

مطالعه‌ی تاثیر فاکتورهای انقباضی اصل دسترسی پذیری ضعیف در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با خروجی‌های نامطلوب

امیر کلهر^۱، رضا کاظمی متین^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران.

۲- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران.

رسید مقاله: ۱۰ تیر ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۱۴ بهمن ۱۳۹۶

چکیده

در مواجهه با خروجی‌های نامطلوب، استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای تمام خروجی‌ها روشی متداول در تحلیل پوششی داده‌هاست. در مورد چگونگی استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف دو دیدگاه متفاوت وجود دارد که باعث به وجود آمدن دو نوع متفاوت از مجموعه امکان تولید شده است. این مقاله مجموعه امکان تولید ساخته شده با فاکتورهای انقباضی یکسان برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری و مجموعه امکان تولید ساخته شده با فاکتورهای انقباضی مجزا برای هر واحد تصمیم‌گیری را در ساختار شبکه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار داده است و با استفاده از مثال‌های عددی نشان داده شده که مدلی است با فاکتور انقباضی مجزا در مقایسه با مدل مشابه آن که با فاکتور انقباضی یکسان تعریف شده است، دارای قدرت تشخیص ناکارایی بیش‌تری است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، خروجی‌های نامطلوب، دسترسی‌پذیری ضعیف، مجموعه امکان تولید.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی غیرپارامتری برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) است که این واحدها برای تولید خروجی‌های مشابه با سایر واحدها از ورودی‌های مشابه استفاده می‌نمایند. هدف اصلی در صنایع تولیدی، به دست آوردن بیش‌ترین مقدار خروجی به ازای مصرف کردن کم‌ترین مقدار از ورودی‌هاست؛ اما اغلب در کنار تولید خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوب نیز تولید می‌شود. مانند گازهای مضر تولید شده توسط نیروگاه‌های برق و امثال آن؛ بنابراین در این گونه سیستم‌ها برخلاف مدل‌های کلاسیک DEA، تولید بیش‌تر این گونه خروجی‌ها موردنظر نخواهد بود.

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiau.ac.ir

در تحلیل پوششی داده‌ها استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها در ساخت مجموعه امکان تولید (PPS) روشی متداول برای مواجهه با خروجی‌های نامطلوب است. از دیدگاه شفرد^۱ [۱] دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها به این صورت بیان می‌شود: "خروجی‌ها به صورت ضعیف دسترسی‌پذیرند اگر هر انقباض متناسب از خروجی‌ها شدنی باشد". در مورد چگونگی انقباض خروجی‌ها در اصل دسترسی‌پذیری ضعیف دو دیدگاه متفاوت وجود دارد. فار^۲ و گراسکف^۳ [۲] استفاده از فاکتور انقباضی یکسان برای تمام DMU ها را پیشنهاد دادند؛ در حالی که کاسمانن^۴ [۳] مدعی شد که دلیلی برای استفاده از فاکتورهای انقباضی یکسان برای تمام DMU ها وجود ندارد. همچنین، کاسمانن و پودینوسکی^۵ [۴] با یک مثال نشان دادند که استفاده از فاکتور انقباضی یکسان امکان غیرمحدب شدن مجموعه امکان تولید را به وجود می‌آورد و ثابت کردند مجموعه امکان تولیدی که با در نظر گرفتن فاکتورهای انقباضی مجزا به دست بیاید کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در اصول موضوعه‌های تحدب، دسترسی‌پذیری قوی برای ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نیز دسترسی‌پذیری ضعیف برای تمام خروجی‌ها صدق می‌کند.

مدل‌های سنتی DEA واحدهای تصمیم‌گیری را مانند "جعبه سیاه" در نظر می‌گیرند. به این معنی که اطلاعاتی که در ارزیابی آن‌ها استفاده می‌شود تنها شامل مقادیر ورودی‌های مصرف‌شده و مقادیر خروجی‌های تولیدشده است و عملیات داخلی DMU ها تاثیری در عملکرد آن‌ها ندارد. با تحت نظر قرار دادن ساختار و روابط داخلی DMU ها علی‌رغم اینکه می‌توان عملکرد زیرواحدها را به طور مجزا مورد بررسی قرار داد؛ بلکه می‌توان منابع بیش‌تری از ناکارایی و محل به وجود آمدن آن ناکارایی را در DMU معین کرد. از این رو مطالعه‌ای که در آن ساختار داخلی DMU ها در نظر گرفته شده باشد به مراتب اطلاعات سودمندتری را در مقایسه با روش‌های کلاسیک در اختیار قرار می‌دهد. در دو دهه گذشته مطالعات زیادی در مورد تاثیر ساختار داخلی DMU ها در عملکرد و کارایی آن‌ها انجام شده است که این دسته از مطالعات به تحلیل، پوششی داده‌های شبکه‌ای (NDEA) معروف شده است. کائو^۶ [۵] در مقاله خود تقریباً تمام این مطالعات را دسته‌بندی کرده است.

بر اساس ساختار داخلی مولفه‌های عملیاتی DMU ها، NDEA را می‌توان به حالت‌های سری، موازی و ترکیبی یا جامع دسته‌بندی کرد. در ساختار نوع سری هر زیرواحد می‌تواند ورودی‌ها و محصولات میانی تولیدشده توسط زیرواحد قبلی را مصرف کند و خروجی‌ها و محصولات میانی دیگری را تولید کند. ساختار شبکه‌ای دومارحله‌ای که تعداد زیادی از مقالات ارایه شده را به خود اختصاص داده است، حالت خاصی از ساختار نوع سری است. در ساختار نوع موازی تمام ورودی‌ها به DMU در بین زیرواحدهای آن تقسیم می‌شود. هر زیرواحد به طور مجزا با مصرف بعضی ورودی‌ها، خروجی‌هایی را تولید می‌کند. در نهایت مجموع خروجی‌های تولیدشده توسط تمام زیرواحدها، خروجی‌های DMU را تشکیل می‌دهد. در این نوع ساختار هیچ

¹ Shephard

² Fare

³ Grosskopf

⁴ Kuosmanen

⁵ Podinovski

⁶ Kao

محصول میانی وجود ندارد. ساختار جامع شبکه ترکیبی از دو نوع سری و موازی است. به بیان دیگر هر زیرواحد می تواند ورودی ها و محصولات میانی تولید شده توسط بقیه زیرواحدها را مصرف کند و خروجی ها و محصولات میانی دیگری را تولید کند.

حضور خروجی های نامطلوب در NDEA در چند مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. کردرستی و امیر تیموری [۶] سیستمی چند مرحله ای را در نظر گرفتند که در آن محصول میانی می توانست نامطلوب در نظر گرفته شود و مدلی مضربی را برای ارزیابی عملکرد واحدها در این حالت ارائه دادند. فوکویاما^۱ و وبر^۲ [۷] عملکرد DMU ها را در حضور خروجی های بد با استفاده از یک مدل دومرحله ای شبکه بررسی کردند. آن ها مدل هایی مانند اندازه ناکارایی مبتنی بر کمکی (SBI) و تابع فاصله جهت دار (DDF) را برای ساختن یک اندازه کارایی در ساختار جامع NDEA استفاده کردند. لوزانو^۳ و همکارانش [۸] ساختار جامع شبکه را در حضور خروجی های نامطلوب مورد مطالعه قرار داده و با در نظر گرفتن اصل دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی ها و استفاده از فاکتور انقباضی یکسان برای تمام واحدها، مجموعه امکان تولید را برای ساختار جامع شبکه معرفی کردند. مقبولی و همکارانش [۹] ساختار دومرحله ای شبکه را در حالتی که خروجی نامطلوب مرحله ی اول به عنوان ورودی نامطلوب در مرحله ی دوم مورد استفاده قرار می گرفت، مورد بررسی قرار دادند. آن ها در ساختن مجموعه امکان تولید در حضور خروجی های نامطلوب از اصل دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی ها و از فاکتورهای انقباضی مجزا استفاده کردند. بیان^۴ و همکارانش [۱۰] یک مدل دومرحله ای را که شامل فاکتورهای نامطلوب بود را در نظر گرفتند و با استفاده از مدل SBM اندازه کارایی را محاسبه و آن را به کارایی تولیدی و کارایی کاهشی تجزیه کردند. لیو^۵ و همکارانش [۱۱] با در نظر گرفتن اصل دسترسی پذیری آزاد مدل های دومرحله ای را که در آن ها ورودی، محصول میانی یا خروجی می توانست نامطلوب باشد، بررسی کردند. "وو"^۶ و همکارانش [۱۲] مدلی جمعی را برای ساختار دومرحله ای با در نظر گرفتن محصول میانی نامطلوب به کار بردند و سپس یک تجزیه کارایی معرفی کردند. لوزانو [۱۳] نیز در ساختار مدل جامع شبکه با داده های نامطلوب با در نظر گرفتن اصل دسترسی پذیری ضعیف برای خروجی ها و استفاده از فاکتورهای انقباضی مجزا یک اندازه ناکارایی SBI معرفی کرد و با استفاده از آن اهدافی را برای ورودی ها، خروجی ها و محصولات میانی معرفی کرد.

با توجه به اینکه تا به حال استفاده از فاکتورهای انقباضی مجزا برای DMU ها در حضور داده های نامطلوب در ساختار جامع شبکه به تفصیل مورد بررسی قرار نگرفته است؛ لذا در این مقاله مجموعه امکان تولید-های ساخته شده به وسیله فاکتورهای انقباضی یکسان و فاکتورهای انقباضی مجزا را در ساختار شبکه ای تحلیل پوششی داده ها مورد بررسی قرار می گیرد. سپس با استفاده از مثال عددی عملکرد بهتر مدلی را که با فاکتور انقباضی مجزا تعریف شده در مقایسه با مدل مشابه آن که با فاکتور انقباضی یکسان تعریف شده است نشان

¹ Fukuyama

² Weber

³ Lozano

⁴ Bian

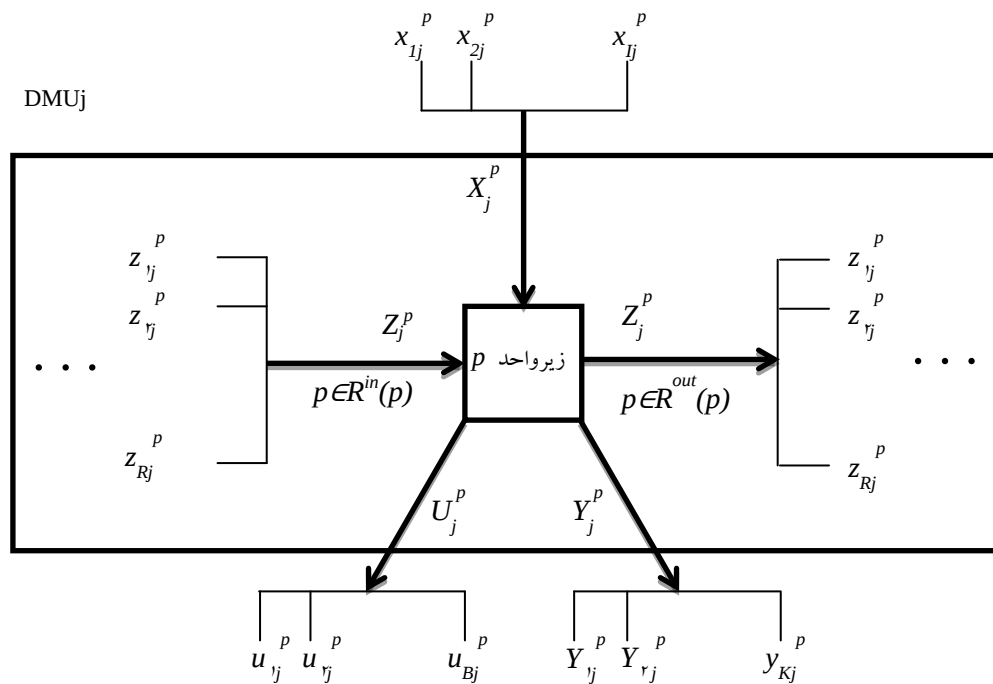
⁵ Liu

⁶ Wu

می‌دهد. این مقاله شامل بخش‌های زیر است: در بخش بعدی مجموعه امکان تولید را برای ساختار جامع شبکه در حضور خروجی‌های نامطلوب معرفی کرده و یک مثال ساده برای نشان دادن مزیت آن ارایه می‌شود. در بخش ۳ یک تابع فاصله جهت‌دار بر روی این مجموعه امکان تولید معرفی شده است و از آن برای محاسبه کارایی فرودگاه‌های اسپانیا استفاده گردیده است. سپس نتایج جدید به دست آمده با نتایج به دست آمده در مقاله لوزانو و همکارانش [۸] مورد مقایسه قرار گرفته است. در پایان نتیجه‌گیری در بخش ۴ آمده است.

۲ تعریف مجموعه امکان تولید برای ساختار جامع شبکه در حضور خروجی‌های نامطلوب

در این مقاله، حالت جامع شبکه را در نظر گرفته شده است که در آن J نشان‌دهنده تعداد DMU هایی است که هر کدام شامل P زیرواحد هستند. هر DMU، I ورودی x_i را مصرف می‌کند و K خروجی مطلوب y_k و B خروجی نامطلوب u_b را تولید می‌کند. R محصول میانی z_r نیز وجود دارد. به تبعیت از نمادگذاری لوزانو و همکارانش [۸] تعریف‌های زیر را داریم: $I(p)$ مجموعه ورودی‌های مصرف‌شده توسط زیرواحد p ، $O(p)$ مجموعه خروجی‌های مطلوب تولیدشده توسط زیرواحد p ، $U(p)$ مجموعه خروجی‌های نامطلوب تولیدشده توسط زیرواحد p ، $R^{in}(p)$ مجموعه محصولات میانی مصرف‌شده توسط زیرواحد p و $R^{out}(p)$ مجموعه محصولات میانی تولیدشده توسط زیرواحد p ، $P_I(i)$ مجموعه زیرواحدهایی که ورودی i را مصرف می‌کنند، $P_O(k)$ مجموعه زیرواحدهایی که خروجی مطلوب k را تولید می‌کند، $P_U(b)$ مجموعه زیرواحدهایی که خروجی نامطلوب b را تولید می‌کند، $P^{in}(r)$ مجموعه زیرواحدهایی که محصول میانی r را مصرف می‌کنند، $P^{out}(r)$ مجموعه زیرواحدهایی که محصول میانی r را تولید می‌کند، x_{ij}^p مقدار ورودی i ام که در زیرواحد p ام از DMU $_j$ مصرف می‌شود، $x_{ij} = \sum_{p \in P_I(i)} x_{ij}^p$ مقدار ورودی i ام به DMU $_j$ ، y_{kj}^p مقدار خروجی مطلوب k ام که در زیرواحد p ام از DMU $_j$ تولید می‌شود، $y_{kj} = \sum_{p \in P_O(k)} y_{kj}^p$ مقدار خروجی مطلوب k ام از DMU $_j$ ، u_{bj}^p مقدار خروجی نامطلوب b ام از DMU $_j$ ، $u_{bj} = \sum_{p \in P_U(b)} u_{bj}^p$ مقدار خروجی نامطلوب b ام از DMU $_j$ ، z_{rj}^p مقدار محصول میانی r ام که در زیرواحد p ام از DMU $_j$ تولید و یا مصرف می‌شود. همچنین فرض بر این است که تمام محصولات میانی تولیدشده توسط هر DMU توسط همان DMU مصرف شود. یعنی $\forall r \forall j: \sum_{p \in P^{out}(r)} z_{rj}^p = \sum_{p \in P^{in}(r)} z_{rj}^p$. با این نمادگذاری می‌توان DMU $_j$ را در ساختار جامع شبکه با شکل ۱ نمایش داد.



شکل ۱. ساختار جامع شبکه برای یک DMU

زمانی که DMU به صورت "جعبه سیاه" در نظر گرفته می‌شود مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(X, Y, U) \mid X \text{ بتواند } Y \text{ و } U \text{ را تولید کند}\}$$

در حضور خروجی‌های نامطلوب استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها در تعریف مجموعه امکان تولید رایج است. تعریف ریاضی دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها از دیدگاه شفر [۱] به صورت زیر است:

" $\forall (X, Y, U) \in T \ \&\ 0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow (X, \theta Y, \theta U) \in T$ اگر خروجی‌ها دسترسی‌پذیری ضعیف دارند اگر

فار و گراسکف [۲] فاکتور انقباضی θ را در تعریف مجموعه امکان تولید به صورت زیر به کار بردند:

$$T_F = \{(x, y, u) :$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} \leq x_i ; i = 1, \dots, I ,$$

$$\theta \sum_{j=1}^J \lambda_j y_{kj} \geq y_k ; k = 1, \dots, K ,$$

$$\theta \sum_{j=1}^J \lambda_j u_{bj} = u_b ; b = 1, \dots, B , \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 ,$$

$$\lambda_j \geq 0 ; j = 1, \dots, J ,$$

$$0 \leq \theta \leq 1 \}$$

درحالی که کاسمانن [۳] فاکتورهای انقباضی θ_j مجزا برای هر DMU را در تعریف مجموعه امکان تولید به صورت زیر به کار برد:

$$T_K = \{(x, y, u) :$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j x_{ij} \leq x_i ; i = 1, \dots, I ,$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j \lambda_j y_{kj} \geq y_k ; k = 1, \dots, K ,$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j \lambda_j u_{bj} = u_b ; b = 1, \dots, B , \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 ,$$

$$\lambda_j \geq 0 ; j = 1, \dots, J ,$$

$$0 \leq \theta_j \leq 1 ; j = 1, \dots, J \}$$

در ساختار جامع شبکه ، ابتدا برای هر زیرواحد p یک مجموعه امکان تولید مجزا تعریف می‌شود . سپس با استفاده از P مجموعه‌ی تعریف‌شده ، یک مجموعه امکان تولید برای کل ساختار تعریف می‌شود. لوزانو و همکارانش [۸] در تعریف مجموعه امکان تولید برای زیرواحد p ام از فاکتور انقباضی یکسان استفاده کردند؛ یعنی فرض کردند θ^p فاکتور انقباضی برای زیرواحد p ام تمام DMU هاست. پس برای زیرواحد p ام مجموعه امکان تولید زیر را تعریف کردند:

$$\hat{T}^p = \{(x^p, y^p, u^p, z^p) :$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p x_{ij}^p &\leq x_i^p ; \forall i \in I(p) , \\ \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p y_{kj}^p &\geq y_k^p ; \forall k \in O(p) , \\ \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p u_{bj}^p &= u_b^p ; \forall b \in U(p) , \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p &\leq z_r^p ; \forall r \in R^{in}(p) , \\ \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p &\geq z_r^p ; \forall r \in R^{out}(p) , \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j^p &= 1 , \\ \lambda_j^p &\geq 0 ; j = 1, \dots, J , \\ 0 &\leq \theta^p \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

و در نهایت ، مجموعه امکان تولید برای ساختار جامع شبکه را به صورت زیر تعریف کردند:

$$T_L = \{(x, y, u) :$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P_i(i)} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p x_{ij}^p &\leq x_i ; i = 1, \dots, I , \\ \sum_{p \in P_o(k)} \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p y_{kj}^p &\geq y_k ; k = 1, \dots, K , \\ \sum_{p \in P_u(b)} \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p u_{bj}^p &= u_b ; b = 1, \dots, B , \\ \sum_{p \in P^{out}(r)} \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p - \sum_{p \in P^{in}(r)} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p &\geq 0 ; r = 1, \dots, R , \\ \sum_{j=1}^J \lambda_j^p &= 1 ; p = 1, \dots, P , \\ \lambda_j^p &\geq 0 ; j = 1, \dots, J \ \& \ p = 1, \dots, P , \\ 0 &\leq \theta^p \leq 1 ; \forall p \in \bigcup_b P_U(b) , \\ \theta^p &= 1 ; \forall p \notin \bigcup_b P_U(b) \end{aligned} \quad (4)$$

اگر در (۳) به جای استفاده از فاکتورهای انقباضی یکسان θ^p برای زیرواحد p ام تمام DMU ها، از فاکتورهای انقباضی مجزای θ_j^p استفاده شود؛ یعنی فرض بر این باشد که θ_j^p فاکتور انقباضی برای زیرواحد p ام از DMU_j باشد، در این صورت مجموعه امکان تولید برای زیرواحد p ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^p = \{(x^p, y^p, u^p, z^p) :$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j^p x_{ij}^p \leq x_i^p ; \forall i \in I(p) ,$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p y_{kj}^p \geq y_k^p ; \forall k \in O(p) ,$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p u_{bj}^p = u_b^p ; \forall b \in U(p) ,$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p \leq z_r^p ; \forall r \in R^{in}(p) , \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p z_{rj}^p \geq z_r^p ; \forall r \in R^{out}(p) ,$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j^p = 1$$

$$\lambda_j^p \geq 0 ; j = 1, \dots, J$$

$$0 \leq \theta_j^p \leq 1 ; j = 1, \dots, J\}$$

و در نهایت مجموعه امکان تولید برای ساختار جامع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{KK} = \{(x, y, u) :$$

$$\sum_{p \in P_i(i)} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p x_{ij}^p \leq x_i ; i = 1, \dots, I ,$$

$$\sum_{p \in P_o(k)} \sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p y_{kj}^p \geq y_k ; k = 1, \dots, K ,$$

$$\sum_{p \in P_u(b)} \sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p u_{bj}^p = u_b ; b = 1, \dots, B ,$$

$$\sum_{p \in P^{out}(r)} \sum_{j=1}^J \theta_j^p \lambda_j^p z_{rj}^p - \sum_{p \in P^{in}(r)} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p z_{rj}^p \geq 0 ; r = 1, \dots, R , \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j^p = 1 ; p = 1, \dots, P ,$$

$$\lambda_j^p \geq 0 ; j = 1, \dots, J \ \& \ p = 1, \dots, P ,$$

$$0 \leq \theta_j^p \leq 1 ; \forall p \in \bigcup_b P_U(b) ; j = 1, \dots, J ,$$

$$\theta_j^p = 0 ; \forall p \notin \bigcup_b P_U(b) ; j = 1, \dots, J\}$$

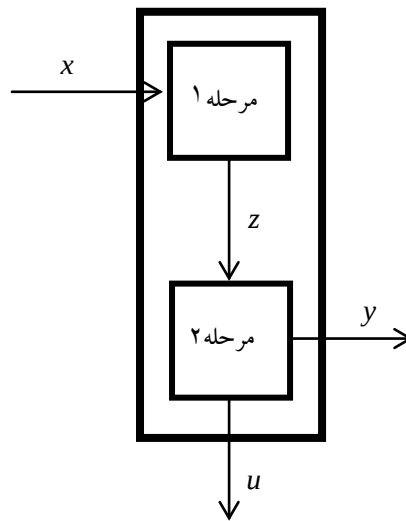
واضح است که با قرار دادن $\forall p: \theta_1^p = \theta_2^p = \dots = \theta_q^p$ مجموعه‌های T_L و T_{KK} برابر می‌شوند. پس مجموعه T_L حالت خاصی از T_{KK} است. در نتیجه T_L زیر مجموعه T_{KK} است. مجموعه‌های T_L و T_{KK} هر دو غیرخطی هستند؛ اما مشابه با آنچه کاسمانن [۳] انجام داد می‌توان T_{KK} را با قرار دادن $\lambda_j^p = \mu_j^p + \nu_j^p$ و $\mu_j^p = \theta_j^p \lambda_j^p$ به صورت زیر خطی کرد در حالی که T_L را نمی‌توان به صورت خطی نوشت.

$$\bar{T}_{KK} = \{(x, y, u):$$

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in P_i(i)} \sum_{j=1}^J (\mu_j^p + \nu_j^p) x_{ij}^p \leq x_i; i = 1, \dots, I, \\ & \sum_{p \in P_o(k)} \sum_{j=1}^J \mu_j^p y_{kj}^p \geq y_k; k = 1, \dots, K, \\ & \sum_{p \in P_u(b)} \sum_{j=1}^J \mu_j^p u_{bj}^p = u_b; b = 1, \dots, B, \\ & \sum_{p \in P^{out}(r)} \sum_{j=1}^J \mu_j^p z_{rj}^p - \sum_{p \in P^{in}(r)} \sum_{j=1}^J (\mu_j^p + \nu_j^p) z_{rj}^p \geq 0; r = 1, \dots, R, \\ & \sum_{j=1}^J (\mu_j^p + \nu_j^p) = 1; p = 1, \dots, P, \\ & \mu_j^p \geq 0, \nu_j^p \geq 0; j = 1, \dots, J \text{ \& } p = 1, \dots, P, \\ & \nu_j^p = 0; \forall p \notin \bigcup_b P_U(b); j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (V)$$

در ادامه با استفاده از یک مثال ساده که داده‌های آن ساختگی است، نشان داده شده است که انتخاب فاکتور انقباضی یکسان و یا مجزا چگونه می‌تواند در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری و تعیین کارایی و در حالت کلی تر ایجاد مجموعه امکان تولید تفاوت‌های چشمگیری را داشته باشد.

۲-۱ مثال توضیحی. سه واحد تصمیم‌گیری A ، B و C وجود دارند که هر کدام از آن‌ها یک ورودی را برای تولید یک خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب مصرف می‌کند. همچنین همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است هر واحد شامل دو مرحله است که در مرحله اول با مصرف ورودی x ، محصولی میانی z تولید می‌شود و در مرحله دوم محصول میانی به عنوان ورودی مصرف شده و یک خروجی مطلوب y و یک خروجی نامطلوب u تولید می‌شود. اطلاعات مربوط به واحدهای تصمیم‌گیری در جدول ۱ آمده است.



شکل ۲. ساختار یک واحد تصمیم‌گیری در مثال ۱

جدول ۱. داده‌های مثال ۱

	x	z	u	y
A	۴	۲	۲	۴
B	۱	۱	۴	۲
C	۴	۲	۱	۲

با توجه به شکل درونی DMU های این مثال و با توجه به اینکه T_L در حالت کلی غیرخطی است برای اینکه بتوان یک مدل خطی را با T_L ارائه داد به ناچار باید از یک مدل شعاعی ورودی محور استفاده کرد. برای توضیح بیش تر، اگر فرض شود که یک مدل خروجی محور روی T_L استفاده شده باشد آنگاه قید مربوط به خروجی‌های مطلوب به صورت $\sum_{p \in P_o(k)} \theta^p \sum_{j=1}^J \lambda_j^p y_{kj}^p \geq \beta y_k; k=1, \dots, K$ خواهد بود که به دلیل وجود متغیرهای θ^p و λ_j^p این قید غیرخطی است. درحالی که وقتی از مدل ورودی محور استفاده شده باشد در این قید متغیر β وجود نخواهد داشت و می‌توان با تغییر متغیر $\theta^p = \beta / \theta^p$ و جابه‌جا کردن آن به سمت راست نامعادله، این قید را به صورت خطی $\sum_{p \in P_o(k)} \sum_{j=1}^J \lambda_j^p y_{kj}^p \geq \bar{\theta}^p y_k; k=1, \dots, K$ تبدیل کرد؛ بنابراین برای اینکه بتوان به طور منصفانه T_L و $\bar{T}_{KK}$ را مقایسه کرد، برای هر دو از اندازه کارایی شعاعی ورودی محور استفاده می‌شود. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (۸) و (۹) به ترتیب متناظر با $\bar{T}_{KK}$ و T_L ارائه می‌شود.

Min β

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & \epsilon \mu_1^1 + \mu_2^1 + \epsilon \mu_3^1 \leq \beta x_o, \\
 & \epsilon \mu_1^2 + \epsilon \mu_2^2 + \epsilon \mu_3^2 \geq y_o, \\
 & \epsilon \mu_1^2 + \epsilon \mu_2^2 + \mu_3^2 = u_o, \\
 & \epsilon (\mu_1^1 - \mu_1^2 - \nu_1^2) + (\mu_2^1 - \mu_2^2 - \nu_2^2) + \epsilon (\mu_3^1 - \mu_3^2 - \nu_3^2) \geq 0, \\
 & \mu_1^1 + \mu_2^1 + \mu_3^1 = 1, \\
 & \mu_1^2 + \nu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 = 1, \\
 & \nu_j^2 \geq 0, \mu_j^p \geq 0 \quad p=1,2 \quad j=1,2,3.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

Min β

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & \epsilon \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \epsilon \lambda_3^1 \leq \beta x_o, \\
 & \epsilon \lambda_1^2 + \epsilon \lambda_2^2 + \epsilon \lambda_3^2 \geq \theta y_o, \\
 & \epsilon \lambda_1^2 + \epsilon \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \theta u_o, \\
 & \epsilon (\lambda_1^1 - \lambda_1^2) + (\lambda_2^1 - \lambda_2^2) + \epsilon (\lambda_3^1 - \lambda_3^2) \geq 0, \\
 & \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 = 1, \\
 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \\
 & \lambda_j^p \geq 0 \quad p=1,2 \quad j=1,2,3, \\
 & \theta \geq 1.
 \end{aligned} \tag{۹}$$

نتایج حاصل از حل مدل‌های (۸) و (۹) در جدول ۲ آمده‌است.

جدول ۲. نتایج حاصل از حل مدل‌های ۸ و ۹

مدل (۸)					مدل (۹)				
β^*	$\mu^* = (\mu_1^*, \mu_p^*, \mu_r^*)$	$\mu^{r*} = (\mu_1^r, \mu_p^r, \mu_r^r)$	$\nu^{r*} = (\nu_1^r, \nu_p^r, \nu_r^r)$		β^*	θ^*	$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_p^*, \lambda_r^*)$	$\lambda^{r*} = (\lambda_1^r, \lambda_p^r, \lambda_r^r)$	
۱	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)		۱	۱	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	A
۱	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)		۱	۱	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	B
۰/۶۲۵	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)		۱	۱	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	(۰/۵، ۰/۵، ۰)	C

مشاهده می‌شود که واحد C در ارزیابی به وسیله مدل (۸) ناکارآمد معرفی شده است در حالی که این واحد در ارزیابی به وسیله مدل (۹) کارآمد است. در زیر ثابت می‌شود که جواب صحیح مربوط به ارزیابی مدل (۸) است و در این مثال خاص مدل (۹) واحد C را به صورت نادرست کارآمد معرفی کرده است. مدل (۸)، تصویر واحد C روی مرز کارایی را به صورت زیر معین می‌کند:

$$C^* = (x_c^*, z_c^*, u_c^*, y_c^*) = \left(\sum_j \mu_j^* x_j, \sum_j \mu_j^* z_j, \sum_j \mu_j^{r*} u_j, \sum_j \mu_j^{r*} y_j \right) = (2/5, 1/5, 1, 2)$$

در ادامه نشان داده می‌شود که این نقطه متعلق به مجموعه امکان تولید است.

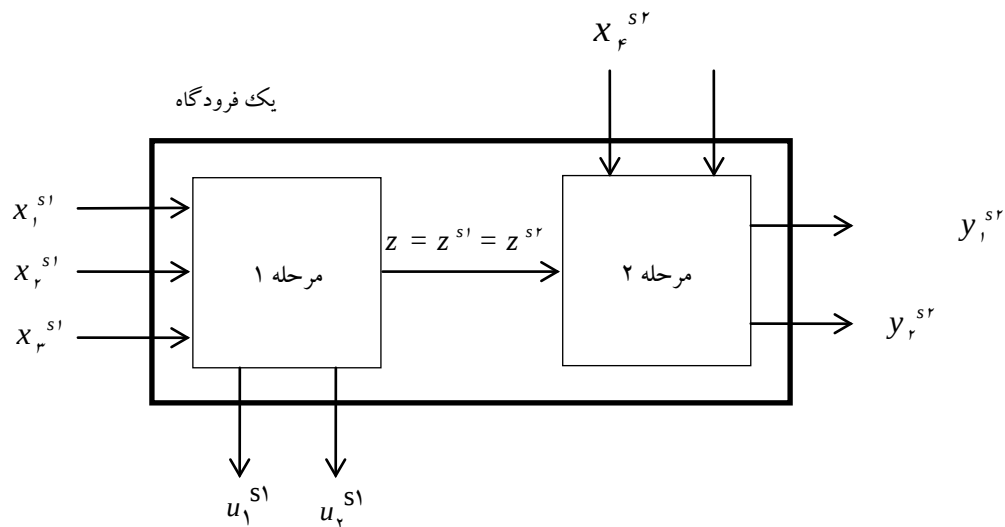
با در نظر گرفتن اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها، خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب مرحله دوم واحد B می‌توانند به صورت متناسب به سمت صفر کوچک شوند؛ بنابراین نقطه $B' = (1, 1, 0, 0)$ متعلق به مجموعه امکان تولید است. همچنین با در نظر گرفتن اصل تحدب و قراردادن $\lambda = 0/5$ ترکیب محدب واحد A و واحد مجازی که معادل با $C^* = (2/5, 1/5, 1, 2)$ است نیز متعلق به مجموعه امکان تولید است. در نتیجه تصویر واحد C متعلق به مجموعه امکان تولیدی است که با اصول موضوعه‌های تحدب و دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها ساخته شده است.

از سوی دیگر اگر برای واحد مجازی C^* مدل (۹) را بکار ببریم خواهیم داشت $\beta_C^* = 1/6$. این یعنی واحد مجازی C^* متعلق به T_L نیست. پس این امکان وجود دارد که T_L مجموعه‌ای محدب نباشد. به بیان دقیق‌تر، ممکن است مجموعه (۳) غیرمحدب باشد؛ بنابراین می‌توان گفت که با در نظر گرفتن اصول موضوعه‌های تحدب و دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها، مجموعه امکان تولید صحیح برای ساختار شبکه $\bar{T}_{KK}$ است.

۳ مثال کاربردی

در این بخش یک مثال از مقاله لوزانو و همکارانش [۸] آورده شده است که در آن لوزانو و همکارانش [۸] بر روی T_L یک تابع فاصله جهت‌دار را به کار بردند و عملکرد فرودگاه‌های کشور اسپانیا را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله یک تابع فاصله جهت‌دار بر روی $\bar{T}_{KK}$ تعریف شده و نتایج به دست آمده از این مدل با نتایج به دست آمده از مدل لوزانو و همکارانش [۸] مقایسه می‌شود.

در این مثال، سیستم عملکرد هر فرودگاه و عملیات داخلی آن مطابق شکل ۳ به صورت دومرحله‌ای در نظر گرفته شده است. برای هر فرودگاه پنج ورودی وجود دارد که سه ورودی x_1, x_2, x_3 در مرحله اول و دو ورودی x_4, x_5 در مرحله دوم مصرف می‌شود. دو خروجی نامطلوب u_1 و u_2 در مرحله اول و دو خروجی مطلوب y_1 و y_2 در مرحله دوم تولید می‌شود. همچنین یک محصول میانی z در مرحله اول تولید می‌شود که به طور کامل در مرحله دوم به عنوان ورودی مصرف می‌شود. توضیحات بیش تر و جدول داده‌های ۳۹ فرودگاه را می‌توان در مقاله لوزانو و همکارانش [۸] مشاهده کرد.



شکل ۳. سیستم عملکرد هر فرودگاه و عملیات داخلی آن

در این مثال لوزانو و همکارانش [۸] بردار جهت بهبود $g = (g_x, g_y, g_u) = (^\circ, y_r, u_b)$ را برای تابع فاصله جهت‌دار استفاده کردند. آن‌ها دلیل انتخاب این بردار را غیرقابل کنترل بودن ورودی‌ها معرفی کردند؛ اما دلیل دیگر انتخاب این بردار این است که اگر جهت بهبود برای ورودی‌ها عددی غیرصفر باشد در این صورت مدل ساخته شده توسط T_L خطی نخواهد شد.

پس برای مقایسه منصفانه از بردار جهت‌های یکسان برای مدل جدید و مدل لوزانو و همکارانش [۸] استفاده شده است؛ بنابراین متناظر با $\bar{T}_{KK}$ و T_L مدل‌های تابع فاصله جهت‌دار با بردار جهت بهبود $g = (g_x, g_y, g_u) = (^\circ, y_r, u_b)$ به ترتیب به صورت مدل‌های (۱۰) و (۱۱) خواهد بود.

Max β

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & \sum_{j=1}^{r_1} (\mu_j^{s_1} + \nu_j^{s_1}) x_{ij}^{s_1} \leq x_i^{s_1} \quad i = 1, 2, 3, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \mu_j^{s_2} x_{ij}^{s_2} \leq x_i^{s_2} \quad i = 4, 5, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \mu_j^{s_2} y_{kj}^{s_2} \geq (1 + \beta) y_k^{s_2} \quad k = 1, 2, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \mu_j^{s_1} u_{bj}^{s_1} = (1 - \beta) u_b^{s_1} \quad b = 1, 2, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} (\mu_j^{s_1} - \mu_j^{s_2}) z_j^{s_1} \geq 0, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} (\mu_j^{s_1} + \nu_j^{s_1}) = 1, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \mu_j^{s_2} = 1, \\
 & \mu_j^{s_1} \geq 0, \nu_j^{s_1} \geq 0, \mu_j^{s_2} \geq 0 \quad j = 1, \dots, r_1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Max β

$$\begin{aligned}
 s.t. \quad & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_1} x_{ij}^{s_1} \leq \theta^{s_1} x_i^{s_1} \quad i = 1, 2, 3, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_2} x_{ij}^{s_2} \leq x_i^{s_2} \quad i = 4, 5, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_2} y_{kj}^{s_2} \geq (1 + \beta) y_k^{s_2} \quad k = 1, 2, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_1} u_{bj}^{s_1} = (1 - \beta) u_b^{s_1} \quad b = 1, 2, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} (\lambda_j^{s_1} - \lambda_j^{s_2}) z_j^{s_1} \geq 0, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_1} = \theta^{s_1}, \\
 & \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j^{s_2} = 1, \\
 & \lambda_j^{s_1} \geq 0, \lambda_j^{s_2} \geq 0 \quad j = 1, \dots, r_1, \\
 & 0 \leq \theta^{s_1} \leq 1.
 \end{aligned} \tag{11}$$

اگر جواب بهینه مدل (۱۰) به صورت $(\beta^*, \mu_j^{s1*}, \nu_j^{s1*}, \mu_j^{s2*})$ و جواب بهینه مدل (۱۱) به صورت $(\beta^*, \theta^{s1*}, \lambda_j^{s1*}, \lambda_j^{s2*})$ باشد، در این صورت تصویر ورودی‌ها، خروجی‌های نامطلوب، خروجی‌های مطلوب و محصولات میانی بر روی مرز کارایی به ترتیب به صورت (۱۲) و (۱۳) خواهد بود.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{s1*} = \sum_{j=1}^{39} (\mu_j^{s1*} + \nu_j^{s1*}) x_{ij}^{s1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ x_i^{s2*} = \sum_{j=1}^{39} \mu_j^{s2*} x_{ij}^{s2}, \quad i = 4, 5, \\ u_b^{s1*} = \sum_{j=1}^{39} \mu_j^{s1*} u_{bj}^{s1} = (1 - \beta^*) u_{bo}^{s1}, \quad b = 1, 2, \\ y_k^{s2*} = \sum_{j=1}^{39} \mu_j^{s2*} y_{kj}^{s2}, \quad k = 1, 2, \\ z^* = \sum_{j=1}^{39} \mu_j^{s1*} z_j^{s1} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{s1*} = \sum_{j=1}^{39} \lambda_j^{s1*} x_{ij}^{s1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ x_i^{s2*} = \sum_{j=1}^{39} \lambda_j^{s2*} x_{ij}^{s2}, \quad i = 4, 5, \\ u_b^{s1*} = \sum_{j=1}^{39} \lambda_j^{s1*} u_{bj}^{s1} = (1 - \beta^*) u_{bo}^{s1}, \quad b = 1, 2, \\ y_k^{s2*} = \sum_{j=1}^{39} \lambda_j^{s2*} y_{kj}^{s2}, \quad k = 1, 2, \\ z^* = \sum_{j=1}^{39} \lambda_j^{s1*} z_j^{s1} \end{array} \right. \quad (13)$$

جدول ۳ مقادیر جواب‌های بهینه به دست آمده از مدل‌های (۱۰) و (۱۱) و تصاویر خروجی‌ها و محصولات میانی را که توسط (۱۲) و (۱۳) محاسبه شده است نشان می‌دهد.

جدول ۳. مقادیر جواب بهینه مدل‌های ۱۰ و ۱۱ با در نظر گرفتن جهت $(\circ, y_k, u_b)$ و تصاویر خروجی‌ها و محصولات میانی

فروگاه	مدل	β^*	Z^*	U_1^*	U_r^*	Y_1^*	Y_r^*	ΔZ^*	ΔU_1^*	ΔU_r^*	ΔY_1^*	ΔY_r^*
۱	(۱۰)	۰/۶۴۸	۱۸/۵	۴۲۹	۸۳۸۲/۱	۱۹۳۵/۸	۵۳۳/۳	۰/۷	-۷۸۹	-۱۵۴۰/۱/۳	۷۶۰/۹	۲۴۹/۸
	(۱۱)	۰/۶۴۸	۱۸/۵	۴۲۹	۸۳۸۲/۱	۱۹۳۵/۸	۵۳۳/۳	۰/۷	-۷۸۹	-۱۵۴۰/۱/۳	۷۶۰/۹	۲۴۹/۸
	(۱۰)	۰/۷۷۳	۲/۳	۱۳/۱	۳۱۲/۱	۳۴/۱	۱۵/۸	۰/۲	-۴۴/۹	-۱۶۰۴/۵	۱۴/۸	۶/۹
۲	(۱۱)	۰/۰۰۰	۲/۱	۵۸	۱۳۷۶/۵	۱۹/۳	۸/۹	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۰)	۰/۰۱۴	۸۵/۱	۷۵۳۷	۱۴۰۴۹۷/۸	۹۷۰۷/۳	۸۶۷۷/۹	۴	-۱۰۵	-۱۹۴۸	۱۳۱	۲۶۹۵/۶
	(۱۱)	۰/۰۱۴	۸۵/۱	۷۵۳۷	۱۴۰۴۹۷/۸	۹۷۰۷/۳	۸۶۷۷/۹	۴	-۱۰۵	-۱۹۴۸	۱۳۱	۲۶۹۵/۶
۴	(۱۰)	۰/۷۸۶	۱۶	۲۳۸	۴۳۱۰/۹	۱۸۲۹/۵	۱۵۳۴/۲	-۲/۳	-۸۷۶	-۱۵۸۳۸/۲	۸۰۵/۲	۱۵۱۲/۹
	(۱۱)	۰/۷۸۶	۱۶	۲۳۸	۴۳۱۰/۹	۱۸۲۹/۵	۱۵۳۴/۲	-۲/۳	-۸۷۶	-۱۵۸۳۸/۲	۸۰۵/۲	۱۵۱۲/۹
	(۱۰)	۰/۶۲۶	۲۳/۴	۴۹۰	۸۹۴۰	۲۴۸۷/۹	۳۸۱/۵	۵	-۸۲۰	-۱۴۹۵۳/۵	۹۵۷/۷	۲۴۲/۱
۵	(۱۱)	۰/۶۲۶	۲۳/۴	۴۹۰	۸۹۴۰	۲۴۸۷/۹	۳۸۱/۵	۵	-۸۲۰	-۱۴۹۵۳/۵	۹۵۷/۷	۲۴۲/۱
	(۱۰)	۰/۱۹۷	۳/۲	۱۱۰	۱۸۹۸/۷	۹۷	۱۱/۶	-۰/۸	-۲۷	-۴۶۶/۷	۱۶	۱۱/۶
	(۱۱)	۰/۱۹۷	۳/۲	۱۱۰	۱۸۹۸/۷	۹۷	۱۱/۶	-۰/۸	-۲۷	-۴۶۶/۷	۱۶	۱۱/۶
۷	(۱۰)	۰	۳۲۱/۷	۳۳۰۳۶	۶۴۵۹۲۴/۶	۳۰۲۷۲/۱	۱۰۳۹۹۶/۵	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۱)	۰	۳۲۱/۷	۳۳۰۳۶	۶۴۵۹۲۴/۶	۳۰۲۷۲/۱	۱۰۳۹۹۶/۵	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۰)	۰/۶۷۶	۵۹/۵	۱۴۹۰	۲۶۲۳۱/۵	۶۹۹۱/۹	۵۳۲۶/۲	-۲/۲	-۳۱۰۲	-۵۴۶۱۶/۷	۲۸۱۹	۲۱۴۷/۴
۸	(۱۱)	۰/۶۷۶	۵۹/۵	۱۴۹۰	۲۶۲۳۱/۵	۶۹۹۱/۹	۵۳۲۶/۲	-۲/۲	-۳۱۰۲	-۵۴۶۱۶/۷	۲۸۱۹	۲۱۴۷/۴
	(۱۰)	۰	۹/۶	۱۴	۲۵۴/۴	۲۲/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۱)	۰	۹/۶	۱۴	۲۵۴/۴	۲۲/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۰	(۱۰)	۰/۰۸۱	۴/۴	۲۵	۵۸۹/۷	۲۱۱/۲	۱۸۵/۶	-۰/۴	-۲	-۵۱/۹	۱۵/۸	۱۳/۹
	(۱۱)	۰/۰۸۱	۴/۴	۲۵	۵۸۹/۷	۲۱۱/۲	۱۸۵/۶	-۰/۴	-۲	-۵۱/۹	۱۵/۸	۱۳/۹
	(۱۰)	۰/۵۶۵	۵۹/۶	۱۷۰۶	۳۱۴۰۹/۹	۷۰۲۹/۳	۴۵۳۴/۳	۱۵/۱	-۲۲۱۴	-۴۰۷۶۹/۸	۲۵۳۷/۳	۱۸۱۱/۶
۱۱	(۱۱)	۰/۵۶۵	۵۹/۶	۱۷۰۶	۳۱۴۰۹/۹	۷۰۲۹/۳	۴۵۳۴/۳	۱۵/۱	-۲۲۱۴	-۴۰۷۶۹/۸	۲۵۳۷/۳	۱۸۱۱/۶
	(۱۰)	۰	۴۹/۹	۴۹۹۲	۱۰۰۳۰۵/۶	۵۵۱۱	۱۸۴/۱	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۱)	۰	۴۹/۹	۴۹۹۲	۱۰۰۳۰۵/۶	۵۵۱۱	۱۸۴/۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱۳	(۱۰)	۰/۱۷۱	۱۰۴/۷	۶۱۸۶	۱۱۳۰۴۳/۸	۱۱۹۵۹/۶	۳۹۴۶۱/۱	-۱۱/۶	-۱۲۷۷	-۲۳۳۳۶/۹	۱۷۴۷/۵	۵۷۶۵/۸
	(۱۱)	۰/۱۷۱	۱۰۴/۷	۶۱۸۶	۱۱۳۰۴۳/۸	۱۱۹۵۹/۶	۳۹۴۶۱/۱	-۱۱/۶	-۱۲۷۷	-۲۳۳۳۶/۹	۱۷۴۷/۵	۵۷۶۵/۸
	(۱۰)	۰/۵۲۹	۲۰/۱	۴۴۸	۸۴۲۴/۶	۲۱۷۳/۶	۱۱۲۰/۶	۰/۸	-۵۰۳	-۹۴۴۴/۲	۷۵۱/۶	۱۰۵۳/۷
۱۴	(۱۱)	۰/۵۲۹	۲۰/۱	۴۴۸	۸۴۲۴/۶	۲۱۷۳/۶	۱۱۲۰/۶	۰/۸	-۵۰۳	-۹۴۴۴/۲	۷۵۱/۶	۱۰۵۳/۷
	(۱۰)	۰/۲۲۳	۴۵/۲	۴۸۱۳	۱۱۸۷۸۳/۷	۵۶۸۲/۹	۴۸۰۳/۷	-۱۲	-۱۳۸۰	-۳۴۰۵۶/۴	۱۰۳۴/۵	۸۷۵/۳
	(۱۱)	۰/۲۲۳	۴۵/۲	۴۸۱۳	۱۱۸۷۸۳/۷	۵۶۸۲/۹	۴۸۰۳/۷	-۱۲	-۱۳۸۰	-۳۴۰۵۶/۴	۱۰۳۴/۵	۸۷۵/۳
۱۶	(۱۰)	۰/۶۷۳	۱۹/۹	۳۸۴	۶۳۱۰/۹	۲۱۸۱/۱	۱۳۸۷/۴	-۳۰/۷	-۷۹۰	-۱۲۹۸۱/۳	۸۷۷/۳	۱۲۹۷
	(۱۱)	۰/۶۷۳	۱۹/۹	۳۸۴	۶۳۱۰/۹	۲۱۸۱/۱	۱۳۸۷/۴	-۳۰/۷	-۷۹۰	-۱۲۹۸۱/۳	۸۷۷/۳	۱۲۹۷
	(۱۰)	۰/۲۶۴	۲/۵	۱۳	۳۰۹/۷	۵۲/۹	۹/۹	-۰/۹	-۴	-۱۱۰/۹	۱۱/۱	۱,۲
۱۷	(۱۱)	۰/۲۶۴	۲/۵	۱۳	۳۰۹/۷	۵۲/۹	۹/۹	-۰/۹	-۴	-۱۱۰/۹	۱۱/۱	۱,۲
	(۱۰)	۰/۳۲۹	۱۴/۹	۲۸۴	۵۵۶۳/۹	۱۵۲۹/۶	۱۶۹۶/۹	-۵/۲	-۱۳۹	-۲۷۲۲/۱	۳۷۸/۲	۴۱۹/۶
	(۱۱)	۰/۳۲۹	۱۴/۹	۲۸۴	۵۵۶۳/۹	۱۵۲۹/۶	۱۶۹۶/۹	-۵/۲	-۱۳۹	-۲۷۲۲/۱	۳۷۸/۲	۴۱۹/۶
۱۹	(۱۰)	۰/۴۰۹	۶۴/۳	۳۰۱۴	۶۰۰۴۷/۷	۷۶۶۵	۷۶۵۲/۹	۱۰/۹	-۲۰۹۰	-۴۱۶۳۷/۹	۲۲۲۶/۸	۲۲۲۳/۳
	(۱۱)	۰/۴۰۹	۶۴/۳	۳۰۱۴	۶۰۰۴۷/۷	۷۶۶۵	۷۶۵۲/۹	۱۰/۹	-۲۰۹۰	-۴۱۶۳۷/۹	۲۲۲۶/۸	۲۲۲۳/۳
	(۱۰)	۰/۷۹۹	۷/۳	۸۹	۱۴۴۶/۳	۲۲۱/۶	۲۸/۷	۱/۶	-۳۵۳	-۵۷۴۵/۲	۹۸/۴	۱۲/۸
۲۰	(۱۱)	۰/۷۹۹	۷/۳	۸۹	۱۴۴۶/۳	۲۲۱/۶	۲۸/۷	۱/۶	-۳۵۳	-۵۷۴۵/۲	۹۸/۴	۱۲/۸
	(۱۰)	۰	۴۶۹/۷	۵۲۵۲۶	۹۰۸۳۶۰	۵۰۸۴۶/۵	۳۲۹۱۸۶/۶	۰	۰	۰	۰	۰
	(۱۱)	۰	۴۶۹/۷	۵۲۵۲۶	۹۰۸۳۶۰	۵۰۸۴۶/۵	۳۲۹۱۸۶/۶	۰	۰	۰	۰	۰

۸۶۹۱/۵	۷۶۳/۶	-۱۶۵۴۷/۷	-۹۲۷	-۲/۳	۱۳۴۹۱/۸	۱۳۵۷۷/۱	۲۶۱۱۱۶/۱	۱۴۶۲۱	۱۱۷/۵	۰/۰۶۰	(۱۰)	۲۲
۸۶۹۱/۵	۷۶۳/۶	-۱۶۵۴۷/۷	-۹۲۷	-۲/۳	۱۳۴۹۱/۸	۱۳۵۷۷/۱	۲۶۱۱۱۶/۱	۱۴۶۲۱	۱۱۷/۵	۰/۰۶۰	(۱۱)	
۱۰۸/۷	۸۸/۵	-۸۳۸/۴	-۶۱	-۳/۱	۴۹۵	۴۰۳/۲	۲۱۴۱/۲	۱۵۷	۷/۹	۰/۲۸۱	(۱۰)	۲۳
۱۰۸/۷	۸۸/۵	-۸۳۸/۴	-۶۱	-۳/۱	۴۹۵	۴۰۳/۲	۲۱۴۱/۲	۱۵۷	۷/۹	۰/۲۸۱	(۱۱)	
۱۹۶۳/۴	۹۷۸/۷	-۱۲۵۷۳/۳	-۷۰۱	۵/۷	۱۹۶۶/۱	۲۸۵۵	۱۱۵۲۹/۹	۶۴۳	۲۵	۰/۵۲۲	(۱۰)	۲۴
۱۹۶۳/۴	۹۷۸/۷	-۱۲۵۷۳/۳	-۷۰۱	۵/۷	۱۹۶۶/۱	۲۸۵۵	۱۱۵۲۹/۹	۶۴۳	۲۵	۰/۵۲۲	(۱۱)	
.	.	.	.	.	۲۱۳۹۵/۸	۲۲۸۳۲/۹	۵۰۱۴۸۶	۲۶۰۳۸	۱۹۳/۴	.	(۱۰)	۲۵
.	.	.	.	.	۲۱۳۹۵/۸	۲۲۸۳۲/۹	۵۰۱۴۸۶	۲۶۰۳۸	۱۹۳/۴	.	(۱۱)	
۲۳/۸	۱۹۵/۵	-۵۲۶۱/۱	-۳۰۰	-۲	۷۶/۸	۶۳۰	۶۴۳۰/۷	۳۶۶	۱۱	۰/۴۵۰	(۱۰)	۲۶
۲۳/۸	۱۹۵/۵	-۵۲۶۱/۱	-۳۰۰	-۲	۷۶/۸	۶۳۰	۶۴۳۰/۷	۳۶۶	۱۱	۰/۴۵۰	(۱۱)	
۶۱/۷	۶۵۷/۹	-۹۳۸۹	-۴۸۵	-۵/۹	۱۸۱/۵	۱۹۳۵/۹	۸۸۵۱/۹	۴۵۸	۲۰/۸	۰/۵۱۵	(۱۰)	۲۷
۶۱/۷	۶۵۷/۹	-۹۳۸۹	-۴۸۵	-۵/۹	۱۸۱/۵	۱۹۳۵/۹	۸۸۵۱/۹	۴۵۸	۲۰/۸	۰/۵۱۵	(۱۱)	
۱۲/۸	۵۶/۵	-۶۲۳۱/۵	-۴۰۱/۶	-۹	۱۲/۸	۱۱۶/۶	۳۹۴/۶	۲۵/۴	۳/۵	۰/۹۴۰	(۱۰)	۲۸
۱۲/۷	۵۴/۷	-۶۰۲۹/۵	-۳۸۹	-۳۸۹	۱۲/۷	۱۱۴/۸	۵۹۶/۶	۳۸	۳/۵	۰/۹۱۰	(۱۱)	
۵۳/۶	۳۳۸/۹	-۹۳۹۹/۹	-۵۹۹	-۳/۹	۱۱۷/۴	۷۴۲/۱	۱۷۸۴/۱	۱۱۴	۸/۴	۰/۸۴۰	(۱۰)	۲۹
۵۳/۶	۳۳۸/۹	-۹۳۹۹/۹	-۵۹۹	-۳/۹	۱۱۷/۴	۷۴۲/۱	۱۷۸۴/۱	۱۱۴	۸/۴	۰/۸۴۰	(۱۱)	
۱۱۸/۴	۶۳۷/۵	-۱۳۲۷۷/۴	-۷۴۷	-۴/۳	۱۵۵/۹	۱۴۹۴/۱	۴۵۶۴/۷	۲۵۷	۱۴/۹	۰/۷۴۴	(۱۰)	۳۰
۱۱۸/۴	۶۳۷/۵	-۱۳۲۷۷/۴	-۷۴۷	-۴/۳	۱۵۵/۹	۱۴۹۴/۱	۴۵۶۴/۷	۲۵۷	۱۴/۹	۰/۷۴۴	(۱۱)	
۱۷۰۹/۹	۱۳۵۵/۵	-۲۴۲۶۲/۷	-۱۴۱۹	۷/۲	۴۱۲۸/۷	۳۲۷۲/۹	۱۰۰۵۹/۷	۵۸۸	۲۹/۲	۰/۷۰۷	(۱۰)	۳۱
۱۷۰۹/۹	۱۳۵۵/۵	-۲۴۲۶۲/۷	-۱۴۱۹	۷/۲	۴۱۲۸/۷	۳۲۷۲/۹	۱۰۰۵۹/۷	۵۸۸	۲۹/۲	۰/۷۰۷	(۱۱)	
.	.	.	.	.	۲۱۳۴۸/۹	۵۹۵	۱۹۵۴۷/۶	۱۰۹۵	۱۴/۶	.	(۱۰)	۳۲
.	.	.	.	.	۲۱۳۴۸/۹	۵۹۵	۱۹۵۴۷/۶	۱۰۹۵	۱۴/۶	.	(۱۱)	
۲۱۸۶/۴	۱۵۷۳/۷	-۱۸۳۰۳/۷	-۹۲۰	-۱۳/۶	۸۲۸۸/۷	۵۹۶۵/۹	۳۲۷۸۱/۱	۱۶۴۷	۵۱/۵	۰/۳۵۸	(۱۰)	۳۳
۲۱۸۶/۴	۱۵۷۳/۷	-۱۸۳۰۳/۷	-۹۲۰	-۱۳/۶	۸۲۸۸/۷	۵۹۶۵/۹	۳۲۷۸۱/۱	۱۶۴۷	۵۱/۵	۰/۳۵۸	(۱۱)	
۵۴۵۰/۹	۱۱۱۱/۲	-۸۵۶۰/۵	-۴۶۸	-۱۵/۶	۲۶۲۳۲/۶	۵۳۴۷/۸	۲۴۰۷۶/۶	۱۳۱۵	۵۲/۲	۰/۲۶۲	(۱۰)	۳۴
۵۴۵۰/۹	۱۱۱۱/۲	-۸۵۶۰/۵	-۴۶۸	-۱۵/۶	۲۶۲۳۲/۶	۵۳۴۷/۸	۲۴۰۷۶/۶	۱۳۱۵	۵۲/۲	۰/۲۶۲	(۱۱)	
۲۰۰۴/۴	۱۹۳۰/۷	-۲۵۹۲۸/۱	-۱۲۲۹	۲۰	۱۰۵۷۱/۵	۱۰۱۶۲/۷	۸۴۸۹۰/۹	۴۰۲۵	۸۰/۸	۰/۲۳۴	(۱۰)	۳۵
۲۰۰۴/۴	۱۹۳۰/۷	-۲۵۹۲۸/۱	-۱۲۲۹	۲۰	۱۰۵۷۱/۵	۱۰۱۶۲/۷	۸۴۸۹۰/۹	۴۰۲۵	۸۰/۸	۰/۲۳۴	(۱۱)	
۵۳۸۳/۹	۱۳۳۵	-۴۱۵۰۰/۹	-۲۰۱۹	-۲۴/۴	۱۸۷۰۹/۷	۸۱۱۴/۳	۶۱۲۱۸/۳	۲۹۷۹	۷۲/۴	۰/۴۰۴	(۱۰)	۳۶
۵۳۸۳/۹	۱۳۳۵	-۴۱۵۰۰/۹	-۲۰۱۹	-۲۴/۴	۱۸۷۰۹/۷	۸۱۱۴/۳	۶۱۲۱۸/۳	۲۹۷۹	۷۲/۴	۰/۴۰۴	(۱۱)	
۵۵۶	۴۱۳/۳	-۱۲۷۱۸/۵	-۷۲۶	-۳/۸	۵۹۰/۷	۸۹۳	۲۰۴۲/۱	۱۱۷	۹/۲	۰/۸۶۲	(۱۰)	۳۷
۵۵۶	۴۱۳/۳	-۱۲۷۱۸/۵	-۷۲۶	-۳/۸	۵۹۰/۷	۸۹۳	۲۰۴۲/۱	۱۱۷	۹/۲	۰/۸۶۲	(۱۱)	
۱۰۸۳/۸	۹۳۵/۲	-۱۸۷۱۷/۱	-۱۱۲۳	۳	۲۵۶۵/۷	۲۲۱۳/۹	۶۸۷۶/۵	۴۱۲	۲۰/۹	۰/۷۳۱	(۱۰)	۳۸
۱۰۸۳/۸	۹۳۵/۲	-۱۸۷۱۷/۱	-۱۱۲۳	۳	۲۵۶۵/۷	۲۲۱۳/۹	۶۸۷۶/۵	۴۱۲	۲۰/۹	۰/۷۳۱	(۱۱)	
.	.	.	.	.	۳۴۹۸۹/۷	۶۷/۸	۱۱۵۸۵/۸	۶۶۹	۱۲/۲	.	(۱۰)	۳۹
.	.	.	.	.	۳۴۹۸۹/۷	۶۷/۸	۱۱۵۸۵/۸	۶۶۹	۱۲/۲	.	(۱۱)	

همان طور که مشاهده می شود بجز فرودگاه های ۲ و ۲۸، در تمامی موارد دیگر نتایج به دست آمده مشابه است. در مورد فرودگاه ۲۸ تفاوت بسیار جزئی است در حالی که برای فرودگاه ۲ نتایج کاملاً متفاوت است. مدل (۱۰) این فرودگاه را کارا معرفی کرده است در حالی که در ارزیابی مدل (۱۱) این فرودگاه ناکاراست.

برای مقایسه بیش تر، جهت بهبود را در توابع فاصله جهت‌دار (۱۰) و (۱۱) به صورت $g = (o, o, u_b)$ تغییر می‌دهیم. در این حالت در جدول نتایج تعداد موارد متفاوت به پنج مورد افزایش پیدا می‌کند که در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴. مقادیر جواب بهینه مدل‌های ۱۰ و ۱۱ با در نظر گرفتن جهت $g = (o, o, u_b)$ و تصاویر خروجی‌ها و محصولات میانی

فرودگاه	مدل	β^*	Z^*	U_1^*	U_2^*	Y_1^*	Y_2^*	ΔZ^*	ΔU_1^*	ΔU_2^*	ΔY_1^*	ΔY_2^*
۲	(۱۰)	۰/۷۹۹	۲/۱	۱۱/۷	۲۷۶/۷	۱۹/۲	۸/۹	۰	-۴۶/۳	-۱۰۹۹/۸	۰	۰
	(۱۱)	۰/۰۰۰	۲/۱	۵۸	۱۳۷۶/۵	۱۹/۲	۸/۹	۰	۰	۰	۰	۰
۲۰	(۱۰)	۰/۸۶۶	۵/۷	۵۹/۲	۹۶۳/۷	۱۲۳/۲	۱۶/۰	۰	-۳۸۲/۸	-۶۲۲۷/۸	۰	۰
	(۱۱)	۰/۸۶۴	۵/۷	۵۹/۹	۹۷۵/۲	۱۲۳/۲	۱۶/۰	۰	-۳۸۲/۸	-۶۲۱۶/۳	۰	۰
۲۸	(۱۰)	۰/۹۷۰	۲/۷	۱۲/۸	۱۹۸/۸	۶۰/۱	۱۰/۵	-۹/۸	-۴۲۹/۲	-۶۴۲۷/۳	۰	۱۰/۵
	(۱۱)	۰/۹۳۰	۱/۲	۲۹/۹	۴۶۳/۸	۶۰/۱	۱۰/۵	-۱۱/۲	-۳۹۷/۱	-۶۱۶۲/۳	۰	۱۰/۵
۲۹	(۱۰)	۰/۹۲۸	۵/۲	۵۱/۳	۸۰۵/۲	۴۰۳/۲	۲۸۱/۰	-۷/۱	-۶۶۱/۷	-۱۰۳۷۸/۷	۰	۲۱۷/۲
	(۱۱)	۰/۹۲۲	۴/۵	۵۵/۶	۸۷۲/۳	۴۰۳/۲	۲۸۱/۰	-۷/۸	-۶۵۴/۴	-۱۰۳۱۱/۶	۰	۲۱۷/۲
۳۷	(۱۰)	۰/۹۵۴	۵/۵	۳۸/۸	۶۷۹/۰	۴۷۹/۷	۴۴۴/۰	-۷/۵	-۸۰۴/۲	-۱۴۰۸۱/۶	۰	۴۰۹/۳
	(۱۱)	۰/۹۵۳	۵/۵	۳۹/۶	۶۹۳/۷	۴۷۹/۷	۴۴۴/۰	-۷/۵	-۸۰۳/۴	-۱۴۰۶۶/۹	۰	۴۰۹/۳

همان طور که مشاهده می‌شود، در هر دو حالت، مدل (۱۱) فرودگاه ۲ را کارا معرفی می‌کند در حالی که مدل (۱۰) این واحد را ناکارا معرفی کرده است. همچنین در تمامی موارد مقدار بهینه به دست آمده از مدل (۱۰) بزرگ تر یا مساوی با مقدار بهینه مدل (۱۱) است و این یعنی مدل (۱۰) توانایی پیدا کردن منابع ناکارایی بیش تری را نسبت به مدل (۱۱) دارد.

۴ نتیجه

در حضور خروجی‌های نامطلوب استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای تمام خروجی‌ها روشی مفید است. در این رویکرد با توجه به نوع انقباض خروجی‌ها، شکل‌های مجموعه‌های امکان تولید به دست آمده متفاوت خواهد بود. در این مقاله به بررسی تاثیر استفاده از فاکتورهای انقباضی مجزا برای زیرواحدهای مختلف DMU ها در حالت ساختار شبکه‌ای DEA پرداخته شده است. مشاهده شد که استفاده از فاکتورهای انقباضی مجزا برای واحدهای تصمیم‌گیری می‌تواند دارای این برتری باشد که مدل‌های تعریف شده با آن به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی خواهد شد. همچنین با استفاده از دو مثال نشان داده شد که این مدل‌ها در مقایسه با مدل‌هایی که از فاکتورهای انقباضی یکسان استفاده می‌کنند دارای قدرت تشخیص ناکارایی بیش تری خواهند بود و نتیجه‌ی مهم تر این است که در صورت استفاده از فاکتور انقباضی یکسان، امکان غیرمحدب شدن مجموعه امکان تولید زیرواحدها وجود دارد.

منابع

- [1] Shephard, R.W., (1970). Theory of cost and production functions. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Fare, R., Grosskopf, S., (2003). Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment. American Journal of Agricultural Economics, 85, 1070-1074.
- [3] Kuosmanen, T., (2005). Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs. American Journal of Agricultural Economics, 87, 1077-1082.
- [4] Kuosmanen, T., Podinovski, V.V., (2009). Weak disposability in nonparametric production analysis: Reply to Färe and Grosskopf. American Journal of Agricultural Economics, 91, 539-545.
- [5] Kao, Ch., (2014). Network data envelopment analysis: A review. European Journal of Operational Research, 239, 1-16.
- [6] Kordrostami, S., Amirteimoori, A., (2005). Undesirable factors in multi-component performance measurement. Applied Mathematics and Computation, 171, 721-729.
- [7] Fukuyama, H., Weber, W. L., (2010). A slacks-based inefficiency measure for a two-stage system with bad outputs. Omega, 38, 398-409.
- [8] Lozano, S., Gutierrez, E., Moreno, P., (2013). Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. Applied Mathematical Modelling, 37, 1665-1676.
- [9] Maghbouli, M., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., (2014). Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach. Measurement, 48, 109-118.
- [10] Bian, Y., Liang, N., Xu, H., (2015). Efficiency evaluation of Chinese regional industrial systems with undesirable factors using a two stage slacks based measure approach. Journal of Cleaner Production, 87, 348-356.
- [11] Liu, W., Zhou, Z., Ma, Ch., Liu, D., Shen, W., (2015). Two stage DEA Models with undesirable input intermediate outputs. Omega, 56, 74-87.
- [12] Wu, J., Zhu, Q., Chu, J., Liang, L., (2015). Two Stage Network Structures with Undesirable Intermediate Outputs Reused: A DEA Based Approach. Computational Economics, 46, 455-477.
- [13] Lozano, S., (2015). Slacks based inefficiency approach for general networks with bad outputs: An application to the banking sector. Omega, 60, 73-84.