max} < \hat{y}_k$ . چون  $x_k^{\max} \geq 0$ ، داریم  $\hat{y}_k > 0$ . ادعا می کنیم  $x_k^{\max} = 0$  در غیر این صورت، واضح است که  $1 < \frac{\hat{y}_k}{\hat{y}_k - x_k^{\max}}$ . پس به ازای هر

$\delta > 1$  خواهیم داشت  $\delta < \frac{\hat{y}_k}{\hat{y}_k - x_k^{\max}}$ ، که یک تناقض است. این تناقض ادعا را ثابت

می کند. اگر قرار دهیم  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{s}' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\max} \\ \mathbf{s}^{\max} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$ ، آنگاه تحذب  $Q$  ایجاب می کند که  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{s}' \end{pmatrix} \in Q$ ؛ ولی

از آنجا که  $x_k^{\max} = 0$  و  $x'_k \geq y_k > 0$ ، نتیجه می شود  $n^+ \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{\max} \\ \mathbf{s}^{\max} \end{pmatrix} < n^+ \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{s}' \end{pmatrix}$ ، که یک تناقض با فرض قضیه است؛ بنابراین، فرض خلف باطل است.

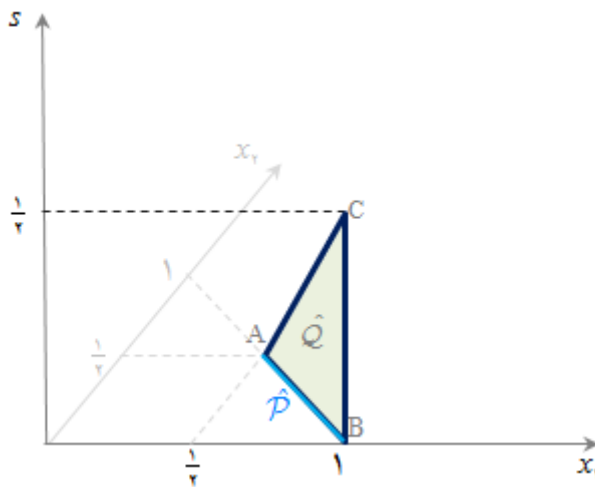
در حالتی که  $\delta \mathbf{s}^{\max} + (1-\delta)\hat{\mathbf{s}} \not\geq \mathbf{o}_p$ ، می توان مشابه حالت اول به تناقض رسید؛ بنابراین،

■  $\mathbf{x}^{\max} \in \text{ri}(P)$  در هر دو حالت ثابت می شود.

بنا بر قضیه ۱، یک نقطه درونی نسبی  $P$  را می توان با پیدا کردن یک عضو ماکسیمال مجموعه  $Q$  یافت. با توجه به این مطلب، دو سؤال مهم را در اینجا مطرح و پاسخ می دهیم. سؤال اول این است که چرا به جای یافتن یک عضو ماکسیمال مجموعه  $P$ ، به دنبال یافتن یک عضو ماکسیمال مجموعه  $Q$  هستیم؛ به عبارت دیگر، آیا نمی توان یک نقطه درونی نسبی  $P$  را با استفاده از یک عضو ماکسیمال آن به دست آورد؟ سؤال دوم این است که آیا هر عضو ماکسیمال  $Q$  یک نقطه درونی نسبی آن نیز است؟ در اینجا، با ارایه یک مثال نشان می دهیم که پاسخ هر دو سؤال منفی است. برای این منظور، مجموعه  $\hat{P} \subseteq \mathbb{R}^2$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\hat{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq \frac{1}{2}, x_1, x_2 \geq 0 \right\}. \quad (7)$$

همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینیم، مجموعه  $\hat{P}$  متشکل از همه نقاط روی پاره‌خط بسته  $\overline{AB}$  است و همه نقاط روی پاره‌خط باز  $\overline{AB}$  (همه نقاط روی پاره‌خط به‌جز نقاط انتهایی  $A$  و  $B$ ) مجموعه نقاط درونی نسبی مجموعه  $\hat{P}$  را تشکیل می‌دهند. درحالی‌که، عناصر ماکسیمال مجموعه  $\hat{P}$  متشکل از همه نقاط روی این پاره‌خط به‌جز نقطه  $B$  است؛ زیرا هر دو مؤلفه این نقاط مثبت هستند؛ بنابراین، اگرچه نقطه  $A$  یک عضو ماکسیمال مجموعه  $\hat{P}$  است، اما نقطه درونی نسبی آن نیست. این نشان می‌دهد که نقاط درونی نسبی مجموعه چندوجهی  $\hat{P}$  با مجموعه عناصر ماکسیمال آن یکسان نیستند. درنتیجه، جواب سؤال اول ما منفی است.



شکل ۱. مجموعه نقاط درونی نسبی و مجموعه عناصر ماکسیمال چندوجهی  $P$

حال، مجموعه  $\hat{Q}$  متناظر مجموعه  $\hat{P}$  را در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر است:

$$\hat{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, x_1 - s = \frac{1}{4}, x_1, x_2, s \geq 0 \right\}.$$

در شکل ۱، مجموعه  $\hat{Q}$  متشکل از همه نقاط مثلث  $\triangle ABC$  است و همه نقاط داخل این مثلث (به‌جز نقاط مرزی آن) مجموعه نقاط درونی نسبی این مجموعه هستند. از طرف دیگر، همه نقاط روی این مثلث به‌جز نقاط روی پاره‌خط‌های بسته  $\overline{AB}$  و  $\overline{BC}$  دارای سه مؤلفه مثبت هستند و لذا عناصر ماکسیمال مجموعه  $\hat{Q}$  هستند. این نشان می‌دهد که همه عناصر ماکسیمال  $\hat{Q}$  نقاط درونی نسبی آن نیستند (نقاط روی پاره‌خط باز  $\overline{AC}$ ). درنتیجه، جواب سؤال دوم ما نیز منفی است. (باین وجود، همان‌طور که در قضیه ۱ ثابت نمودیم، تصویر این عناصر روی صفحه  $x_1x_2$  که پاره‌خط باز  $\overline{AB}$  را تشکیل می‌دهند همگی نقاط درونی نسبی مجموعه  $\hat{P}$  هستند.)



در ادامه، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک عضو ماکسیمال مجموعه چندوجهی نامنفی  $Q$  را با استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی خطی به دست آورد. برای این منظور، ابتدا مجموعه  $Q$  را به فرم معادل زیر نمایش می‌دهیم:

$$Q = \left\{ \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\alpha, \mathbf{Cx} + \mathbf{s} = \mathbf{d}\alpha, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}_p, \alpha \geq 1 \right\}. \quad (8)$$

در این صورت، قضیه زیر برقرار است.

**قضیه ۲** فرض کنید  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*)$  جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \mathbf{1}_n^T \mathbf{w} + \mathbf{1}_p^T \mathbf{z} \\ \text{s.t.} & \\ & \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{b}, \\ & \mathbf{C}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) + \mathbf{s} + \mathbf{z} = \alpha \mathbf{d}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{0}_n \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1}_p, \alpha \geq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

در این صورت،  $\left( \frac{\mathbf{x}^{\max}}{\mathbf{s}^{\max}} \right) := \frac{1}{\alpha^*} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* + \mathbf{w}^* \\ \mathbf{s}^* + \mathbf{z}^* \end{pmatrix}$  یک عضو ماکسیمال مجموعه  $Q$  است.

**اثبات:** بدون کاستن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم  $\mathbf{x}^{\max} = (x_1^{\max}, \dots, x_l^{\max}, 0, \dots, 0)^T$  و  $\mathbf{s}^{\max} = (s_1^{\max}, \dots, s_k^{\max}, 0, \dots, 0)^T$ . همچنین، به برهان خلف، فرض می‌کنیم  $\frac{1}{\alpha^*} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$  عضوی از  $Q$  است به طوری که  $n^+ \left( \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{s}}} \right) > n^+ \left( \frac{\mathbf{x}^{\max}}{\mathbf{s}^{\max}} \right)$ . در این صورت، یکی از حالت‌های زیر و یا هر دو اتفاق می‌افتد:

حالت اول:  $t \in \{l+1, \dots, n\}$  موجود است به طوری که  $\bar{x}_t > 0$  و  $x_t^{\max} = 0$ .

حالت دوم:  $u \in \{k+1, \dots, p\}$  موجود است به طوری که  $\bar{s}_u > 0$  و  $s_u^{\max} = 0$ .

به راحتی، می‌توان بررسی کرد که  $\frac{1}{\alpha^* + \bar{\alpha}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* + \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{w}^* \\ \mathbf{s}^* + \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{z}^* \end{pmatrix} \in Q$ . بدون کاستن از کلیت برهان، می‌توان

فرض نمود که همه مؤلفه‌های مثبت  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* + \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{w}^* \\ \mathbf{s}^* + \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{z}^* \end{pmatrix}$  بزرگ‌تر از ۱ هستند. بر مبنای این فرض، تعریف می‌کنیم:

$$\hat{x}_j := \begin{cases} x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j - 1, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j > 0, \\ 0, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j = 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\hat{w}_j := \begin{cases} 1, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j > 0, \\ 0, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j = 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\hat{s}_r := \begin{cases} s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r - 1, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r > 0, \\ 0, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r = 0, \end{cases} \quad r = 1, \dots, p,$$

$$\hat{z}_r := \begin{cases} 1, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r > 0, \\ 0, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r = 0, \end{cases} \quad r = 1, \dots, p,$$

$$\hat{\alpha} := \alpha^* + \bar{\alpha}.$$

در این صورت،  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\alpha})$  یک جواب شدنی مساله (۹) است. در نتیجه، متناظر حالت‌های اول و دوم مذکور به ترتیب داریم:  $\mathbf{1}_n^T \hat{\mathbf{w}} > \mathbf{1}_n^T \mathbf{w}^*$  و  $\mathbf{1}_p^T \hat{\mathbf{z}} > \mathbf{1}_p^T \mathbf{z}^*$ . بنابراین، اگر هر یک از حالت‌های اول و دوم و یا هر دو اتفاق بیافتند، خواهیم داشت:  $\mathbf{1}_n^T \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{1}_p^T \hat{\mathbf{z}} > \mathbf{1}_n^T \mathbf{w}^* + \mathbf{1}_p^T \mathbf{z}^*$  که تناقض با فرض بهینگی  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*)$  است. در نتیجه، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. ■

حال، با استفاده از قضایای ۱ و ۲، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

**نتیجه ۱** فرض کنید  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*)$  جواب بهینه مساله (۹) باشد. در این صورت،  $\frac{1}{\alpha^*}(\mathbf{x}^* + \mathbf{w}^*)$  یک نقطه درونی نسبی  $P$  است.

**نتیجه ۲** فرض کنید  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{w}^*)$  جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \mathbf{1}_p^T \mathbf{w} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{k=1}^p (y_k + w_k) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_p \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{1}_p, \alpha \geq 1. \end{aligned} \quad (10)$$

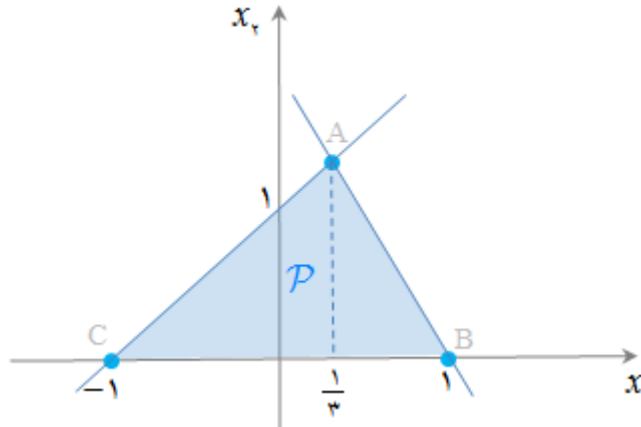
در این صورت،  $\frac{1}{\alpha^*}(\mathbf{y}^* + \mathbf{w}^*)$  یک نقطه درونی نسبی  $Y$  است. همچنین، مساله برنامه‌ریزی هندسی (۳) تباهیده است اگر و تنها اگر  $\mathbf{w}^* \notin \mathbb{R}_{++}^p$ .

## ۴ مثال‌های عددی

در این بخش، کاربردهای مدل پیشنهادی را با استفاده از دو مثال عددی تشریح می‌کنیم.

**مثال ۱** مجموعه چندوجهی  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  زیر را در نظر می‌گیریم که در شکل ۲ نمایش داده شده است:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \geq 0 \right\}.$$



شکل ۲. نمایش چندوجهی  $P$  در مثال ۱

همان‌طور که می‌بینیم، چندوجهی  $P$  دارای شش رویه غیر بدیهی است: سه رویه با بعد صفر (نقاط رأسی  $A$ ،  $B$  و  $C$ ) و سه رویه با بعد یک (یال‌های  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  و  $\overline{BC}$ ). خود چندوجهی  $P$  نیز یک رویه بدیهی چندوجهی است. واضح است که نقاط درونی نسبی هر یک از نقاط رأسی، خود آن نقاط هستند. برای پیدا کردن نقاط درونی نسبی رویه‌های دیگر، از مدل (۹) استفاده کرده‌ایم که نتایج حاصل در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. نقاط درونی نسبی چندوجهی  $P$  و رویه‌های یک‌بعدی آن

$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$P$	رویه
$(0/5, 0)^T$	$(0, 1)^T$	$(0/6, 0/8)^T$	$(0, 0/5)^T$	نقطه درونی نسبی

**مثال ۲** مساله اولیه برنامه‌ریزی هندسی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{Min } 2x_1^+ x_2^- x_3^- + x_1^+ x_2^+ x_3^-$$

s.t.

$$4x_1^- x_2^+ x_3^- + 2x_2^- + x_3^+ \leq 1,$$

$$x_1^+ x_2^- + x_3^- + 5x_1^+ x_2^- + 3x_2^+ \leq 1,$$

$$x_j > 0, j = 1, \dots, 4.$$

دوگان مساله فوق به صورت زیر است:

$$\text{Max} \left( \frac{2}{y_1} \right)^{y_1} \left( \frac{1}{y_2} \right)^{y_2} \left( \frac{4}{y_3} \right)^{y_3} \left( \frac{2}{y_4} \right)^{y_4} \left( \frac{1}{y_5} \right)^{y_5} \left( \frac{1}{y_6} \right)^{y_6} \left( \frac{1}{y_7} \right)^{y_7} \left( \frac{5}{y_8} \right)^{y_8} \left( \frac{3}{y_9} \right)^{y_9} \\ \times (y_2 + y_6 + y_5)^{y_2+y_6+y_5} (y_6 + y_7 + y_8 + y_9)^{y_6+y_7+y_8+y_9}$$

s.t.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 1, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 + y_6 + y_8 &= 0, \\ -y_1 + 4y_2 - y_6 + 3y_5 - 2y_7 + y_9 &= 0, \\ -4y_1 + y_2 + y_3 - y_8 &= 0, \\ -7y_2 + y_3 - 2y_6 &= 0, \\ y_k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, 9. \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینیم، ناحیه شدنی مساله دوگان فوق یک مجموعه چندوجهی است. برای تشخیص تباهیدگی مساله فوق، مدل (۱۰) را برای تعیین یک نقطه درونی نسبی این چندوجهی حل می‌کنیم که جواب بهینه آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y_1^* &= 1/5, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 8, \quad y_4^* = 0, \quad y_5^* = 0, \quad y_6^* = 0, \quad y_7^* = 1/25, \quad y_8^* = 0, \quad y_9^* = 0, \\ w_1^* &= w_2^* = w_3^* = w_4^* = w_5^* = w_6^* = w_7^* = w_8^* = w_9^* = 1, \quad w_{10}^* = 0, \quad \alpha^* = 3/5. \end{aligned}$$

در نتیجه، نقطه درونی نسبی ناحیه شدنی مساله دوگان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= 0/7143, \quad \bar{y}_2 = 0/2857, \quad \bar{y}_3 = 2/7514, \quad \bar{y}_4 = 0/2857, \\ \bar{y}_5 &= 0/2857, \quad \bar{y}_6 = 0/2857, \quad \bar{y}_7 = 0/6429, \quad \bar{y}_8 = 0, \quad \bar{y}_9 = 0/2857. \end{aligned}$$

حال، چون  $w^* \notin \mathbb{R}_{++}^9$ ، نتیجه ۲ دلالت بر تباهیدگی مساله داده شده دارد؛ بنابراین، جواب بهینه مساله اولیه را نمی‌توان با حل مساله دوگان و استفاده از رابطه (۴) به دست آورد.

در نهایت، توجه می‌کنیم که گرادیان و مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع هدف در هیچ کدام از جواب‌های مساله دوگان موجود نیست و لذا حل مدل دوگان با روش‌های مرسوم که غالباً مبتنی بر مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع هدف هستند، امکان‌پذیر نیست.

## منابع

- [1] Rockafellar, R. T. (1997). *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Mehdiloozad, M., Tone, K., Askarpour, R., Ahmadi, M. B. (2018). Finding a maximal element of a non-negative convex set through its characteristic cone: An application to finding a strictly complementary solution. *Computational and Applied Mathematics*, 37(1), 53–80.
- [3] Mehdiloozad, M., Tone, K., Ahmadi, M. B. (2016). The strict complementary slackness condition in linear fractional programming. *arXiv e-print (arXiv:1603.00660)*.
- [4] Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. New York: Springer.
- [5] Mehdiloozad, M., Mirdehghan, S. M., Sahoo, B. K., Roshdi, I. (2015). On the identification of the global reference set in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 245(3), 779–788.
- [6] Mehdiloozad, M., Ahmadi, M. B., Sahoo, B. K. (2017). On classifying decision making units in DEA: A unified dominance-based model. *Annals of Operations Research*, 250(1), 167–184.

- [7] Jefferson, T. R., Scott, C. H. (1978). On finding a point in the relative interior of a polyhedral set and degeneracy in geometric programming. *Journal of Australian Mathematical Society*, 20(4), 487–494.
- [8] Ye, Y. (1992). On the finite convergence of interior-point algorithms for linear programming. *Mathematical Programming*, 57(1–3), 325–335.
- [9] Tu, T. V. (2015). The maximal descriptor index set for a face of a convex polyhedral set and some applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 429(1), 395–414.
- [10] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming*. New Jersey: John Wiley and Sons.
- [11] Duffin, R. J., Peterson, E. L., Zener, C. (1967). *Geometric Programming: Theory and Application*. New York: John Wiley and Sons.