مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره سوم (پیاپی ۵۴)، پاییز ۹۶، ص ص ۱۳۰-۱۱۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش در DEA و DEA-R

محمدرضا مظفری[*1]
۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی شیراز، گروه ریاضی، شیراز، ایران

رسید مقاله: ۴ اسفند ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۳ مرداد ۱۳۹۶

چکیده

در این مقاله مدل‌های تخصیص منابع مرکزی بر اساس کارایی ارزش در DEA و DEA-R پیشنهاد می‌شود. به طور کلی اگر داده‌های ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده در دسترس باشند، مدل‌های DEA علاوه بر کارایی واحدها، الگوی واحدها را روی مرکز کارایی معرفی می‌کنند؛ اما اگر داده‌ها فقط نسبتی از داده‌های ورودی به داده‌های خروجی یا بالعکس باشند، آنگاه مدل‌های DEA نمی‌توانند کارایی و الگوی واحدها را مشخص کنند. از این رو مدل‌های DEA-R مشکل را حل می‌کنند. مدل‌های تخصیص منابع مرکزی با یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌توانند تصویر تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده را روی مرز کارایی به‌دست آورند. از این رو در این مقاله با استفاده از مدل‌های CRA براساس کارایی ارزش (با در نظر گرفتن واحدهایی که مدیر به عنوان MPS معرفی می‌کند) تصویر واحدهای ناکارا در DEA و DEA-R به‌دست آورده می‌شود. در خاتمه مطالعه کاربردی برای شرکت‌های تولیدی پوشاک از یک برند خاص ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر تحلیل کسری، تخصیص منابع مرکزی، کارایی ارزش.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها روشی غیر پارامتری است که کارایی نسبی واحدها را در مقایسه با یکدیگر ارزیابی می‌کند. در این تکنیک نیازی به شناخت شکل تابع تولید نمی‌باشد و محدودیتی در تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها نمی‌باشد. معمولاً در اقتصاد، تابع تولید را به صورت حداکثر خروجی که بتوان مجموعه خاصی از ورودی‌ها را تولید کند تعریف می‌شود؛ اما واقعیت نشان می‌دهد که برخی از واحدها کم‌تر از حد توان خود تولید می‌نمایند؛ بنابراین تابع تولید برمبنای مشاهدات از نقاط عملکرد واحدها تعریف می‌شود؛ اما تابع مرزی تکیه بر حالت نظری حداکثر خروجی را دارد. نخستین بار فارل [۱] در سال ۱۹۵۷، به تعیین کارایی به روش غیر پارامتری پرداخت. تحلیل پوششی داده‌ها عنوان پژوهش رودز بود. نتیجه پژوهش‌های اولیه که با همکاری کوپر و چارنز [۲] انجام شد، در سال ۱۹۷۸ انتشاریافت. چارنز وهمکاران [۲] در سال ۱۹۸۴با معرفی مدل CCR در حقیقت تعمیم کار

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mozaffari854@yahoo.com

فارل به چند ورودی و چند خروجی را تعمیم دادند. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، به دو گروه ورودی محور و خروجی محور تقسیم می شوند. در مدل‌های ورودی محور با ثابت نگه داشتن خروجی‌ها، ورودی‌ها کاهش می‌یابند و در مدل‌های خروجی محور، با ثابت نگه داشتن ورودی‌ها، خروجی‌ها افزایش می‌یابند. بازده به مقیاس نیز مفهومی است که بیان کننده ارتباط نسبت تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌ها است. این نسبت تغییرات می‌تواند، ثابت یا متغیر یعنی صعودی یا نزولی باشد. بنکر و همکاران [۳] در سال ۱۹۸۴ مدل‌های بازده به مقیاس متغیر را معرفی کردند. در امتداد رشد چشمگیر DEA و تمرکز بر روی داده‌های ورودی و خروجی بحث داده‌های کسری مطرح شد. دسپیک و همکاران [۴] درسال ۲۰۰۷ با ادغام DEA و Ratio Analysis مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر تحلیل کسری (DEA-R) را برای داده‌های نسبتی پیشنهاد کردند. وی و همکاران [۵] در سال ۲۰۱۱ با مدل‌های DEA-R ناکارایی کاذب را روی ۲۱ مرکز درمانی در تایوان را نشان دادند. در ادامه وی و همکاران [۶] درسال ۲۰۱۱ مشکلات مدل CCR در DEA و برتری های DEA-R را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین وی و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۱ با توسعه مدل‌های DEA-R در ماهیت ورودی و بازده به مقیاس ثابت کارایی و ابر کارایی را محاسبه کردند. با مطرح شدن بحث DEA-R برای داده‌های نسبتی لی و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۱ از دیدگاهی دیگر مدل‌های DEA با ورودی پنهان را پیشنهاد دادند و ۱۵ موسسه تحقیقاتی در چین با داده‌های نسبتی را مورد مطالعه قرار دادند. مظفری و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۴ رابطه بین مدل‌های DEA و DEA-R را مطالعه کردند. همچنین مظفری و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۴ کارایی هزینه و درآمد در DEA و DEA-R را مقایسه کردند.

یکی از روش‌های معمول در اندازه گیری کارایی استفاده از نسبت‌ها می‌باشد. در این روش، یک نسبت بین اقلام مربوط به هم در اطلاعات عددی مدیریت محاسبه و تحلیل می‌شود. نسبت‌ها در زمینه‌های مختلف مالی، اقتصادی و صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به طور کلی نسبت‌ها به دو دسته ایستا و پویا تقسیم می‌شوند. نسبت ایستا نسبتی است که نسبت بین دو جزو را در یک تاریخ معین نشان می‌دهد مانند نسبت جاری، نسبت نقدینگی و نسبت سهامداران. نسبت پویا به معنی نسبت گردش و دوره گردش می‌باشد مانند بهره‌وری سرمایه و بهره‌وری نیروی کار. لوزانو و ویلا [۱۱] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌های تخصیص منابع مرکزی را پیشنهاد کردند و با ارایه یک مساله برنامه‌ریزی خطی تصویر تمام واحدها را روی مرز کارایی به‌دست آوردند. در ادامه لوزانو و همکاران [۱۲] در سال ۲۰۰۴ مدل‌های دیگر تخصیص منابع مرکزی در یک مطالعه کاربردی با معرفی متغیرهای صحیح پیشنهاد کردند و مدل‌های تخصیص منابع مرکزی را توسعه و مطالعه موردی روی صنعت کاغذ را با مدل‌های پیشنهادی ارایه دادند. لوزانو و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۰۹ در ادامه مدل‌های تخصیص منابع را در مطالعه کاربردی اجرایی کردند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۰ با تلفیق مدل‌های راسل اصلاح شده و مدل‌های تخصیص منابع مرکزی مطالعه روی ۳۰ شرکت بیمه را انجام دادند.

بسیاری از مسایل واقعی در سازمان‌ها را می‌توان به صورت یک مساله برنامه‌ریزی چند هدفه مدل‌سازی کرد و جواب‌های پاراتو بهین آن را به‌دست آورد. در یک سازمان یافتن جواب‌های پاراتوبهین می‌تواند براساس نظر تصمیم‌گیرنده (DM) مشخص شود. کورهنن و لاکسو [۱۵] در سال ۱۹۸۶ با استفاده از روش‌های تعاملی مساله

چند معیاره را حل کردند. همچنین جورو و همکاران [۱۶] در سال ۱۹۹۸ تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی خطی چند هدفه را با یکدیگر مقایسه کردند. اما هالم و همکاران [۱۷] در سال ۱۹۹۹ با استفاده از کارایی ارزش روشی جدید در تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردند. همچنین هالم و کورهنن [۱۸] در سال ۲۰۰۰ بحث کارایی ارزش را با محدودیت وزن را مطرح و کورهنن و و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۲ بحث کارایی ارزش را توسعه دادند به طوری که بیش تر از قبل مورد توجه قرار گرفت. از این رو کورهنن و سیرجانن [۲۰] در سال ۲۰۰۵ تا سلیمانی دامنه و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۴ روی کارایی ارزش و کاربردهای آن توجه خاصی انجام گرفت. هالم و کورهنن [۲۲] در سال ۲۰۱۳ با استفاده از تحلیل کارایی ارزش برای یافتن الگوی واحدهای غیرهمگن مدل جدیدی را پیشنهاد کردند. هالم و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۱۴ تحلیل کارایی ارزش را روی شعب بانک انجام دادند و مدل‌های FDH را براساس کارایی ارزش پیشنهاد کردند. جورو وکورهنن [۲۴] در سال ۲۰۱۵ ارتباط بین تحلیل پوششی داده‌ها و کارایی ارزش را با نهایت دقت جمع‌آوری و ارایه دادند.

در این مقاله با تلفیق تحلیل پوششی داده‌ها با کارایی ارزش و همچنین مدل‌های تخصیص منابع مرکزی مدل‌های متناظر پیشنهاد می‌شود. به طور کلی در بسیاری از شرکت‌های مالی فقط نسبت‌های مالی وجود دارد که مدل‌های DEA-R می‌تواند آن شرکت‌ها را ارزیابی کند؛ اما محاسبه کارایی که در مقایسه با سایر واحدها می‌باشد می‌تواند از نظر مدیر قابل قبول نباشد؛ یعنی مدیر با اعمال نظر خود و معرفی واحدهایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند کارایی ارزش را ملاک تصمیم‌گیری قرار می‌دهد. از این رو مدل‌های تخصیص منابع مرکزی بر اساس کارایی ارزش می‌تواند تصویر واحدها را با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی با در نظر گرفتن واحدهایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند را به‌دست آورد. به طور مشابه در DEA-R و حالتی که فقط داده‌های نسبتی دارند این مساله تکرار می‌شود. ساختار مقاله حاضر به صورت زیر می‌باشد. در بخش دوم مفاهیم اولیه تحلیل پوششی داده‌ها و کارایی ارزش ارایه می‌شود. در بخش سوم مدل‌های جدید تخصیص منابع مرکزی در DEA و DEA-R پیشنهاد می‌شود. در بخش چهارم مثال عددی و مطالعه کاربردی ارایه می‌شود. در خاتمه نتیجه‌گیری مقاله قرار دارد.

۲ مفاهیم اولیه

در این بخش مفاهیم اولیه DEA، DEA-R و Value efficiency به طور مختصر ارایه می‌شود. ابتدا با معرفی مدل BCC در DEA و همچنین معرفی مدل CCR در DEA-R رابطه بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. همچنین به طور مختصر روش محاسبه کارایی ارزش و رابطه آن را با DEA بیان می‌کنیم.

۲-۱ مدل پوششی BCC در DEA

در این بخش n واحد تصمیم‌گیرنده با مصرف m ورودی $X_j=(x_{1j},....,x_{mj})$ و s خروجی $Y_j=(y_{1j},....,y_{sj})$ برای DMU_j تولید می‌کنند. مدل پوششی BCC برای ارزیابی DMU_o که

$o \in \{1,...,n\}$ بـا در نظـر گـرفتن اصـول موضـوعه الـف) شـمول مشـاهدات ب) امکـان پـذیری ج) تحـدب د) کمینه درونیابی، مجموعه امکان تولید T_v را به صورت زیر در نظر می‌گیرد:

$$T_V = \{(X,Y) \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le X,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge Y, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\qquad \lambda_j \ge 0 \quad j = 1,...,n\}$$

بنکر و همکاران [۳] در سال ۱۹۸۴ مدل (۱) را برای ارزیابی DMU_O پیشنهاد کردند:

$$\theta^* = Max \quad \theta$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io}, \quad \forall i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, \quad \forall r, \qquad (1)$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$
$$\lambda_j \ge 0, \quad \forall j.$$

برای ارزیابی n واحد تصمیم‌گیرنده با مدل (۱) لازم است n مساله برنامه‌ریزی خطی حل شود. اگر مدل (۱) بـرای ارزیابی DMU_O حل شود، سپس مدل فاز دوم با حداکثر کردن (مـاکزیمم سـازی) مجمـوع متغیرهـای کمکـی قیود ورودی خروجی و همچنین استفاده از مقدار θ^*، در نظر گرفته می‌شود. اگر $(\lambda_1^*,....,\lambda_n^*,\theta^*)$ جواب بهینه فاز دوم مدل (۱) باشد، آنگاه $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_{rj})$ تصویر کارا برای DMU_O می‌باشد.

۲-۲ مدل پوششی در DEA-R

با درنظر گرفتن ورودی‌های $X_j=(x_{1j},....,x_{mj})$ و خروجی‌های $Y_j=(y_{1j},....,y_{sj})$ مدل پوششی CCR در DEA-R با رعایت اصول موضوعه الف) شمول مشاهدات ب) امکان پذیری ج) تحدب

مدل (۲) به عنوان مدل پوششی DEA-R در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$Min \quad \beta$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{x_{ij}}{y_{rj}} \le \beta \frac{x_{io}}{y_{ro}}, \quad \forall i, \qquad \forall r, \qquad (2)$$
$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1,$$
$$\mu_j \ge 0, \qquad \forall j.$$

اگر در مدل (۲)، $\frac{X_j}{Y_j} = F_j$ در نظر بگیریم، آنگاه مدل (۲) تبدیل به مدل (۱) بدون خروجی می‌شود. اگر $(\mu_1^*,....,\mu_n^*,\theta^*)$ جواب بهینه فاز دوم مدل (۲) با حد اکثر کردن (ماکزیمم سازی) مجموع متغیرهای کمکی قیود نامساوی و همچنین استفاده از مقدار β^* باشد، آنگاه $(\sum_{j=1}^{n}\mu_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\mu_j^* y_{rj})$ تصویر کارا برای DMU_O می‌باشد.

۲-۳ مدل پوششی کارایی ارزش

در کارایی ارزش با استفاده از نظر مدیر واحدهایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند، در ماهیت ورودی معرفی و در مدل اعمال می‌شوند. تصویر واحد تحت ارزیابی با استفاده از مدل (۲) نیز از رابطه $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* y_{rj})$ به‌دست می‌آید. کارایی ارزش برای DMU_O در ماهیت ورودی و به فرم پوششی در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت توسط هالم و کورهنن [۲۲] در سال ۲۰۱۳ به صورت زیر پیشنهاد شد.

$$
\begin{aligned}
&\alpha^* = Max \quad \alpha \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + \alpha x_{io} + s_i = x_{io}, \qquad \forall i \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} - \alpha y_{ro} - s_r = y_{ro}, \qquad \forall r, \\
&s_i \geq 0, \quad s_r \geq 0, \quad \forall i, \forall r, \\
&\lambda_j : \begin{cases} \geq 0 & if\ \lambda_j^* = 0 \\ = free & if\ \lambda_j^* > 0 \end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

در مدل (۳) با استفاده از معرفی واحدهای MPS و رابطه $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* y_{rj})$ مقدار $(\lambda_1^*,....,\lambda_n^*)$ تعیین و در نتیجه علامت بردار $(\lambda_1,....,\lambda_n)$ مشخص می‌شود.

۳ تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش

در این بخش مدل‌های تخصیص منابع مرکزی در DEA و DEA-R بر اساس کارایی ارزش ارایه می‌شود. ابتدا مدل تخصیص منابع مرکزی در DEA که توسط لوزانو و ویلا [۱۱] در سال ۲۰۰۴ پیشنهاد شد، معرفی می‌شود. سپس مدل تخصیص منابع مرکزی بر اساس کارایی ارزش ارایه می‌شود. در قسمت دوم این بخش مدل‌های تخصیص منابع مرکزی در DEA-R و بر اساس کارایی ارزش ارایه می‌شود.

۳-۱ تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش در DEA

در این قسمت ابتدا مدل تخصیص منابع مرکزی در DEA معرفی می‌شود. سپس با استفاده از بحث کارایی ارزش مدل متناظر پیشنهاد می‌شود. لوزانو و ویلا [۱۱] در سال ۲۰۰۴ با ارایه یک مدل برنامه‌ریزی خطی تصویر تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده را با حل یک مساله به‌دست می‌آورد.

$$\delta^* = Min \quad \delta$$
$$s.t.$$
$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}x_{ij} \le \delta(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}), \quad \forall i,$$
$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}y_{rj} \ge (\sum_{j=1}^{n}y_{rj}), \quad \forall r, \qquad (۴)$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt} = 1, \quad \forall t,$$
$$\lambda_{jt} \ge 0, \quad \forall j, \quad \forall t.$$

مدل (۴) دارای $m+s+n$ قید و n^2+1 متغیر می‌باشد که با در نظر گرفتن مجموع خروجی‌های تمام واحدها و هدف کاهش مجموع تمام ورودی‌های واحدها ، بسیار حایز اهمیت می‌باشد. با دستکاری مدل (۴) و فقط تغییر در متغیر λ_j مدل تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش در DEA به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\gamma^* = Max\,\gamma$$
$$s.t.$$
$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}x_{ij} + \gamma(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}) \le (\sum_{j=1}^{n}x_{ij}), \quad \forall i,$$
$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}y_{rj} \ge (\sum_{j=1}^{n}y_{rj}), \quad \forall r, \qquad (۵)$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt} = 1, \quad \forall t,$$
$$\lambda_{jt}: \begin{cases} \ge 0 & if\ \lambda_{jt}^* = 0 \\ = free & if\ \lambda_{jt}^* > 0 \end{cases}$$

قضیه ۱. مدل (۵) همواره شدنی است.

اگر در مدل (۲)، $\frac{X_j}{Y_j} = F_j$ در نظر بگیریم، آنگاه مدل (۲) تبدیل به مدل (۱) بدون خروجی می‌شود.

اگر در مدل (۵)، $\gamma = 0$ و $(\lambda_{1t},...,\lambda_{nt}) = e_t$ برای هر t در نظر بگیریم ، آنگاه مدل (۵) دارای جواب شدنی است.

در مدل (۵) با استفاده از واحدهای MPS که توسط تصمیم‌گیرنده معرفی می‌شوند و رابطه $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}^{*}x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}^{*}y_{rj})$ مقدار $(\lambda_{1t}^{*},...,\lambda_{nt}^{*})$ تعیین و در نتیجه علامت بردار λ_{jt} برای هر j و t مشخص می‌شود. مدل (۵) در ماهیت ورودی با بازده به مقیاس متغیر می‌باشد که در فاز اول مقدار γ^{*} تعیین می‌شود و در فاز دوم حداکثر مقدار متغیر کمکی در قیود ورودی و خروجی به‌دست می‌آید. در انتهای فاز دوم با استفاده از رابطه $(\hat{x}_{it}, \hat{y}_{rt}) = (\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}^{*}x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jt}^{*}y_{rj})$ برای هر i و r تصویر واحد تصمیم‌گیرنده t یعنی DMU_t به‌دست می‌آید.

۳-۲ مدل تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش در DEA-R

مظفری و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۴ مدل تخصیص منابع مرکزی در DEA-R را پیشنهاد کردند و مدل تخصیص منابع مرکزی را در حالت شعاعی و غیر شعاعی برای داده‌های نسبتی ارایه دادند. از این رو مدل تخصیص منابع مرکزی در DEA-R در ماهیت ورودی و تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر ارایه می‌شود:

$$\omega^{*} = Min \quad \omega$$
$$s.t.$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \le \omega\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}y_{rj}}\right), \qquad \forall i, \forall r, \tag{۶}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt} = 1, \quad \forall t,$$

$$\mu_{jt} \ge 0, \qquad \forall j, \quad \forall t.$$

در این بخش فرض کنیم نسبت ورودی‌ها به خروجی‌ها تعریف شده باشد، از این رو در مدل (۶) در فاز اول نسبت مجموع ورودی‌ها به مجموع خروجی‌ها کاهش می‌یابد و سپس در فاز دوم با در نظر گرفتن ω^{*} و حداکثر کردن متغیرهای کمکی دسته قیود اول تصویر تمام واحدها روی مرکز کارایی از رابطه $(\tilde{x}_{it}, \tilde{y}_{rt}) = (\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^{*}x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^{*}y_{rj})$ برای هر i و r تصویر واحد تصمیم‌گیرنده t به‌دست می‌آید.

قضیه ۲. اگر در مدل‌های (٤) و (٦) خروجی نداشته باشیم، آنگاه مدل‌ها معادل هستند.

اگر در مدل (۶)، $x_{ij} = k_{ij}$ در نظر بگیریم، آنگاه $\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^{*}k_{ij} \le \omega(\sum_{j=1}^{n}x_{ij})$ و $\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^{*} = 1$ بنابراین جواب شدنی مدل (۶) نیز جواب شدنی مدل (۴) می‌باشد. به طور مشابه می‌توان از مدل (۴) یک جواب شدنی برای مدل (۶) به‌دست آورد؛ بنابراین مدل‌های (۴) و (۶) معادل هستند.

بر اساس ایده هالم و کورهنن [۲۲] در سال ۲۰۱۳ مدل تخصیص منابع مرکزی براساس کارایی ارزش در DEA-R با تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\sigma^* = Max \quad \sigma$$
$$s.t.$$

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{tj}\frac{x_{ij}}{y_{rj}} + \sigma\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}y_{rj}}\right) \le \left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}y_{rj}}\right), \quad \forall i, \forall r, \tag{۷}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j = 1,$$

$$\mu_{tj}: \begin{cases} \ge 0 & if\ \mu_{tj}^* = 0 \\ = free & if\ \mu_{tj}^* > 0 \end{cases}$$

اگر قبل از حل مدل (۷) تصمیم‌گیرنده واحدهای *MPS* را معرفی کند و در رابطه $(x_{it}^*, y_{rt}^*) = (\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^* y_{rj})$ صدق کند $(\mu_{1t}^*, ..., \mu_{nt}^*)$ تعیین و در نتیجه علامت بردار μ_{jt} برای هر j و t مشخص می‌شود.

مدل (۵) در ماهیت ورودی با بازده به مقیاس متغیر می‌باشد که در فاز اول مقدار σ^* تعیین می‌شود و در فاز دوم حداکثر مقدار متغیر کمکی در قیود ورودی و خروجی به‌دست می‌آید. در انتهای فاز دوم با استفاده از رابطه $(\bar{x}_{it}, \bar{y}_{rt}) = (\sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^* x_{ij}, \sum_{j=1}^{n}\mu_{jt}^* y_{rj})$ برای هر i و r تصویر واحد تصمیم‌گیرنده t به‌دست می‌آید.

٤ مثال عددی

در این بخش ابتدا یک مثال عددی با هفت واحد تصمیم‌گیرنده با یک خروجی و دو ورودی بر گرفته از مقاله لوزانو و ویلا [۱۱] در سال ۲۰۰۴ ارایه می‌شود. سپس مطالعه کاربردی روی دوازده شرکت پوشاک از یک برند خاص ارایه می‌شود. تصویر تمام واحدها را بر اساس کارایی ارزش در *DEA* و *DEA-R* در مدل‌های تخصیص منابع مرکزی ارایه می‌شود.

٤-١ مدل مثال عددی

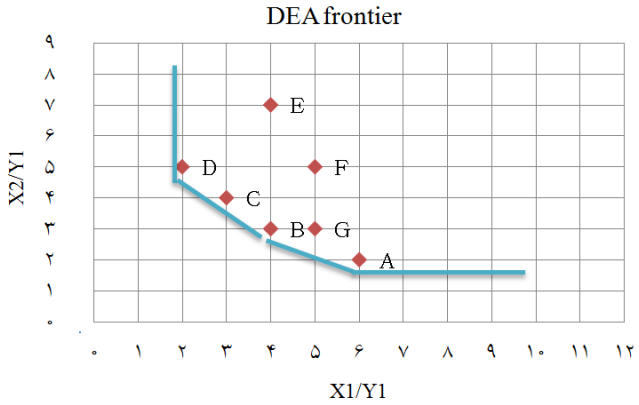
در این بخش هفت واحد تصمیم‌گیرنده در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر در *DEA* و همچنین تحت تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در *DEA-R* را در نظر گرفته می‌شود.

در شکل ۱ تصویر مرز کارایی واحد تصمیم‌گیرنده در جدول ۱ با دو ورودی و یک خروجی ثابت یک، نمایش داده شده است.

تصویر واحدها در جدول (۲) نمایش داده شده است. تصویر تمام واحدها در فاز دوم با استفاده از مدل (۴) و (۶) به‌دست می‌آید. واحدهای E، F و G کارا نمی‌باشد؛ اما واحدهای A، B، C و D کارا هستند.

جدول ۱. داده‌های ورودی و خروجی

DMU	I_1	I_2	O_1
A	۶	۲	۱
B	۴	۳	۱
C	۳	۴	۱
D	۲	۵	۱
E	۴	۷	۱
F	۵	۵	۱
G	۵	۳	۱



شکل ۱. تصویر مرز کارایی هفت واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی

جدول ۲. تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل از مدل (۴) و (۶)

	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}_1$
DMU	I_1	I_2	O_1
A	۲	۵	۱
B	۲/۵	۴/۵	۱
C	۴	۳	۱
D	۴	۳	۱
E	۴	۳	۱
F	۴	۳	۱
G	۴	۳	۱

تصویر تمام واحدها در جدول (۲) نمایش داده شده است. تصویر حاصل از مدل (۴) و (۶) در حالت یک خروجی با یکدیگر برابر است. واحدهای E و F و G کارا نمی‌باشد؛ اما واحدهای A، B، C و D کارا هستند.

اگر در مدل (۵) و (۷)، MPS را واحدهای A و B در نظر بگیریم، تصویر تمام واحدها در DEA و DEA-R به صورت (۱و۲/۱۶۴۲و۵/۶۷۱۶) به‌دست می‌آید. همچنین اگر در مدل (۵)، MPS را واحدهای C و D در نظر بگیریم، تصویر تمام واحدها در DEA به صورت (۱و۳و۴) و (۱و۲/۳۶و ۴/۶۳) به‌دست می‌آید.

اگر در مدل (۷) ، MPS را واحدهای C و D در نظر بگیریم، تصویر تمام واحدها در DEA-R به صورت (۱و۶/۳۶ و۰/۶۳) به‌دست می‌آید. بطور مشابه در مدل (۵) و (۷) با در نظر گرفتن واحد A به صورت MPS ، تصویر تمام واحدها در DEA و DEA-R به صورت (۱و۲و۶) به‌دست می‌آید. در خاتمه اگر در مدل (۵) و (۷)، MPS را واحد B در نظر بگیریم، تصویر تمام واحدها در DEA و DEA-R به صورت (۱و۳و۴) به‌دست می‌آید.

٤-۲ مدل مطالعه کاربردی

در این بخش دوازده شرکت تولیدی پوشاک از یک برند خاص در ایران با سه ورودی و دو خروجی در نظر گرفته شده است. ورودی های I_1، I_2 و I_3 به ترتیب شامل بدهی کلی، بدهی جاری مصرفی کارکنان و بدهی جاری برای تولید پوشاک می‌باشد. O_1 و O_2 به ترتیب شامل دارایی جاری و دارایی کلی می‌باشد. در مرحله اول هدف ارزیابی دوازده شرکت پوشاک و سپس یافتن الگوی مناسب برای شرکت‌ها به طوری که نسبت بدهی کم‌تر شود. در مرحله دوم هدف معرفی چندین واحد به عنوان واحدهایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند، به طوری که علاوه بر کاهش نسبت بدهی، اعمال نظر مدیر نیز اجرا شود. در جدول (۳) داده‌های ورودی و خروجی دوازده شرکت نمایش داده شده است.

جدول ۳. داده‌های ورودی و خروجی شرکت‌های تولیدی پوشاک

	I_1	I_2	I_3	O_1	O_2
۱	۱۲۹۶۳/۸۷	۳۷/۷۵	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹
۲	۱۴۸۳/۶۹	۲۲/۷۴	۱۰۲۴۴	۷۳۵۶۰	۳۱۷۶۱۷
۳	۲۵۴۷/۰۲	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۴	۸۶۶/۸۶	۲۰/۹۴	۴۴۱۲۸	۲۹۱۶۵	۹۷۱۶۴۰
۵	۴۵۴۵/۹۲	۱۴/۴۳	۱۳۰۴۳	۲۱۶۱۴۸	۱۵۸۱۳۰
۶	۹۱۳۹/۰۳	۱۸/۸۶	۸۷۹۸۱	۵۱۴۸۸۱	۵۰۸۷۳۵
۷	۳۰۸/۶۷	۲۵/۶۶	۹۷۷۶۳	۱۵۶۷۶	۱۷۲۹۴۷
۸	۳۱۸۵/۷	۲۶/۲۷	۷۶۲۹	۱۵۵۷۹۹	۲۶۹۶۱۷
۹	۸۳۲/۰۳	۲۱/۹۱	۴۳۰۵۱۳	۱۳۷۰۷	۱۶۳۳۹۷
۱۰	۱۱۵۸۹/۰۹	۱۶/۷۵	۷۸۵۹	۶۶۶۶۷۹	۲۴۲۹۷۱
۱۱	۲۸۸۶/۷۴	۸۱/۲	۱۵۱۱۹۲	۱۰۶۶۸۲	۴۰۸۵۰۶
۱۲	۱۸۸۰/۴۶	۶۷۲۱	۵۳۲۰۹	۱۹۰۴۵۵	۱۷۴۶۵۷

آنچه برای شرکت‌های تولیدی پوشاک اهمیت دارد آن است که ابتدا بدهی نداشته باشند و همچنین در سال‌های متوالی دارایی آن‌ها افزایش یابد تا اینکه این برند خاص پوشاک در سرتاسر کشور توسعه پیدا کند. به طور کلی هر چه مجموع دارایی‌های دوازده شرکت بیش‌تر و مجموع بدهی‌ها کاهش یابد، بدیهی است که امکان توسعه و ایجاد شعب دیگر در سطح کشور بیش‌تر خواهد شد، البته در کلان به نسبت‌های بدهی و سریع توجه ویژه داریم، به طوری که توسعه شعب بی رویه نباشد. از این رو در این مطالعه کاربردی دو دیدگاه را در نظر می‌گیریم.

الف) فقط داده‌های ورودی و خروجی موجود باشند.

در این حالت هدف کاهش مجموع ورودی های بدهی کلی، بدهی جاری مصرفی کارکنان و بدهی جاری برای تولید می‌باشد. در صورتی که دارایی‌های جاری و کلی ثابت نگه داشته شود. از این رو با مدل (۱) تمام شرکت‌ها کارا هستند به غیر از شرکت‌های ۶ و۹ و ۱۱؛ اما با مدل (۲) تمام شرکت‌ها کارا هستند به غیر از شرکت ۱۱.
در جدول (۴) الگوی هر واحد تصمیم‌گیرنده حاصل از مدل (۴) نمایش داده شده است.

جدول ٤. تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل از مدل (۴)

	I_1	I_2	I_3	O_1	O_2
۱	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۲	۴۵۴۵/۹	۱۴/۴	۱۳۰۴۳	۲۱۶۱۴۸	۱۵۸۱۳۰
۳	۲۵۴۷/۹	۱۴/۴	۱۳۰۴۳	۲۱۶۱۴۸	۱۵۸۱۳۰
۴	۲۵۴۷/۹	۱۴/۴	۱۳۰۴۳	۲۹۱۶۵	۹۷۱۶۴۰
۵	۱۰۱۱۰/۸	۱۶/۳	۸۹۴۷/۱	۵۷۲۱۱۸/۶	۲۲۵۱۶۴
۶	۳۳۴۹/۶	۲۴/۷	۳۹۵۷۸/۵	۴۵۵۷۸۸/۸	۴۶۷۷۷۰/۴
۷	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۸	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۹	۹۸۷/۳	۲۱/۳	۴۴۰۲۳/۳	۵۸۲۸۳/۶	۹۳۷۰۷۹
۱۰	۸۶۶/۹	۲۰/۹	۴۴۱۲۸	۲۹۱۶۵	۹۷۱۶۴۰
۱۱	۸۶۶/۹	۲۰/۹	۴۴۱۲۸	۲۹۱۶۵	۹۷۱۶۴۰
۱۲	۸۶۶/۹	۲۰/۹	۴۴۱۲۸	۲۹۱۶۵	۹۷۱۶۴۰

اگر مدیر شرکت‌هایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند معرفی کند، آنگاه با مدل (۵) و (۷) تصویر تمام شرکت‌ها به‌دست می‌آید. نتایج حاصل از مدل (۵) و (۷) در جدول (۷) نمایش داده شده است. به طور کلی با معرفی شرکت ۱۲ به عنوان MPS در هر دو مدل (۵) و (۷) تصویر کارا برای تمام شرکت‌ها، فقط شرکت ۱۲ به‌دست می‌آید. به طور مشابه با معرفی شرکت ۳ به عنوان MPS در هر دو مدل (۵) و (۷) تصویر کارا برای تمام شرکت‌ها، فقط شرکت ۳ به‌دست می‌آید. اما اگر مدیر شرکت‌هایی که بیش‌ترین بهره‌وری را دارند شرکت ۳ و۴ معرفی کند، آنگاه با مدل (۵) تصویر تمام شرکت‌ها (۲۵۰۰۰ و۸۳۳۳۶۶/۹ و۴۱۵۳۴/۷ و ۳۰ و۴۲۲۴/۱) محاسبه می‌شود. به طور مشابه با معرفی شرکت‌های ۱، ۳ و ۴ از طرف تصمیم‌گیرنده، آنگاه با مدل (۷) تصویر

تمام شرکت‌ها (۳۹۹۳۰۸۹/۵ و ۲۱۵۶۹۷/۹ و ۱۶۶۵۱۱۶/۹ و ۳۵/۲ و ۱۳۹۳۸/۹) به‌دست می‌آید. در خاتمه برنامه GAMS مدل (۷) به صورت زیر نمایش داده شده است.

جدول ۵. تصویر واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل از مدل (۶)

	I_1	I_2	I_3	O_1	O_2
۱	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۲	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۳	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۴	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۵	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۶	۲۵۴۷	۲۵/۵	۴۲۶۶۸	۴۳۵۲۴۸	۴۸۹۶۶۶
۷	۶۵۹۲/۳	۳۰/۳	۷۸۳۴۰/۹	۵۴۱۸۹۵/۲	۱۳۱۳۲۳۸/۵
۸	۱۲۹۶۳/۳	۳۷/۸	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹
۹	۱۲۹۶۳/۳	۳۷/۸	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹
۱۰	۱۲۹۶۳/۳	۳۷/۸	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹
۱۱	۱۲۹۶۳/۳	۳۷/۸	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹
۱۲	۱۲۹۶۳/۳	۳۷/۸	۱۳۴۵۲۹	۷۰۹۸۷۴	۲۶۱۰۴۳۹

```
Equations
    Objective
    Con1(i,r), Con2(t,f) , Con3(i,t,f) , Con4(r,t,f)     ;

Objective..       z=e=Teta ;
Con1(i,r).. sum(t, Sum(j,(x1(J,I) /y1(J,R))*Lambda(j,t)))+sum(f,  Sum(p,(xp(P,I)/yp(P,R)) *mu(p,f)))
+teta*  sum(j, x1(J,I))/ sum(j,y1(J,R)) =l=  sum(j, x1(J,I))/ sum(j,y1(J,R));

Con2(t,f)..     Sum(j,Lambda(j,t))+Sum(p,mu(p,f))=e=1;
Con3 (i,t,f)..    h(i,t,f)-sum(j,x1(J,I)*Lambda(j,t))-sum(p,xp(P,I)*mu(p,f)) =e= 0;
Con4(r,t,f)..  q(r,t,f)-sum(j,y1(J,R)*Lambda(j,t))-sum(p,yp(P,R)*mu(p,f)) =e= 0;
```

برنامه GAMS مدل (۷)

۵ نتیجه‌گیری

در DEA برای یافتن الگوی مناسب برای n واحد تصمیم‌گیرنده لازم است n مساله برنامه‌ریزی خطی حل شود؛ اما با استفاده از مدل‌های تخصیص منابع مرکزی با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌توان الگوی مناسب، برای n واحد تصمیم‌گیرنده به‌دست آورد. در حالتی که داده‌های ورودی و خروجی به صورت نسبتی باشد، آنگاه با مدل‌های DEA-R می‌توانند مقیاس کارایی و الگوی آن‌ها را به‌دست آورند. در این مقاله با استفاده از مدل‌های تخصیص منابع مرکزی در DEA و DEA-R الگوی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس کارایی ارزش معرفی می‌شوند. مقیاس کارآیی و الگوی واحدها در DEA با دیدگاه یکسان محاسبه می‌شود؛ اما در کارایی ارزش با معرفی شرکت‌هایی که بیش‌ترین بهره‌وری از نظر مدیر دارند مقیاس کارایی و الگوی واحدها محاسبه می‌شود. در

این مقاله با مطالعه شرکت‌های تولیدی پوشاک از یک برند خاص سه شاخص ملاحظه و هدف گذاری شده است.

الف) اگر فقط داده‌های نسبتی در دسترس باشند آنگاه فقط مدل‌های DEA-R می‌توانند واحدها را ارزیابی کنند. به طور کلی در ارزیابی شرکت‌ها ملاحظه شد که هر چه نسبت بدهی، یعنی جمع کل بدهی به جمع کل دارایی کم‌تر باشد ریسک کم‌تری برای ورشکستگی وجود دارد. از این رو محاسبه نسبت سریع، یعنی تفاضل دارایی جاری و پیش پرداخت موجود کالا بر بدهی جاری ملاک تصمیم‌گیری ماهیانه و سالیانه می‌باشد.

ب) مدل‌های کارایی ارزش با معرفی شرکت‌هایی که بیش‌ترین بهره‌وری از نظر مدیر را دارند اولاً در محاسبه کارایی و الگو بسیار حایز اهمیت می‌باشند. ثانیاً واحدهای کارا به فعالیت تولید ادامه می‌دهند و لازم است بر اساس واقعیت شرکت‌هایی که در عمل بیش‌ترین بهره‌وری را داشته اند ملاک و الگوی واحدهای ناکارا باشند که در این مدل ها لحاظ شده است.

ج) مدل‌های تخصیص منابع مرکزی در ماهیت ورودی، مجموع ورودی تمام واحدها را به طور شعاعی یا غیر شعاعی کاهش می‌دهد؛ البته مجموع خروجی تمام واحدها را حفظ می‌کند. از این رو با محاسبات کم‌تر تخصیص منابع مرکزی انجام می‌شود. در خاتمه با الهام گرفتن از موارد فوق برای دوازده شرکت تولیدی پوشاک علاوه بر الگوی مناسب در DEA و DEA-R الگوی مناسب در کارایی ارزش محاسبه می‌شود. برای تحقیقات آتی محاسبه بازده به مقیاس و تراکم در مدل‌های تخصیص منابع مرکزی بر اساس کارایی ارزش در DEA و DEA-R پیشنهاد می‌شود.

منابع

[1] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productivity efficiency. Journal of The Royal Statistical Society Series A: General120, (3), 253–281.

[2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

[3] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30, 1078-1092.

[4] Despic, O., Despic, M., Paradi, J. C., (2007). DEA-R: Ratio-based comparative efficiency model, its mathematical relation to DEA and its use in applications. Journal of Productivity Analysis, 28, 33–44.

[5] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K., Tsai, C. H., (2011). Using the DEA-R model in the hospital industry to study the pseudo-inefficiency problem. Expert Systems with Applications, 38, 2172–2176.

[6] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K., Tsai, C. H., (2011). Exploration of efficiency underestimation of CCR model: Based on medical sectors with DEA-R model. Expert Systems with Applications, 38, 3155–3160.

[7] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K., Tsai, C. H., (2011). A study of developing an input- oriented ratio-based comparative efficiency model. Expert Systems with Applications, 38, 2473–2477.

[8] Liu, W .B., Zhang, D. Q., Meng, W., Li, X. X., Xu, F., (2011). A study of DEA models without explicit inputs. Omega, 39, 472–480.

[9] Mozaffari, M. R., Gerami, J., Jablonsky, J., (2014). Relationship between DEA models without explicit inputs and DEA-R models. Central European Journal of Operations Research, 22, 1–12.

[10] Mozaffari, M. R., Kamyab, P., Jablonsky, J., Gerami, J., (2014). Cost and revenue efficiency in DEA-R models. Computers & Industrial Engineering, 78, 188–194.
[11] Lozano, S., Villa, G., (2004). Centralized resource allocation using data envelopment analysis. Journal of Productivity Analysis, 22, 143–161.
[12] Lozano, S., Villa, G., Adenso-Díaz, B., (2004). Centralised target setting for regional recycling operations using DEA. Omega, 32, 101 – 110.
[13] Lozano, S., Villa, G., Brannlun, R., (2009). Centralised reallocation of emission permits using DEA. European Journal of Operational Research, 193, 752–760.
[14] Hosseinzadeh Lotfi, F., Noora, A. A., Jahanshahloo, G. R., Gerami, J., Mozaffari, M. R., (2010). Centralized resource allocation for enhanced Russell models. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 1-10.
[15] Korhonen, P., Laakso, J., (1986). A visual interactive method for solving the multiple criteria problem. European Journal of Operational Research, 24, 277–287.
[16] Joro, T., Korhonen, P., Wallenius, J., (1998). Structural comparison of data envelopment analysis and multiple objective linear programming. Management Science, 44(7), 962–970.
[17] Halme, M., Joro,T., Korhonen, P., Salo, S., Wallenius, J., (1999). A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis. Management Science, 45(1), 103–115.
[18] Halme, M., Korhonen, P., (2000). Restricting weights in value efficiency analysis. European Journal of Operational Research, 126(1), 175–188.
[19] Korhonen, P., Siljamaki, A., Soismaa, M., (2002). On the use of value efficiency analysis and further developments. Journal of Productivity Analysis, 17(1/2), 49–64.
[20] Korhonen, P., Syrjanen, M., (2005). On the interpretation of value efficiency. Journal of Productivity Analysis, 24(2), 197–201.
[21] Soleimani-damaneh, M., Korhonen, P., Wallenius, J., (2014). On value efficiency. Optimization, 63(4), 617–631.
[22] Halme, M., Korhonen, P., (2013). Using value efficiency analysis to benchmark non-homogeneous units. International Journal of Information Technology & Decision Making. 14(4), 727-745.
[23] Halme, M., Korhonen, P., Eskelinen, J., (2014). Non-convex value efficiency analysis and its application to bank branch sales evaluation. Omega, 48, 10–18.
[24] Joro, T., Korhonen, P., (2015). Extension of Data Envelopment Analysis with Preference Information Value Efficiency. New York: Springer Science+Business Media.