

تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها

شبنم رضویان*

۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱ مرداد ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۱۴ آذر ۱۳۹۴

چکیده

این مقاله موضوع تخصیص منابع متمرکز را از دیدگاه هزینه‌ای، درآمد و سود مورد بررسی قرار می‌دهد. در این راستا تصمیم‌گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود کلی خواهد بود. در واقع در این فرایند به جای مدنظر قرار دادن مستقل و انفرادی حداقل ورودی و یا حداکثر خروجی برای واحدها، تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود کلی و به صورت یکجا در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیری انجام می‌شود و بر این اساس تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده روی مرزهای کارایی هزینه، درآمد و سود تعیین می‌شود که اغلب متفاوت از تصویر روی مرز کارایی تکنیکی هستند؛ سپس مدل‌های تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین و در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه پیشنهاد می‌گردد. به طوری که نتایج مدل‌های پیشنهادی نشان می‌دهد، تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود کلی منجر به کاهش قابل ملاحظه هزینه‌ها و افزایش درآمد و سود کل سیستم می‌شود. در انتها موضوع از طریق مثال‌های تجربی و فرضی با هزینه‌ها و قیمت‌های معلوم، متغیر و نامعین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، هزینه‌ها و قیمت‌های متغیر و نامعین، تخصیص منابع متمرکز، کارایی هزینه، کارایی درآمد، کارایی سود.

۱ مقدمه

اندازه‌گیری کارایی به دلیل اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان همواره مورد توجه محققین قرار داشته است. فارل در سال ۱۹۵۷ [۱] با استفاده از روشی همانند اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی، به اندازه‌گیری کارایی برای واحدهای تولیدی اقدام کرد. چارنز، کوپر و رودز دیدگاه فارل [۱] را توسعه دادند و الگویی را ارائه کردند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این الگو، تحت

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Sh_razavyan@azad.ac.ir

عنوان تحلیل پوششی داده ها، نام گرفت و اولین بار، در رساله دکترای ادوارد رودز و به راهنمایی کوپر [۲] تحت عنوان ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا در سال ۱۹۷۶، در دانشگاه کارنگی مورد استفاده قرار گرفت. امروزه تحلیل پوششی داده ها در زمینه های مختلف [۳] و روی داده های مختلف (مانند داده های نادقیق) [۴] توسعه داده شده است.

اکثریت مطالعات صورت گرفته بر روی کارایی یک واحد تصمیم گیرنده (DMU) به صورت مستقل از سایر واحدها بوده است؛ اما سال ۱۹۹۳ را می توان به عنوان نقطه شروع مطالعات در زمینه محاسبه کارایی کل سیستم نام گذاری کرد. آغاز این مطالعات، تحقیقات گلوئی و همکارانش [۵] بود. آن ها موفق به ارایه مدلی برای محاسبه کارایی کل سیستم شدند. ولی مدل ارایه شده توسط آن ها، از نظر محاسبه کارایی ضعف هایی داشت. بعد از آن گلوئی و همکارانش یک مدل برنامه ریزی خطی در ماهیت خروجی ارایه دادند که در آن مدل یک کران بالا برای مصرف کل ورودی ها لحاظ شده بود. از ضعف های مدل ارایه شده، نشدنی بودن آن در برخی حالات خاص بود. در سال ۱۹۹۵، آتاناسوپولوس [۶] یک مدل برنامه ریزی چند هدفه خطی (MOLP) ارایه کرد. در مدل مذکور، برای مصرف نهایی هر یک از ورودی ها و یا هر یک از خروجی یک سری مساله برنامه ریزی خطی بایستی مورد بررسی قرار می گرفت که از نظر زمانی، توجهی نداشت. فارل و همکارانش [۱] در سال ۱۹۹۷ یک مدل برنامه ریزی خطی دو مرحله ای در ماهیت خروجی ارایه کردند که توانایی لازم برای محاسبه کارایی کل سیستم را نداشت.

در سال ۲۰۰۴، لوزانو [۷] برای محاسبه کارایی کل سیستم، یک مدل برنامه ریزی خطی شعاعی و غیرشعاعی تحت بازده به مقیاس متغیر ارایه دادند. تقریباً می توان گفت این مدل و تئوری تشکیل آن، مبنای کلیه مطالعات بعدی قرار گرفت. از مطالعات کاربردی در این زمینه نیز می توان به لوزانو و همکارانش [۸] در بهینه سازی صنعت بازیافت در اسپانیا اشاره کرد. از دیگر مقالات ارایه شده در این زمینه اسمیلد و همکارانش [۹] می باشد که در آن، استفاده از DMU های کارا برای محاسبه کارایی بود. در سال ۲۰۱۲، سیسیلیو و همکارانش [۱۰] مدلی که توسط لوزانو و همکارانش در سال ۲۰۰۴ ارایه شده بود تغییر دادند و نشان دادند که می توان آن مدل را ساده تر و با قیدها و متغیرهای کمتری نوشت. از دیگر مطالعات و پژوهش های صورت گرفته در این زمینه می توان به مقالات فنگ [۱۱]، دو و همکارانش [۱۲] و یو و همکارانش [۱۳] اشاره کرد.

با توجه به تجربیات بشری در دنیای امروز، اصل خصوصی سازی بسیار حایز اهمیت است و موجب رونق و گسترش اقتصاد جوامع می شود. در این راستا خصوصی سازی سازمان های دولتی، زمانی مفید واقع خواهد شد که کارایی لازم را داشته باشد؛ بنابراین، می توان از تخصیص منابع متمرکز برای محاسبه کارایی سازمان خصوصی سازی شده استفاده کرد و نقاط ضعف آن را که موجب کاهش کارایی کل سیستم شده است مشخص کرده، در جهت رفع آن نواقص قدم برداشت. عوامل بسیاری در بازدهی یا کارایی یک سیستم تاثیرگذار هستند و زمانی که یک سیستم نتیجه دلخواه را نمی تواند اخذ کند از کارایی لازم بهرمنند نیست، طبیعتاً نواقص موجود در آن باعث عدم نتیجه گیری لازم بوده است؛ لذا، می توان با محاسبه جزء به جزء کارایی سیستم (تجزیه کارایی به عامل های کوچک تر) نقص یا نواقص احتمالی سیستم را تشخیص داده، در جهت رفع آن ها کوشید. حال اگر

بتوان کارایی به صورت تخصیص منابع متمرکز را به طور مناسب و دقیق تجزیه و تحلیل نمود، می توان نقاط ضعف سیستم را تشخیص داده، آن ها را رفع کرد.

پژوهش های قبلی تخصیص منابع متمرکز را با در نظر گرفتن جنبه تکنیکی آن مورد بررسی قرار داده اند؛ ولی در این مقاله، موضوع از دیدگاه های هزینه ای، درآمد و سود مورد بررسی قرار می گیرد. در این حالت تصمیم گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کم ترین هزینه یا بیش ترین درآمد و یا بیش ترین سود کلی خواهد بود. در واقع در این فرایند به جای مدنظر قرار دادن مستقل و انفرادی حداقل ورودی برای هر یک از واحدها، تخصیص منابع متمرکز با کم ترین هزینه کلی یا بیش ترین درآمد و یا بیش ترین سود به صورت یکجا و شبکه ای برای تمامی واحدهای تصمیم گیری انجام می شود؛ سپس مدل های تخصیص منابع متمرکز با کم ترین هزینه در حضور قیمت های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه پیشنهاد می گردد. در پایان موضوع از طریق مثال های تجربی و فرضی در حالت های مختلف مورد بررسی قرار می گیرد.

۲ تخصیص منابع متمرکز با کم ترین هزینه در تحلیل پوششی داده ها

فرض کنید که n تعداد DMU ها و $r, j = 1, \dots, n$ و m تعداد ورودی ها $i = 1, \dots, m$ و p تعداد خروجی های هر DMU $(k = 1, \dots, p)$ و x_{ij} ورودی i ام واحد j ام و y_{kj} خروجی k ام واحد j ام باشد، هرگاه ورودی i ام در واحد j ام (x_{ij}) دارای هزینه c_i $(i = 1, \dots, m)$ باشد و بخواهیم تخصیص منابع با کم ترین هزینه کلی انجام شود در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی هزینه به جای مزر کارایی تکنیکی به دنبال تخصیص منابع با کم ترین متوسط هزینه کلی خواهیم بود. در واقع در این حالت با متغیر در نظر گرفتن ورودی i ام در واحد j ام به صورت $\hat{x}_{ij}$ و از آنجا که یک واحد ورودی i ام در تمامی واحدهای تصمیم گیری دارای هزینه یکسان c_i $(i = 1, \dots, m)$ است، مدل مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij} \\ \text{s.t. } & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\ & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $x_i = \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}$ $(i = 1, \dots, m)$ می توان مدل (۱) را به مدل زیر با تعداد متغیرهای کمتر، تغییر داد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i=1}^m c_i x_i \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۲}$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۲) تصویر واحد تصمیم گیرنده r ام به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\left(x_{ir}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, y_{kr}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* y_{kj}, \quad k = 1, \dots, p \right).$$

بر اساس این نقطه تصویر سیاست تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه انجام می‌شود. ولی در اغلب مواقع در یک سیستم متمرکز یک واحد ورودی یکسانی در واحدهای تصمیم‌گیری مختلف دارای هزینه متفاوتی است که در بخش بعدی مدل تخصیص منابع متمرکز مربوطه، ارایه می‌گردد.

۲-۱ تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور هزینه‌های متفاوت

تونی [۱۴] در سال ۲۰۰۲ با فرض اینکه ورودی i ام در واحد j ام $(j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m)$ دارای هزینه c_{ij} باشد، حالت کلی از مجموعه امکان تولید را مطرح نمود. در واقع ایشان این فرض که "یک واحد ورودی i ام در تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای هزینه یکسان c_i است" را کنار گذاشتند و بدین ترتیب حالت کلی مجموعه امکان تولید را تحت عنوان $T_{new}(\bar{x}, y)$ به صورت زیر مطرح نمودند:

$$T_{new}(\bar{x}, y) = \left\{ (\bar{x}, y) \mid \bar{x} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{x}_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

که در آن $\bar{x}_j = (\bar{x}_{1j}, \dots, \bar{x}_{mj})$ و $\bar{x}_{ij} = c_{ij} x_{ij}$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). با در نظر گرفتن $T_{new}(\bar{x}, y)$ مدل کلی تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور هزینه‌های متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} \bar{x}_{ij} &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij}, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1, & r = 1, \dots, n, \\ \lambda_{jr} &\geq 0, & j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن متغیر $\tilde{x}_{ij}$ سطح ورودی i ام در واحد تصمیم گیرنده j ام است که باید مقدار بهینه آن تعیین شود. بدین ترتیب با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$) می توان مدل (۳) را به مدل زیر تبدیل نمود:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} \bar{x}_{ij} &\leq \tilde{x}_i, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1, & r = 1, \dots, n, \\ \lambda_{jr} &\geq 0, & j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۴) تصویر واحد تصمیم گیرنده r ام روی مرز کارایی هزینه به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\left(x_{ir}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, y_{kr}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* y_{kj}, \quad k = 1, \dots, p \right).$$

در واقع، هزینه متناظر تولید خروجی های $(k = 1, \dots, p)$ به حداقل مقدار خود در نقاط تصویر می رسد. براساس ویژگی های کارایی هزینه تخصیص منابع متمرکز از این طریق با دستکاری نمودن ترکیب ورودی های مصرفی به دنبال ترکیب مناسبی از ورودی ها در مصرف برای کاهش هزینه تخصیص منابع متمرکز می باشد.

۳ تخصیص منابع متمرکز با بیشترین درآمد در تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید یک واحد خروجی k ام در واحد تصمیم‌گیری r ام دارای درآمد d_k ($k = 1, \dots, p$) باشد و بخواهیم تخصیص منابع به همراه بیشترین درآمد کلی انجام شود، در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی درآمد به دنبال تخصیص منابع با بیشترین متوسط درآمد کلی خواهیم بود. در این حالت با متغیر در نظر گرفتن خروجی k ام در واحد r ام به صورت $\hat{y}_{kj}$ و از آنجا که یک واحد خروجی k ام در تمامی واحدهای تصمیم‌گیری دارای درآمد یکسان d_k است، مدل مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{k=1}^p d_k \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n \hat{y}_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\ & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y_k = \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj}$ ($k = 1, \dots, p$) می‌توان مدل (۵) را به مدل زیر تغییر داد:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{k=1}^p d_k y_k \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_k, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\ & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

بدین ترتیب با استفاده از جواب بهینه مدل (۶) تصویر واحد تصمیم‌گیری r ام براساس سیاست تخصیص منابع با حداکثر درآمد کل به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\left(x_{ir}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, y_{kr}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* y_{kj}, \quad k = 1, \dots, p \right).$$

در واقع واحد تصمیم گیرنده r ام با الگو قرار دادن واحد تصمیم گیری $(x_{ir}^*, i = 1, \dots, m, y_{kr}^*, k = 1, \dots, p)$ در مصرف و تولید به هدف تخصیص منابع با حداکثر درآمد کل خواهد رسید.

۳-۱ تخصیص منابع متمرکز با بیشترین درآمد در حضور قیمت‌های متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها

براساس مقاله تونی [۱۴] با فرض این که یک واحد خروجی k ام در واحد j ام $(j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p)$ دارای درآمد d_{kj} است حالت کلی از مجموعه امکان تولید مطرح گردید. براساس فرض تونی (۲۰۰۲) مجموعه امکان تولید مورد نظر به صورت زیر است:

$$T_{new}(x, \bar{y}) = \left\{ (x, \bar{y}) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \bar{y} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{y}_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

که در آن فرض شده است که $\bar{y}_j = (\bar{y}_{1j}, \dots, \bar{y}_{mj})$ و $\bar{y}_{kj} = d_{kj} y_{kj} (k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n)$ با استفاده از $T_{new}(x, \bar{y})$ مدل تخصیص منابع متمرکز با در نظر گرفتن بیشترین درآمد متوسط در حضور قیمت‌های متفاوت خروجی‌های یکسان در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \tilde{y}_{kj} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n \tilde{y}_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\ & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن متغیر $\tilde{y}_{kj}$ سطح خروجی k ام در واحد تصمیم گیرنده j ام است که مقدار بهینه آن از طریق مدل (۷) تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\tilde{y}_k = \sum_{j=1}^n \tilde{y}_{kj} (k = 1, \dots, p)$ مدل (۷) به مدل زیر تبدیل می‌شود که در آن تعداد متغیرها کاهش یافته است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{k=1}^p \tilde{y}_k \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \tilde{y}_k, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۸}$$

از طریق جواب بهینه مدل (۸) راه کار تخصیص منابع متمرکز با در نظر گرفتن بیشترین درآمد به دست می‌آید و بر اساس جواب بهینه این مدل، تصویر واحد تصمیم‌گیری r ام روی مرز کارایی درآمد به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\left(x_{ir}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, y_{kr}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{rj}^* y_{kj}, \quad k = 1, \dots, p \right).$$

۴ کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیشترین سود کلی

فرض کنید خروجی k ام در واحد تصمیم‌گیری زام دارای درآمد d_k ($k = 1, \dots, p$) به ازای یک واحد از آن خروجی باشد و هم‌چنین یک واحد ورودی i ام در واحد تصمیم‌گیری زام دارای هزینه c_i ($i = 1, \dots, m$) باشد و بخواهیم تخصیص منابع با بیشترین سود کلی در سرتاسر واحد تصمیم‌گیری انجام شود، در این صورت با در نظر گرفتن مرز کارایی سود به دنبال تخصیص منابع با بیشترین سود متوسط کلی خواهیم بود. بدین منظور کارایی متمرکز سود برای تخصیص منابع متمرکز با هدف بیشترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{k=1}^p d_k \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} / \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن متغیرهای $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{kj}$ به ترتیب مقادیر ورودی i ام و خروجی k ام در واحد تصمیم گیری j ام است که باید مقادیر بهینه آنها تعیین شود. با استفاده از تغییر متغیر چارنز کوپر یعنی $t = 1 / \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}$ مدل کسری (۹) به مدل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{k=1}^p d_k \sum_{j=1}^n t \hat{y}_{kj} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n t \hat{x}_{ij} = 1, \\ & \sum_{j=1}^n t \hat{x}_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n t x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n t \hat{y}_{kj} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n t y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} = t, \quad r = 1, \dots, n. \\ & t \lambda_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\lambda'_{jr} = t \lambda_{jr}$ ، $\hat{x}'_{ij} = t \hat{x}_{ij}$ و $y'_{kj} = t \hat{y}_{kj}$ مدل (۱۰) به مدل برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{k=1}^p d_k \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij} = 1, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n t x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n t y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} = t, \quad r = 1, \dots, n, \\ & \lambda'_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

از طریق تغییر متغیر $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij}$, ($i = 1, \dots, m$) و $\tilde{y}_k = \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj}$, ($k = 1, \dots, p$) به مدل زیر با تعداد متغیرهای کم تر تبدیل می شود:

رضویان، تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{k=1}^p d_k \tilde{y}_k \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m c_i \tilde{x}_i = 1, \\
 & \tilde{x}_i = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^n t x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \tilde{y}_k = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n t y_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} = t, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda'_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

از طریق مدل (۱۲) کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیشترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود.

۴-۱ تخصیص منابع متمرکز با بیشترین سود در حضور هزینه‌ها و درآمدهای متفاوت در تحلیل پوششی داده‌ها

هرگاه ورودی i ام در واحد z ام ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$) دارای هزینه واحد c_{ij} و خروجی k ام در واحد z ام ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$) دارای درآمد واحد d_{kj} باشد، حالت کلی از مجموعه امکان تولید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_{\text{new}}(\bar{x}, \bar{y}) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{x}_j, \bar{y} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{y}_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

_____ که در آن $\bar{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ ، $\bar{x}_{ij} = c_{ij} x_{ij}$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$)، $\bar{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{pj})$ و $\bar{y}_{kj} = d_{kj} y_{kj}$ ($k = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n$) با در نظر گرفتن مدل کلی تر تخصیص منابع متمرکز با بیشترین سود در حضور درآمدها و هزینه‌های متفاوت در واحدهای تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{Max} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} / \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij} &= \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij}, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \hat{y}_{kj} &= \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} \bar{y}_{kj} \geq \sum_{r=1}^n \bar{y}_{kr}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1, & r = 1, \dots, n, \\ \lambda_{jr} &\geq 0, & j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

با استفاده از تغییر متغیر چارنز کوپر، یعنی $t = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}}$ مدل برنامه‌ریزی خطی کسری (۱۳) به مدل غیرخطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Max} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n t \hat{y}_{kj}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t \hat{x}_{ij} &= 1, \\ \sum_{j=1}^n t \hat{x}_{ij} &= \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij}, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n t \hat{y}_{kj} &= \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} \bar{y}_{kj} \geq \sum_{r=1}^n \bar{y}_{kr}, & k = 1, \dots, p, \\ \sum_{j=1}^n t \lambda_{jr} &= t, & r = 1, \dots, n, \\ t \lambda_{jr} &\geq 0, & j, r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\hat{x}'_{ij} = t \hat{x}_{ij}$ و $\lambda'_{jr} = t \lambda_{jr}$ و $y'_{kj} = t \hat{y}_{kj}$ مدل (۱۴) به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

رضویان، تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود در حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij} = 1, \\
 & \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{j=1}^n t \bar{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} \bar{y}_{kj} \geq \sum_{r=1}^n t \bar{y}_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} = t, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda'_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{15}$$

از طریق تغییر متغیر $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \hat{x}'_{ij}, (i = 1, \dots, m)$ و $\tilde{y}_k = \sum_{j=1}^n \hat{y}'_{kj}, (k = 1, \dots, p)$ مدل (۱۵) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{k=1}^p \tilde{y}_k \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i = 1, \\
 & \tilde{x}_i = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{j=1}^n t \bar{x}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \tilde{y}_k = \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} \bar{y}_{kj} \geq \sum_{r=1}^n t \bar{y}_{kr}, \quad k = 1, \dots, p, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda'_{jr} = t, \quad r = 1, \dots, n, \\
 & \lambda'_{jr} \geq 0, \quad j, r = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{16}$$

با استفاده از جواب بهینه مدل (۱۶) داریم:

$$\hat{y}_{kj}^* = y_{kj}'^* / t^* \text{ و } \lambda_{jr}^* = \lambda_{jr}'^* / t^*, \hat{y}_{kj} = \hat{y}_{kj}'^* / t^* / t^*, \hat{x}_{ij} = \hat{x}_{ij}'^* / t^*$$

و بدین ترتیب جواب بهینه مدل (۱۳) به دست می‌آید. از طریق مدل فوق کارایی متمرکز سود و تخصیص منابع متمرکز با بیشترین سود کلی در تحلیل پوششی داده‌ها انجام می‌شود.

۵ تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین

کارایی هزینه در حضور قیمت‌های مشخص به دنبال بررسی امکان تولید خروجی‌های جاری واحد تصمیم‌گیرنده با کمترین هزینه است. در حالی که در بعضی از کاربردها تحلیل پوششی داده‌ها به دلایلی مانند:

[۱] شرایط ناپایدار اقتصادی و متغیر بودن هزینه‌ها و قیمت‌ها

[۲] ناکافی بودن اطلاعات در رابطه با هزینه ورودی‌ها

با هزینه‌ها و قیمت‌های نامعین مواجه هستیم. در این بخش تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه در تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض کنید v_i (v_h) وزن برای ورودی $i(h)$ از واحد تصمیم‌گیری o ام و $c_i^{\min}$ ($c_h^{\min}$) کمترین هزینه تخمین زده شده برای ورودی $i(h)$ و $c_i^{\max}$ ($c_h^{\max}$) بیشترین هزینه تخمین زده شده برای ورودی $i(h)$ از واحد تصمیم‌گیری o ام باشد. بر این اساس با تحمیل $2 \times C_p^m$ محدودیت روی مدل فرم مضربی تخصیص منابع متمرکز در حالت خوشبینانه مدل زیر پیشنهاد می‌گردد.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r \sum_{k=1}^n y_{rk} + \sum_{j=1}^n \xi_j \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^p u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \xi_k \leq 0, \quad j, k = 1, \dots, n, \\ & \quad \frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \leq \frac{v_i}{v_h} \leq \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, \quad 1 \leq i < h \leq m, \\ & \quad \sum_{i=1}^m v_i \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \\ & \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{17}$$

برای به دست آوردن کمترین کارایی هزینه، هرگاه تابع هدف را از ماکزیمم به مینیمم تغییر دهیم مقدار بهینه و لذا کارایی هزینه صفر خواهد شد. مدل کمترین کارایی هزینه را در حضور قیمت‌های نامعین به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\text{Min} \quad \sum_{r=1}^s u_r \sum_{k=1}^n y_{rk} + \sum_{j=1}^n \xi_j$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^p u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \xi_j \leq 0, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^p u_r \hat{y}_r + \sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_i = 1,$$

(۱۸)

$$\frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \leq \frac{v_i}{v_h} \leq \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, \quad 1 \leq i < h \leq m,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, p.$$

که در آن $(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)$ تصویر نقطه $(\sum_{j=1}^n x_{ij}, \forall i, \sum_{j=1}^n y_{rj}, \forall r)$ توسط مدل تخصیص منابع متمرکز لوزانو و ویلا [۹] روی مرز کارایی است. از آنجا که مدل تخصیص منابع متمرکز لوزانو و ویلا [۹] در ارزیابی خود کارایی نقطه $(\sum_{j=1}^n x_{ij}, \forall i, \sum_{j=1}^n y_{rj}, \forall r)$ را در نظر می‌گیرد. بدین منظور برای جلوگیری از صفر شدن کارایی در حالت بدینانه، وزن‌های متناظر نقطه $(\hat{x}, \hat{y})$ را در نظر گرفته‌ایم. بدین ترتیب تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه انجام می‌شود.

برای تعیین مختصات نقاط تصویر واحدهای تصمیم‌گیری اطلاعات فرم پوششی مدل‌های (۱۷) و (۱۸) مورد نیاز است. لذا دوگان آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن متغیرهای دوگان $\lambda_{n+t}, \lambda_{n+h}, (t = 1, \dots, \binom{m}{2}, t < h)$ متناظر قیود $\frac{c_i^{\min}}{c_h^{\max}} \leq \frac{v_i}{v_h} \leq \frac{c_i^{\max}}{c_h^{\min}}, 1 \leq i < h \leq m$ دوگان مدل (۱۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

Min θ

s.t.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} + \sum_{\substack{t,h=1 \\ t < h}}^{\binom{m}{2}} (\lambda_{n+t} - \lambda_{n+h} - \frac{c_t^{\min}}{c_h^{\max}} \lambda_{n+t} + \frac{c_t^{\max}}{c_h^{\min}} \lambda_{n+h})$$

$$\leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, \dots, m, \quad (19)$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, r = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_{n+t}, \lambda_{n+h}, \lambda_{jr} \geq 0, t, h = 1, \dots, \binom{m}{2}, t < h, j, r = 1, \dots, n.$$

که در آن $\binom{m}{2}$ همان تعداد راه‌های انتخاب بدون ترتیب دو شی از m شی است. بدین ترتیب با در نظر گرفتن مفروضات فوق هر گاه ϕ متغیر دوگان متناظر قید $\sum_{r=1}^p u_r \hat{y}_r + \sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_i = 1$ باشد، دوگان مدل (۱۸) به صورت زیر به دست می‌آید:

Min $\theta + \phi$

s.t.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} + \phi \hat{x}_i + \sum_{\substack{t,h=1 \\ t < h}}^{\binom{m}{2}} (\lambda_{n+t} - \lambda_{n+h} - \frac{c_t^{\min}}{c_h^{\max}} \lambda_{n+t} + \frac{c_t^{\max}}{c_h^{\min}} \lambda_{n+h})$$

$$\leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij}, i = 1, \dots, m, \quad (20)$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} + \phi \hat{y}_k \geq \sum_{r=1}^n y_{kr}, k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1, r = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_{n+t}, \lambda_{n+h}, \lambda_{jr} \geq 0, t, h = 1, \dots, \binom{m}{2}, t < h, j, r = 1, \dots, n.$$

در بخش بعدی تعدادی از مدل‌های پیشنهادی را از طریق مثال‌های تجربی و فرضی مورد بررسی قرار داده، نتایج عددی را بر اساس آن‌ها به دست می‌آوریم.

۶ مثال عددی

جدول ۱ داده های دوازده بیمارستان را با دو ورودی x_1 و x_2 (به ترتیب تعداد پزشکان و تعداد پرستاران هر بیمارستان) با قیمت های متغیر و دو خروجی y_1 و y_2 (به ترتیب تعداد بیماران مداوا شده ی سرپایی و تعداد بیماران مداوا شده ی بستری شده) نشان می دهد که در آن c_1 و c_2 به ترتیب حقوق یک نفر پزشک و یک نفر پرستار در بیمارستان مربوطه است. فرض کنید این بیمارستان ها دارای ساختار متمرکز هستند.

جدول ۱. ورودی ها، خروجی ها و هزینه های متغیر متناظر هر یک از ورودی ها

DMU	x_1	x_2	$\bar{x}_1 = c_1 x_1$	$\bar{x}_2 = c_2 x_2$	c_1	c_2	y_1	y_2
۱	۲۰	۱۵۱	۱۰۰۰۰	۱۵۱۰۰	۱۰۰	۹۰	۱۰۰	۵۰۰
۲	۱۹	۱۳۱	۶۶۵۰	۱۰۴۸۰	۱۵۰	۵۰	۸۰	۳۵۰
۳	۲۵	۱۶۰	۱۱۲۵۰	۱۴۴۰۰	۱۶۰	۵۵	۹۰	۴۵۰
۴	۲۷	۱۶۸	۱۶۲۰۰	۲۰۱۶۰	۱۸۰	۷۲	۱۲۰	۶۰۰
۵	۲۲	۱۵۸	۶۶۰۰	۱۱۰۶۰	۹۴	۶۶	۷۰	۳۰۰
۶	۵۵	۲۵۵	۲۴۷۵۰	۲۰۴۰۰	۲۳۰	۹۰	۸۰	۴۵۰
۷	۳۳	۲۳۵	۱۶۵۰۰	۲۳۵۰۰	۲۲۰	۸۸	۱۰۰	۵۰۰
۸	۳۱	۲۰۶	۱۳۹۵۰	۱۷۵۱۰	۱۵۲	۸۰	۸۵	۴۵۰
۹	۳۰	۲۴۴	۱۱۴۰۰	۱۸۵۴۴	۱۹۰	۱۰۰	۷۶	۳۸۰
۱۰	۵۰	۲۶۸	۲۰۵۰۰	۲۰۱۰۰	۲۵۰	۱۰۰	۷۵	۴۱۰
۱۱	۵۳	۳۰۶	۲۳۳۲۰	۲۴۴۸۰	۲۶۰	۱۴۷	۸۰	۴۴۰
۱۲	۳۸	۲۸۴	۱۵۲۰۰	۱۹۸۸۰	۲۵۰	۱۲۰	۷۰	۴۰۰

جدول ۲ نتایج اجرای مدل (۴) برای تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت های نامعین را نشان می دهد. به طوری که دیده می شود ورودی ها در تخصیص بهینه با در نظر گرفتن هزینه های مربوطه تخصیص داده شده اند. به عنوان نمونه، در این تخصیص DMU_1 سطح ورودی های خود را از $(x_1, x_2) = (۲۰, ۱۵۱)$ به $(x_1^*, x_2^*) = (۱۳, ۴۶)$ تغییر می دهد.

فرض کنید در رابطه با ورودی ها اطلاعات قیمتی به صورت نامعین در دسترس باشد، هر گاه در رابطه با ورودی های اول و دوم اطلاعات قیمتی به ترتیب به صورت $[c_1^{min}, c_1^{max}] = [۹۴, ۲۶۰]$ و $[c_2^{min}, c_2^{max}] = [۵۰, ۱۴۷]$ معلوم باشد، متناظر این اطلاعات برای این مثال قیود $\frac{c_i^{min}}{c_h^{max}} \leq \frac{v_i}{v_h} \leq \frac{c_i^{max}}{c_h^{min}}, 1 \leq i < h \leq m$ به صورت $\frac{۹۴}{۱۴۷} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{۲۶۰}{۵۰}$ خواهد بود. با در نظر گرفتن این قیود مساله (۱۷) (مدل تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت های نامعین در حالت خوشبینانه) به صورت زیر خواهد بود:

جدول ۲. تخصیص بهینه ورودی‌ها با قیمت‌های متغیر

DMU	X_1^*	X_2^*	$\bar{X}_1^*$	$\bar{X}_2^*$
۱	۱۳	۴۶	۴۶۲۰	۶۶۳۶
۲	۲۷	۷۲	۵۷۷۵	۹۴۸۰
۳	۲۲	۷۴	۶۶۸۴/۳۸	۹۷۶۱/۲۲۴
۴	۲۲	۷۴	۸۸۶۶/۶۶۷	۱۳۲۵۳/۳۳
۵	۸۸	۲۱۷	۱۵۲۰۰	۲۶۵۰۶/۶۷
۶	۳۹	۱۶۶	۱۳۳۰۰	۱۷۶۷۱/۱۱
۷	۳۲	۱۰۶	۱۰۶۴۰	۱۵۹۰۴
۸	۳۹	۱۴۷	۱۲۵۱۷/۶۵	۱۷۶۷۱/۱۱
۹	۴۶	۱۵۵	۱۱۷۴۷/۸۳	۱۷۲۹۹/۱۳
۱۰	۲۲	۹۵	۷۰۹۳/۳۳۳	۸۹۴۶/۳۴۱
۱۱	۱۹	۸۳	۶۶۵۰	۸۳۳۶/۳۶۴
۱۲	۲۳	۱۰۹	۷۶۰۰	۹۱۷۰

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^2 u_r \sum_{k=1}^2 y_{rk} + \sum_{j=1}^2 \xi_j$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^2 u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^2 v_i x_{ij} + \xi_j \leq 0, \quad j, k = 1, \dots, 12,$$

$$\frac{94}{147} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{26}{5}, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^2 v_i \sum_{k=1}^2 x_{ik} = 1,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, 2,$$

$$\xi_k \text{ free}, \quad k = 1, \dots, 12.$$

با در نظر گرفتن قیود $\frac{94}{147} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{26}{5}$ مدل تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین

در حالت بدبینانه به صورت زیر خواهد بود:

رضویان، تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه و بیشترین درآمد و سود حضور قیمت‌های متغیر و نامعین در تحلیل پوششی داده‌ها

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{r=1}^p u_r \sum_{k=1}^q y_{rk} + \sum_{j=1}^p \xi_j \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^p u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \xi_j \leq 0, \quad j, k = 1, \dots, 12, \\
 & \quad \sum_{r=1}^p u_r \hat{y}_r + \sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_i = 1, \\
 & \quad \frac{94}{147} \leq \frac{v_1}{v_7} \leq \frac{26}{5}, \\
 & \quad \sum_{i=1}^m v_i \sum_{k=1}^q x_{ik} = 1, \\
 & \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \\
 & \quad u_r \geq 0, \quad r = 1, 2, \\
 & \quad \xi_k \text{ free}, \quad k = 1, \dots, 12.
 \end{aligned} \tag{22}$$

با حل مدل‌های (۲۱) و (۲۲) تخصیص منابع متمرکز با کمترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در حالت

جدول ۳. تخصیص بهینه ورودی‌ها با هزینه‌های نامعین در حالت خوشبینانه

DMU	x_1^*	x_7^*
۱	۱۹	۱۳۱
۲	۱۹	۱۳۱
۳	۲۷	۱۶۸
۴	۲۷	۱۶۸
۵	۲۷	۱۶۸
۶	۲۷	۱۶۸
۷	۱۹	۱۳۱
۸	۱۹	۱۳۱
۹	۱۹	۱۳۱
۱۰	۱۹	۱۳۱
۱۱	۱۹	۱۳۵
۱۲	۱۹	۱۳۱

خوشبینانه و بدبینانه تعیین می‌گردد. به عنوان نمونه این تخصیص‌ها در حالت خوشبینانه در جدول ۳ آورده شده است. ستون‌های دوم و سوم جدول ۳ مقادیر بهینه ورودی‌های مثال از طریق مدل (۲۱) را نشان می‌دهد. به طوری که دیده می‌شود تخصیص از این طریق متفاوت از تخصیص از طریق روش‌های قبلی (مانند مدل (۴)) است.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله موضوع تخصیص منابع متمرکز از دیدگاه هزینه‌ای، درآمد و سود در حضور هزینه‌ها و قیمت‌های ثابت، متغیر و نامعین بررسی گردید. بدین ترتیب تصمیم گیرنده به دنبال تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و بیش‌ترین درآمد و سود کلی در حالت‌های مختلف هزینه‌ها و قیمت‌ها خواهد بود و بر این اساس تصویر واحدهای تصمیم گیرنده روی مرزهای کارایی هزینه، درآمد و سود که اغلب متفاوت از تصویر روی مرز کارایی تکنیکی هستند، تعیین گردید.

بالاخره مدل‌های تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه در حضور قیمت‌های نامعین در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه انجام پیشنهاد گردید. در انتها موضوع تخصیص منابع متمرکز از طریق مثال‌های تجربی و فرضی مورد بررسی قرار گرفت.

سپاسگزاری

از دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب به دلیل حمایت مالی از این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی (با عنوان: تخصیص منابع متمرکز با کم‌ترین هزینه و تعیین بودجه بهینه برای آن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها) قدردانی می‌گردد.

مراجع

- [۳] کردرستمی، س.، امیر تیموری، ع. ر.، معصوم‌زاده، ع.، (۱۳۹۴). ارزیابی عملکرد نیروی انسانی و شعب بانک صادرات گیلان با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲ (۲)، ۱۳۷-۱۲۵.
- [۴] خدابخشی، م.، کرمی خرم‌آبادی، م.، ثامری‌پور، ع.، (۱۳۹۴). مدل ابرکارایی با داده‌های ترتیبی در تحلیل پوششی داده‌های نادقیق (یک مطالعه موردی: بررسی مراکز خدمات مخابراتی کره جنوبی). تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲ (۲)، ۱۸-۱.
- [1] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. J. R. Stat. Soc. Ser., A 120, 253-281.
- [2] Charnes, A., Coope, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring efficiency of decision making units. Eur. J. Opl. Res., 2, 429-444.
- [5] Galony, B., Phillips, F. Y., Rousseau, J. J., (1993). Models for Improved Efficiency Result. IIE Transactions, 25(6), 2-10.
- [6] Athanas Sopoulos, A. D., (1995). Goal Programming of Data Envelopment Analysis (GoDEA) For Target Based Multi-Level Planning: Allocating Central Grant to the Greek Local Authorities. European Journal of Operational Research, 87, 535-55.
- [7] Lozano, S., Villa, G., (2004). Centralized resource allocation using data envelopment analysis. Journal of Productivity Analysis, 22, 143-161.
- [8] Lozano, S., Villa, G., (2005). Centralized DEA models with the possibility of downsizing. Journal of the Operational Research Society, 56 (4), 357-364.
- [9] Asmild, M., Paradi, J. C., Pastor, J. T., (2009). Centralized resource allocation BCC models. Omega, 37, 40-49.
- [10] Cecilio, M. M., Prior, D., Segovia, M. M., Portillo, F., On centralized resource utilization and its reallocation by using DEA, Ann Oper Res, DOI: 10.1007/s10479-012-1083-8.
- [11] Lei, F., Zhang, C. Q., (2008). Resource allocation based on the DEA model. Journal of the Operational Research Society, 59 (8), 1136-1141.

- [12] Du, J., Liang, L., Chen, Y., Bi, G., (2010). DEA-based production planning. *Omega*, 38, 105–112.
- [13] Yu, M. M., Chern, C. C., Hsiao, B., (2013). Human resource rightsizing using centralized data envelopment analysis: evidence from Taiwan's airports. *Omega*, 41, 119–130.
- [14] Tone, K., (2002). A strange case of the cost and allocative efficiencies in DEA. *Journal of the operational research society*, 53, 1225-1231.