مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هجدهم، شماره دوم (پیاپی ۶۹)،تابستان ۰۰، ص ص ۷۳-۵۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رویکردی جدید برای یافتن جواب مسایل حمل‌ونقل با پارامترهای خاکستری

فرید پور افقی[1]، داود درویشی سلوکلایی[2*]، جمال صفار اردبیلی[3]
۱- دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران
۲- استادیارگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران
۳- استادیارگروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۹
پذیرش مقاله: ۱۲ آذر ۱۳۹۹

چکیده

در دنیای واقعی، تعیین میزان دقیق عرضه و تقاضا در مساله های حمل ونقل به دلیل تغییر شرایط اقتصادی ممکن است به‌سختی امکان‌پذیر باشد؛ اما هنگام حمل‌ونقل کالاهای ضروری به هنگام وقوع بلایای طبیعی یا جابجایی وسایل نظامی در زمان جنگ با داده‌های نادقیق سروکار خواهیم داشت. در این صورت به‌منظور مواجهه با عدم قطعیت داده‌ها و توصیف مناسب پارامترها در مساله حمل ونقل نیازمند رویکردهای جدیدی خواهیم بود. یکی از رویکردها استفاده از نظریه سیستم‌های خاکستری و پارامترهای خاکستری در مدل‌سازی این‌گونه مسایل است. بر این اساس، در این مقاله رویکرد جدیدی برای حل مساله حمل‌ونقل خاکستری معرفی‌شده است که بدون نیاز به سفیدسازی پارامترها با رویکردی مبتنی بر مقایسه اعداد خاکستری، جواب را به‌صورت اعداد خاکستری تعیین می‌کند. درنتیجه عدم قطعیت داده‌های ورودی در جواب‌های به‌دست‌آمده به‌خوبی منعکس خواهد شد. برای نشان دادن کارایی روش ارایه‌شده، مثال‌هایی مطرح و با روش پیشنهادی حل‌می‌شوند.

کلمات کلیدی: عدم قطعیت، اعداد خاکستری بازه‌ای، حمل‌ونقل خاکستری، عرضه، تقاضا.

۱ مقدمه

مدل‌های حمل‌ونقل نقش مهمی در تدارکات و مدیریت زنجیره‌تأمین، برای کاهش هزینه و بهبود خدمات دارند [۱]. در اکثر کشورها به دلیل گسترش شبکه حمل‌ونقل، ترافیک سنگین می‌باشد. به دلیل سنگینی ترافیک، محاسبه زمان ازدست‌رفته بسیار سخت می‌باشد؛ بنابراین بررسی مسایل حمل‌ونقل به جامعه و اقتصاد کمک خواهد کرد [۲]. در بازار بسیار رقابتی امروز، فشار بر سازمان‌ها برای یافتن راه‌های بهتری برای ایجاد انگیزه در مشتریان

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: d_darvishi@pnu.ac.ir

قوی‌تر می‌شود. آن‌ها با روشی مقرون‌به‌صرفه می‌خواهند، بهترین شیوه‌ها را انتخاب کنند. مدل‌های حمل‌ونقل چهارچوبی قدرتمند را برای رفع این چالش فراهم می‌کنند، به‌طوری‌که از حرکت کارآمد و در دسترس بودن به‌موقع مواد اولیه و کالاهای نهایی اطمینان حاصل می‌کنند [۱]. در یک مساله معمولی، محصول از یک مبدأ باعرضه مشخص به یک مقصد با تقاضای مشخص منتقل می‌شود. ضرایب c_{ij} در توابع هدف می‌توانند هزینه حمل‌ونقل، زمان تحویل، تعداد کالای حمل‌شده، عرضه و تقاضای تحقق‌نیافته و سایر موارد را با انتقال یک واحد محصول از منابع i به مقصد j نشان دهند [۳]. مساله حمل‌ونقل نوع خاصی از مساله برنامه‌ریزی خطی است که به حمل‌ونقل کالاها از مبادی به مقاصد می‌پردازد [۴]. مطالعه مساله‌ی اصلی حمل‌ونقل در ابتدا توسط کانترویچ [۵] آغاز شد و بعداً توسط هیچکاک [۶] الگوریتمی برای به دست آوردن جواب مساله حمل‌ونقل ارایه گردید. مساله حمل‌ونقل در شکل استاندارد و معمول خود درصدد حداقل کردن کل هزینه حمل کالا از مبدأها به مقصدها می‌باشد [۷]. مدل‌های حمل‌ونقل کاربردهای گسترده‌ای در لجستیک و زنجیره‌تأمین برای کاهش هزینه دارند. در بسیاری از موقعیت‌های واقعی زندگی، کالاها با توجه به منبع آن‌ها و ترکیب نهایی کالاهایی که به مقصد می‌رسند ممکن است ازنظر برخی خصوصیات متفاوت باشند؛ بنابراین لازم است که مشخصات شناخته‌شده‌ای داشته باشد [۴]. در روش برنامه‌ریزی متداول، لازم است که پارامترها به‌عنوان مقادیر دقیق شناخته شوند؛ اما در شرایط عملی، پارامترها به‌ندرت دقیقاً شناخته‌شده‌اند و باید تخمین زده شوند [۳]. بیشتر مدل‌های ایجادشده برای حل مساله حمل‌ونقل با این فرض استوار است که میزان عرضه، تقاضا و هزینه هر واحد دقیقاً شناخته‌شده است؛ اما در کاربردهای دنیای واقعی، عرضه، تقاضا و هزینه برای هر واحد، معمولاً دقیقاً مشخص نشده است؛ یعنی پارامترها در طبیعت نادقیق هستند [۱]. در تئوری تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت یک شاخه حیاتی است و رویکردهای مختلفی برای مقابله با آن وجود دارد [۸]. برای مقابله با عدم قطعیت‌ها، روش‌های مختلفی ازجمله اعداد بازه‌ای، فازی، راف و تصادفی توسعه داده‌شده‌اند. روش‌های احتمالی و فازی اغلب برای توصیف عناصر نامشخص و بهبود عدم قطعیت موجود در متغیر تصمیم به کار می‌روند. آنی کریستی و کالپانا [۹] روش‌هایی برای حل مسایل حمل‌ونقل فازی چندهدفه با استفاده از توابع عضویت غیرخطی ارایه نمودند. یولا و جاها [۱۰] روشی را برای حل مساله حمل‌ونقل چندهدفه پیشنهاد داده‌اند که در آن از تکنیک برنامه‌ریزی فازی با عملکرد عضویت خطی فازی با هزینه‌های متفاوت استفاده‌شده است. بسیاری از محققان [۱۱–۱۸] روش‌های مختلفی را برای حل مساله حمل‌ونقل در شرایط عدم قطعیت ارایه داده‌اند. الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسایل حمل‌ونقل با فرض غیردقیق بودن ضرایب تابع هدف، میزان عرضه و تقاضا ارایه‌شده است [۷]. برای مقابله با چنین موقعیت‌هایی، دنگ [۱۹] مفهوم نظریه سیستم‌های خاکستری را معرفی کرد.

نظریه سیستم‌های خاکستری روش دیگری برای مقابله با مسایل تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت ارایه کرد [۸]. جیگ ناشا و جایش [۲۰] جوابی برای مساله‌ی حمل‌ونقل بازه‌ای چندهدفه بر اساس نظریه تصمیم‌گیری در وضعیت خاکستری ارایه دادند. نظریه سیستم‌های خاکستری به مطالعه سیستم‌های غیردقیق با اطلاعات کم و ناشناخته می‌پردازد [۲۱]. با ترکیب نظریه سیستم‌های خاکستری با روش اصلی مساله حمل‌ونقل، مساله حمل‌ونقل خاکستری بر اساس نظریه سیستم‌های خاکستری برقرار می‌شود. در شرایط ویژه، مانند حمل مواد اورژانسی در

هنگام وقوع بلایای طبیعی یا حمل تجهیزات نظامی در زمان جنگ، مسافت پیموده‌شده دیگر قطعی نیست زیرا شبکه حمل‌ونقل موجود ممکن است از بین برود. در این شرایط، ظرفیت حمل‌ونقل اغلب بسیار ضعیف می‌شود و درنتیجه بهینه‌سازی مسایل حمل‌ونقل اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. مسایل حمل‌ونقل فوق را مسایل حمل‌ونقل خاکستری می‌نامیم [۲]. حمل‌ونقل خاکستری برای پارامترهای خود به اطلاعات توزیع نیاز ندارد، زیرا اعداد خاکستری برای ورودی‌های غیردقیق مناسب هستند [۲۲]. برخی از مطالعات قبلی روش حل مسایل حمل‌ونقل با پارامترهای عرضه و تقاضای دقیق را ارایه کرده‌اند؛ بنابراین بسیاری از محققان مسایل حمل‌ونقل را در محیط‌های مختلف مانند محیط‌های دقیق، فازی، تصادفی، راف و غیره موردبررسی قرار داده‌اند ولی بندرت مساله حمل‌ونقل را در محیط خاکستری بررسی کرده‌اند. همان‌طور که گفته شد، گاهی اوقات ارزش پارامترهای حمل‌ونقل به شکل احتمال بین کران بالا و پایین، قابل بیان است. این امر به ما انگیزه می‌دهد که تمام پارامترهای مساله حمل‌ونقل را به‌صورت اعداد خاکستری بازه‌ای ارایه دهیم. به‌طورکلی، روش‌های موجود برای حل مساله حمل‌ونقل خاکستری، بر اساس سفیدسازی پارامترهای خاکستری و تبدیل مساله به یک مساله حمل‌ونقل معادل با پارامترهای دقیق می‌باشد که تنها می‌توانند جواب‌های دقیق را برای مساله حمل‌ونقل خاکستری ارایه دهند.

لذا در این مطالعه، با توجه به مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری جهت مواجهه با عدم قطعیت موجود در استفاده از مساله حمل‌ونقل در دنیای واقعی، ما یک رویکرد مستقیم جدید برای حل مساله حمل‌ونقل خاکستری معرفی می‌کنیم که بدون نیاز به سفیدسازی پارامترهای خاکستری و با استفاده از روش مقایسه اعداد خاکستری با یک شیوه جدید، جواب مساله حمل‌ونقل را به‌صورت اعداد خاکستری تعیین می‌کند درنتیجه باعث می‌شود تا عدم اطمینان در داده‌های ورودی را در نتایج به‌دست‌آمده بازتاب دهد. کاربرد روش پیشنهادی به کمک نمونه‌های عددی نشان داده‌شده است.

مقاله حاضر در ۶ بخش ارایه‌شده است. پس از بیان مقدمه، ابتدا در بخش ۲ دانش‌پایه درباره نظریه سیستم خاکستری و اعداد خاکستری بازه‌ای که در بخش‌های بعدی موردنیاز هستند، بیان می‌شود. فرمول مدل‌های حمل‌ونقل با پارامترهای خاکستری در بخش ۳ ارایه‌شده است. الگوریتم پیشنهادی جدید برای حل مساله حمل‌ونقل خاکستری در بخش ۴ ارایه‌شده است. در بخش ۵، برای بیان کارآمدی و تفهیم روش پیشنهادی نمونه‌های عددی مطرح و حل می‌کنیم. سرانجام، بخش ۶ شامل نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهاد می‌باشد.

۲ نظریه سیستم‌های خاکستری

به دلیل پیچیدگی‌ها و نقصان اطلاعات، طی دهه‌های اخیر، طراحی روش‌هایی برای شناخت، مدل‌سازی و مدیریت عدم دقت موجود در رفتار سیستم‌ها به یکی از موضوعات علمی جذاب تبدیل‌شده و نظریه‌ها و روش‌های متنوعی برای مطالعه سیستم‌های غیرقطعی توسعه داده‌شده است. در طول نیمه دوم قرن بیستم، در حوزه سیستم‌ها شاهد ظهور بی‌وقفه نظریه‌ها و روش‌های مختلف به‌منظور شناخت و مدیریت عدم اطمینان موجود در اطلاعات بوده‌ایم. ازجمله، نظریه ریاضیات فازی، نظریه مجموعه‌های راف و ... که بخشی از تلاش‌های صورت گرفته در مطالعه سیستم‌های نادقیق در این دوره به‌حساب می‌آیند. در کنار روش‌های فوق، نظریه سیستم‌های

خاکستری یکی از مهم‌ترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می‌شود. این نظریه، روشی جدید برای مطالعه مسایلی است که به دلیل داده‌های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند. سیستم خاکستری به‌عنوان سیستمی تعریف‌شده است که شامل اطلاعات غیرقطعی است. اگر اطلاعات واضح یک سیستم با رنگ سفید نشان داده‌شده باشند و اطلاعات ناشناخته به‌صورت سیاه نمایش داده‌شده باشند، آنگاه اطلاعات مربوط به طبیعی‌ترین سیستم‌ها، سفید (کاملاً شناخته‌شده) یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیست بلکه ترکیبی از هر دو به معنای خاکستری می‌باشند. ما به تعاریف زیر از عملگرهای اساسی ریاضی و رابطه ترتیبی جزیی اعداد خاکستری بازه‌ای که در مطالعات [۲۳- ۲۵] معرفی‌شده نیاز داریم. نظریه سیستم خاکستری پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است [۲۶-۳۴]. در این بخش، به‌طور مختصر در مورد برخی از تعاریف و مفاهیم موردنیاز برای مطالعه و تحلیل سیستم خاکستری، بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱: عدد خاکستری عددی است که مقدار دقیق آن مشخص نیست. یک عدد خاکستری بازه‌ای می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. این ممکن است یک عدد گسسته در مجموعه‌ای از اعداد یا هر عدد از یک بازه باشد.

به‌عبارت‌دیگر، عدد خاکستری بازه‌ای عددی است که کران بالا و پایین آن مشخص است؛ اما مکان آن بین کران بالا و پایین نامشخص است.

$$\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}] = \{\underline{x} \le t \le \overline{x}\} \qquad , \qquad \underline{x} < \overline{x} \tag{۱}$$

که در آن $\otimes x$ عدد خاکستری، t اطلاعات، $\underline{x}$ و $\overline{x}$ کران پایین و کران بالای اطلاعات می‌باشد [۸].

تعریف ۲: مرکز عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ را با نماد $\otimes\hat{x}$ و عرض (شعاع) آن را با نماد $\otimes x'$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\otimes\hat{x} = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{۲} \qquad , \qquad \otimes x' = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{۲} \tag{۲}$$

تذکر ۱: برای هر عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\overline{x} = \otimes\hat{x} + \otimes x' \qquad , \qquad \underline{x} = \otimes\hat{x} - \otimes x' \tag{۳}$$

تذکر ۲: برای هر عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]$ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}] = \langle \otimes\hat{x}, \otimes x' \rangle \tag{۴}$$

لم ۱: فرض کنید که $\otimes x \in [\underline{x}, \overline{x}]\ ,\ \underline{x} < \overline{x}$ یک عدد خاکستری بازه‌ای و $k \in R - \{۰\}$ باشد، آنگاه ضرب اسکالر k در عدد خاکستری $\otimes x$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$k.(\otimes x) = \otimes(kx) \in [k\underline{x}, k\overline{x}] \quad if \quad k > ۰ \tag{۵}$$

$$k.(\otimes x) = \otimes(kx) \in [k\overline{x}, k\underline{x}] \quad if \quad k < ۰ \tag{۶}$$

تعریف ۳: فرض کنید $\otimes x_۱ \in [\underline{x}_۱, \overline{x}_۱]$ و $\otimes x_۲ \in [\underline{x}_۲, \overline{x}_۲]$ دو عدد خاکستری باشند. می‌توان مفاهیم مربوط به روابط بین اعداد خاکستری را برای اعداد خاکستری بازه‌ای به‌صورت زیر بیان نمود [۳۵]:

$$\otimes x_1 + \otimes x_2 = \left[\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \overline{x}_1 + \overline{x}_2\right] \tag{۷}$$

$$\otimes x_1 - \otimes x_2 = \otimes x_1 + \left(-\otimes x_2\right) = \left[\underline{x}_1 - \overline{x}_2, \overline{x}_1 - \underline{x}_2\right] \tag{۸}$$

$$\otimes x_1 \times \otimes x_2 = \left[\min\left\{\underline{x}_1\underline{x}_2, \overline{x}_1\overline{x}_2, \overline{x}_1\underline{x}_2, \underline{x}_1\overline{x}_2\right\}, \max\left\{\underline{x}_1\underline{x}_2, \overline{x}_1\overline{x}_2, \overline{x}_1\underline{x}_2, \underline{x}_1\overline{x}_2\right\}\right] \tag{۹}$$

$$\frac{\otimes x_1}{\otimes x_2} = \otimes x_1 \times \otimes x_2^{-1} = \left[\min\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\overline{x}_2}, \frac{\overline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_2}\right\}, \max\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\underline{x}_1}{\overline{x}_2}, \frac{\overline{x}_1}{\underline{x}_2}, \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_2}\right\}\right] \quad 0 \notin \left[\underline{x}_2, \overline{x}_2\right] \tag{۱۰}$$

قضیه ۱: هر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی می‌تواند به‌صورت مجموع دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی کوچک‌تر یا مساوی خودش نوشته شود. به‌عبارت‌دیگر؛

$$\forall\ \otimes x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right],\ \otimes\hat{x} \geq 0,\ \exists \otimes y \in [\underline{y}, \overline{y}],\ \otimes\hat{y} \geq 0,\ \otimes z \in \left[\underline{z}, \overline{z}\right],\ \otimes\hat{z} \geq 0$$

به‌طوری که

$$\left[\underline{x}, \overline{x}\right] = [\underline{y}, \overline{y}] + \left[\underline{z}, \overline{z}\right].$$

اثبات: اگر عدد خاکستری $\otimes y$ یا عدد خاکستری $\otimes z$مساوی عدد خاکستری $\otimes x$ باشند حکم بدیهی است. فرض کنید $\otimes y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right] \leq \otimes x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$ باشد. در این صورت داریم؛

$$0 \leq \otimes\hat{y} \leq \otimes\hat{x} \Rightarrow \otimes\hat{x} = \otimes\hat{y} + c\ ,\ 0 \leq c \in R$$

بنابراین عدد حقیقی c مرکز عدد خاکستری $\left[c-\varepsilon, c+\varepsilon\right]$ بوده و روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\left[\underline{x}, \overline{x}\right] = \left[\underline{y}, \overline{y}\right] + \left[c-\varepsilon, c+\varepsilon\right]$$

که در آن؛

$$\left[\underline{z}, \overline{z}\right] = \left[c-\varepsilon, c+\varepsilon\right] \blacksquare.$$

۲-۱ رتبه‌بندی اعداد خاکستری

با توسعه نظریه سیستم‌های خاکستری در زمینه‌های مختلف علمی و لزوم مقایسه اعداد خاکستری در زمینه‌های مختلف، رتبه‌بندی اعداد خاکستری، نقش بسیار مهمی در تصمیم‌گیری و کاربردهای نظریه سیستم‌های خاکستری ایفا می‌کند.

هو و وانگ با بررسی نواقص روش‌های مقایسه اعداد بازه‌ای یک رابطه ترتیب جدیدی به‌صورت زیر پیشنهاد کردند [۳۶].

تعریف ٤: فرض کنید $\otimes x = \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$ و $\otimes y = [\underline{y}, \overline{y}]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای، با مراکز $\otimes\hat{x}$ و $\otimes\hat{y}$ و عرض‌های $\otimes x'$ و $\otimes y'$ باشند. در این صورت رابطه ترتیب بر اساس روش پیشنهادی هو و وانگ به‌صورت زیر خواهد بود:

$\otimes x \leq_G \otimes y$ اگر و تنها اگر

۱) $\otimes\hat{x} < \otimes\hat{y}$ وقتی‌که $\otimes\hat{x} \neq \otimes\hat{y}$.

۲) $\otimes x' \geq \otimes y'$ وقتی‌که $\otimes\hat{x} = \otimes\hat{y}$.

همچنین $\otimes x <_G \otimes y$ اگر و تنها اگر $\otimes x \leq_G \otimes y$ و $\otimes x \neq_G \otimes y$.

مرکز و عرض اعداد خاکستری بازه‌ای به ترتیب مقدار مورد انتظار و عدم قطعیت پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. لذا وقتی مرکزهای اعداد خاکستری بازه‌ای باهم برابر باشند برای مقایسه آن‌ها از عرض‌های اعداد خاکستری بازه‌ای استفاده می‌شود.

درویشی و همکاران [۲۸] در مقایسه اعداد خاکستری به جزییات بیشتری پرداخته‌اند.

۳ مسایل حمل‌ونقل خاکستری

برای ساختن یک مدل واقعی، به‌منظور کاهش هزینه‌های اطلاعات، استفاده از مسایل حمل‌ونقل با پارامتر غیرقطعی مناسب‌تر است. عدم دقت موجود در پارامترها بدان معنی است که اطلاعات مربوط به این پارامترها کامل نیست. بااین‌حال، حتی با اطلاعات ناقص، مدل مورداستفاده به‌طورمعمول قادر به ارایه یک مقدار خاکستری برای پارامترها است؛ بنابراین، استفاده از مسایل حمل‌ونقل خاکستری برای مدل‌سازی و حل مسایل دنیای واقعی مناسب‌تر است [۱]. مساله حمل‌ونقل خاکستری تعمیم مساله حمل‌ونقل معمولی می‌باشد که در آن داده‌های ورودی به‌جای مقادیر ثابت به‌عنوان عدد خاکستری بازه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. این مساله زمانی رخ می‌دهد که عدم قطعیت در داده‌های مساله وجود داشته و بیان آن‌ها به‌صورت اعداد خاکستری بازه‌ای برای تصمیم‌گیرندگان راحت‌تر است. مساله حمل‌ونقل خاکستری در حالت کلی در جدول ۱ نمایش داده‌شده است [۴].

جدول ۱. ماتریس حمل‌ونقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	…	j	…	n	عرضه
۱	$\otimes c_{۱۱}$	$\otimes c_{۱۲}$	…	$\otimes c_{۱j}$	…	$\otimes c_{۱n}$	$\otimes a_{۱}$
۲	$\otimes c_{۲۱}$	$\otimes c_{۲۲}$	…	$\otimes c_{۲j}$	…	$\otimes c_{۲n}$	$\otimes a_{۲}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\otimes c_{i۱}$	$\otimes c_{i۲}$	…	$\otimes c_{ij}$	…	$\otimes c_{in}$	$\otimes a_{i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\otimes c_{n۱}$	$\otimes c_{n۲}$	…	$\otimes c_{nj}$	…	$\otimes c_{nn}$	$\otimes a_{m}$
تقاضا	$\otimes b_{۱}$	$\otimes b_{۲}$	…	$\otimes b_{j}$	…	$\otimes b_{n}$	

مدل ریاضی مساله حمل‌ونقل خاکستری به شرح زیر ارایه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \otimes Z =_G \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \\
&s.t. \quad \sum_{j=۱}^{n} \otimes x_{ij} =_G \otimes a_i , \quad i = ۱,۲,....,m \\
&\qquad \sum_{i=۱}^{m} \otimes x_{ij} =_G \otimes b_j , \quad j = ۱,۲,....,n \\
&\qquad \otimes x_{ij} \geq_G \otimes ۰, \quad i = ۱,۲,...., m \ , \ j = ۱,۲,...., n
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

به‌طوری‌که $\otimes c_{ij}$، $\otimes a_i$ و $\otimes b_j$ برای هر i و j، اعداد خاکستری بازه‌ای هستند.

در اینجا فرض بر این است که $\otimes Z$ مینیمم مقدار تابع هدف بوده، $\otimes c_{ij}$ها برای هر $i = ۱,۲,...,m$ و $j = ۱,۲,...,n$ ضرایب هزینه تابع هدف، $\otimes a_i$ برای هر $i = ۱,۲,...,m$ میزان عرضه مبدأ iام و $\otimes b_j$ برای هر $j = ۱,۲,...,n$ میزان تقاضای مقصد j می‌باشد. همچنین داریم:

$\otimes c_{ij} >_G \otimes ۰$ و $\otimes b_j >_G \otimes ۰$ ،$\otimes a_i >_G \otimes ۰$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
&Min\ \otimes Z =_G \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}\otimes\left[\underline{c}_{ij},\bar{c}_{ij}\right]\times\otimes\left[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}\right]\\
&s.t.\quad \sum_{j=۱}^{n}\otimes\left[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}\right]=_G\otimes\left[\underline{a}_i,\bar{a}_i\right],\quad i=۱,۲,....,m\\
&\qquad \sum_{i=۱}^{m}\otimes\left[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}\right]=_G\otimes\left[\underline{b}_j,\bar{b}_j\right],\quad j=۱,۲,....,n\\
&\qquad \underline{x}_{ij}\geq ۰\ ,\ \bar{x}_{ij}\geq ۰,\quad i=۱,۲,....,m\ ;\ j=۱,۲,....,n
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن، $\underline{c}_{ij}$، $\bar{c}_{ij}$، $\underline{a}_i$، $\bar{a}_i$، $\underline{b}_j$ و $\bar{b}_j$ برای هر i, j اعداد حقیقی مثبت می‌باشند.

تعریف۵: بازه $[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}]$ برای هر $i = ۱,۲,....,m$ و $j = ۱,۲,....,n$ جواب موجه مساله حمل‌ونقل خاکستری نامیده می‌شود هرگاه در معادلات (۱۲) صدق کند.

تعریف۶: جواب موجه $[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}]$برای هر $i = ۱,۲,....,m$ و $j = ۱,۲,....,n$، یک جواب بهینه برای مساله حمل‌ونقل خاکستری خواهد بود هرگاه برای هر جواب موجه دیگری مانند $[\underline{y}_{ij},\bar{y}_{ij}]$ برای هر $i = ۱,۲,....,m$ و $j = ۱,۲,....,n$ رابطه زیر را داشته باشیم؛

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_{ij},\bar{c}_{ij}\right]\times\left[\underline{x}_{ij},\bar{x}_{ij}\right]\leq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{c}_{ij},\bar{c}_{ij}\right]\times\left[\underline{y}_{ij},\bar{y}_{ij}\right]$$

تعریف۷: هر جواب موجه مساله حمل‌ونقل خاکستری با m منبع و n مقصد یک جواب موجه اساسی خاکستری نامیده می‌شود هرگاه به تعداد $m+n-۱$ تخصیص مثبت برای $\otimes x_{ij}$ داشته باشیم. اگر تعداد تخصیص‌ها در جواب اساسی خاکستری کمتر از $m+n-۱$ باشد جواب موجه اساسی خاکستری تبهگن نامیده می‌شود.

تعریف ۸: یک جواب موجه خاکستری، جواب بهینه خاکستری نامیده می‌شود هرگاه مجموع هزینه‌های مساله حمل‌ونقل خاکستری را مینیمم کند.

- **الگوریتم پیشنهادی**

مساله حمل‌ونقل خاکستری مدل (۱۱) را با مقادیر عرضه و تقاضای برابر در نظر بگیرید.

مرحله ۱: مرکزهای هزینه‌های خاکستری، عرضه‌های خاکستری و تقاضاهای خاکستری را محاسبه کنید.

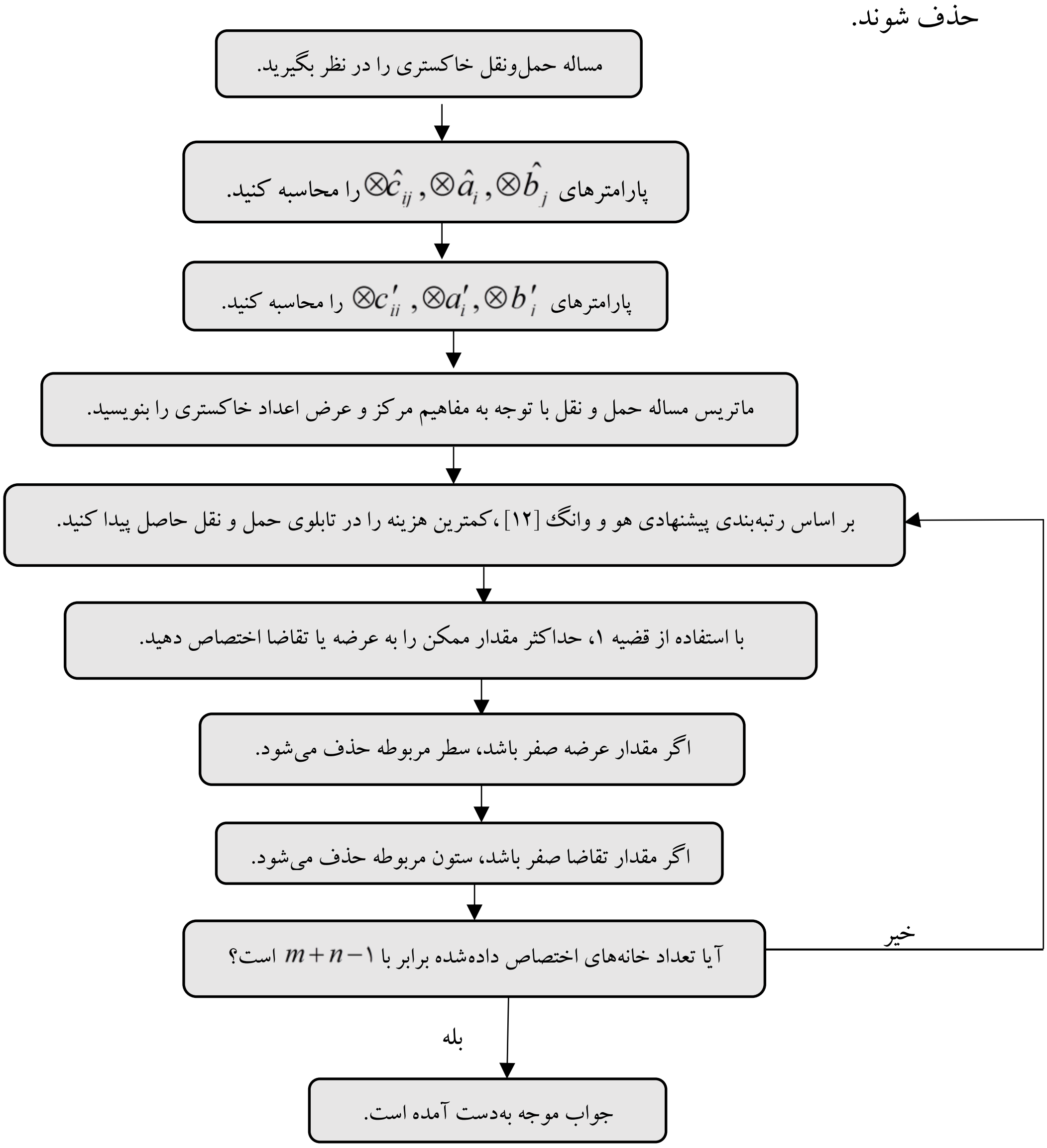
مرحله ۲: عرض‌های هزینه‌های خاکستری، عرضه‌های خاکستری و تقاضاهای خاکستری را محاسبه کنید.

مرحله ۳: ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر با مساله (۱۱) را که توسط عرض و مرکز مشخص می‌شود را بنویسید.

مرحله ٤: مکان کم‌ترین ضرایب هزینه را در تابلو حمل‌ونقل حاصل بر اساس رویکرد رتبه‌بندی اعداد خاکستری هو و وانگ [۳۶] پیدا کنید. مکان متناظر در جدول حمل‌ونقل خاکستری کم‌ترین هزینه را خواهد داشت. اگر بیش از یک مکان چنین ویژگی وجود دارد، یکی را به‌دلخواه انتخاب کنید و حداکثر مقدار ممکن را به آن اختصاص دهید و سپس براساس قضیه۱، پس از کسر هزینه اختصاص‌یافته از سطر و ستون، مقدار عرضه و تقاضا باقی‌مانده را بنویسید.

مرحله ٥: اگر مقدار عرضه صفر شد، ردیف مربوطه و اگر مقدار تقاضا صفر شد، ستون مربوطه حذف می‌شود.

مرحله ٦: مراحل ۴ و ۵ را تکرار کنید تا تمام مقادیر عرضه و تقاضا اختصاص داده‌شده و تمام سطرها و ستون‌ها حذف شوند.



شکل ۱. نمودار فرآیند الگوریتم پیشنهادی

٤ مثال عددی

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده و به‌منظور روشن ساختن بحث‌های صورت گرفته به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱: یک شرکت حمل‌ونقل می‌خواهد نیازهای اساسی مردم در چهار شهر را که در سیل گرفتارشده‌اند، از سه شهر هم‌جوار تأمین کند. با توجه به شرایط بحرانی پیش‌آمده امکان تعیین دقیق هزینه حمل‌ونقل برای هر واحد کالا، میزان عرضه و تقاضای کالاهای موردنیاز برای هر شهر وجود ندارد؛ اما با توجه به خسارت سیل و پیش‌بینی‌های انجام‌شده، جدول حمل‌ونقل ۲ بر اساس اعداد خاکستری ارایه‌شده است. مساله را طوری حل کنید که ضمن رفع نیاز شهرها، هزینه حمل‌ونقل به حداقل برسد.

جدول۲. ماتریس مساله حمل‌ونقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	۳	۴	عرضه
۱	⊗[۱,۲]	⊗[۱,۳]	⊗[۵,۹]	⊗[۴,۸]	⊗[۷,۹]
۲	⊗[۱,۲]	⊗[۷,۱۰]	⊗[۲,۶]	⊗[۳,۵]	⊗[۱۷,۲۱]
۳	⊗[۷,۹]	⊗[۷,۱۱]	⊗[۳,۵]	⊗[۵,۷]	⊗[۱۶,۱۸]
تقاضا	⊗[۱۰,۱۲]	⊗[۲,۴]	⊗[۱۳,۱۵]	⊗[۱۵,۱۷]	⊗[۴۰,۴۸]

مساله را به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
Min\ \otimes Z =_G\ & \otimes[۱,۲]\times\otimes x_{۱۱}+\otimes[۱,۳]\times\otimes x_{۱۲}+\otimes[۵,۹]\times\otimes x_{۱۳}+\otimes[۴,۸]\times\otimes x_{۱۴}\\
&+\otimes[۱,۲]\times\otimes x_{۲۱}+\otimes[۷,۱۰]\times\otimes x_{۲۲}+\otimes[۲,۶]\times\otimes x_{۲۳}+\otimes[۳,۵]\times\otimes x_{۲۴}\\
&+\otimes[۷,۹]\times\otimes x_{۳۱}+\otimes[۷,۱۱]\times\otimes x_{۳۲}+\otimes[۳,۵]\times\otimes x_{۳۳}+\otimes[۵,۷]\times\otimes x_{۳۴}\\
s.t.\qquad & \sum_{j=1}^{۴}\otimes x_{۱j} =_G \otimes[۷,۹]\\
& \sum_{j=۱}^{۴}\otimes x_{۲j} =_G \otimes[۱۷,۲۱]\\
& \sum_{j=1}^{۴}\otimes x_{۳j} =_G \otimes[۱۶,۱۸]\\
& \sum_{i=۱}^{۳}\otimes x_{i۱} =_G \otimes[۱۰,۱۲]\\
& \sum_{i=۱}^{۳}\otimes x_{i۲} =_G \otimes[۲,۴]\\
& \sum_{i=۱}^{۳}\otimes x_{i۳} =_G \otimes[۱۳,۱۵]\\
& \sum_{i=۱}^{۳}\otimes x_{i۴} =_G \otimes[۱۵,۱۷]\\
& \otimes x_{ij} \geq_G \otimes 0,\quad i=۱,۲,۳;\ j=۱,۲,۳,۴
\end{aligned}
$$

اکنون ماتریس مساله حمل‌ونقل را با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۳ در نظر می‌گیریم.

جدول۳. ماتریس مساله حمل‌ونقل با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد / مبادی	۱	۲	۳	۴	عرضه
۱	⟨۱/۵,۰/۵⟩	⟨۲,۱⟩	⟨۷,۲⟩	⟨۶,۲⟩	⟨۸,۱⟩
۲	⟨۱/۵,۰/۵⟩	⟨۸/۵,۱/۵⟩	⟨۴,۲⟩	⟨۴,۱⟩	⟨۱۹,۲⟩
۳	⟨۸,۱⟩	⟨۹,۲⟩	⟨۴,۱⟩	⟨۶,۱⟩	⟨۱۷,۱⟩
تقاضا	⟨۱۱,۱⟩	⟨۳,۱⟩	⟨۱۴,۱⟩	⟨۱۶,۱⟩	⟨۴۴,۴⟩

تخصیص اول: بر اساس رتبه‌بندی پیشنهادی هو و وانگ کم‌ترین هزینه در سطر اول و ستون اول جدول ۳ قرار دارد؛ بنابراین کم‌ترین هزینه خاکستری در سطر اول و ستون اول جدول ۲ خواهد بود. لذا اولین تخصیص برای سطر اول و ستون اول جدول ۲ با مقایسه مقادیر عرضه سطر اول و تقاضای ستون اول برابر $\otimes x_{۱۱} = \otimes[۷,۹]$ خواهد بود. بعدازاین تخصیص چون مقدار عرضه سطر اول برابر صفر شده، آن را از جدول ۲ حذف می‌کنیم. حال با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نوشت، $\otimes[۱۰,۱۲] = \otimes[۷,۹] + \otimes[۳,۳]$. درنتیجه مقدار تقاضای باقیمانده ستون اول برابر با $\otimes[۳,۳]$ خواهد بود. پس از اولین تخصیص ماتریس حمل‌ونقل خاکستری، به فرم زیر درمی‌آید:

جدول ٤. ماتریس مساله حمل‌ونقل خاکستری بعد از اولین تخصیص

مقاصد / مبادی	۱	۲	۳	۴	عرضه
۲	⊗[۱,۲]	⊗[۷,۱۰]	⊗[۲,۶]	⊗[۳,۵]	⊗[۱۷,۲۱]
۳	⊗[۷,۹]	⊗[۷,۱۱]	⊗[۳,۵]	⊗[۵,۷]	⊗[۱۶,۱۸]
تقاضا	⊗[۳,۳]	⊗[۲,۴]	⊗[۱۳,۱۵]	⊗[۱۵,۱۷]	⊗[۳۳,۳۹]

ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر جدول ۴ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ٥. ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر جدول ۴ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد / مبادی	۱	۲	۳	۴	عرضه
۲	⟨۱/۵,۰/۵⟩	⟨۸/۵,۱/۵⟩	⟨۴,۲⟩	⟨۴,۱⟩	⟨۱۹,۲⟩
۳	⟨۸,۱⟩	⟨۹,۲⟩	⟨۴,۱⟩	⟨۶,۱⟩	⟨۱۷,۱⟩
تقاضا	⟨۳,۰⟩	⟨۳,۱⟩	⟨۱۴,۱⟩	⟨۱۶,۱⟩	⟨۳۶,۳⟩

تخصیص دوم: بر اساس رتبه‌بندی پیشنهادی هو و وانگ کم‌ترین هزینه در سطر دوم و ستون اول جدول ۵ قرار دارد؛ بنابراین کم‌ترین هزینه خاکستری در سطر دوم و ستون اول جدول ۴ خواهد بود. لذا دومین تخصیص برای

سطر اول و ستون اول جدول ۴ با مقایسه مقادیر عرضه سطر دوم و تقاضای ستون اول برابر $\otimes x_{۲۱} = \otimes[۳,۳]$ خواهد بود. بعدازاین تخصیص چون مقدار تقاضای ستون اول برابر صفر شده، آن را از جدول ۴ حذف می‌کنیم.
حال با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نوشت: $\otimes[۱۷,۲۱] = \otimes[۳,۳] + \otimes[۱۴,۱۸]$
درنتیجه مقدار عرضه باقیمانده سطر دوم برابر با $\otimes[۱۴,۱۸]$ خواهد بود. پس از دومین تخصیص ماتریس حمل‌ونقل خاکستری، به فرم زیر درمی‌آید:

جدول٦. ماتریس مساله حمل‌ونقل خاکستری بعد از دومین تخصیص

مقاصد / مبادی	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\otimes[۷,۱۰]$	$\otimes[۲,۶]$	$\otimes[۳,۵]$	$\otimes[۱۴,۱۸]$
۳	$\otimes[۷,۱۱]$	$\otimes[۳,۵]$	$\otimes[۵,۷]$	$\otimes[۱۶,۱۸]$
تقاضا	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۱۳,۱۵]$	$\otimes[۱۵,۱۷]$	$\otimes[۳۰,۳۶]$

ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر جدول ۶ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۷ آورده شده است.

جدول۷. ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر جدول ۶ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد / مبادی	۲	۳	۴	عرضه
۲	$\langle ۸/۵,۱/۵ \rangle$	$\langle ۴,۲ \rangle$	$\langle ۴,۱ \rangle$	$\langle ۱۹,۲ \rangle$
۳	$\langle ۹,۲ \rangle$	$\langle ۴,۱ \rangle$	$\langle ۶,۱ \rangle$	$\langle ۱۷,۱ \rangle$
تقاضا	$\langle ۳,۱ \rangle$	$\langle ۱۴,۱ \rangle$	$\langle ۱۶,۱ \rangle$	$\langle ۳۶,۳ \rangle$

تخصیص سوم: بر اساس رتبه‌بندی پیشنهادی هو و وانگ کم‌ترین هزینه در سطر دوم و ستون سوم جدول ۷ قرار دارد؛ بنابراین کم‌ترین هزینه خاکستری در سطر دوم و ستون سوم جدول ۶ خواهد بود. لذا سومین تخصیص برای سطر دوم و ستون سوم جدول ۶ با مقایسه مقادیر عرضه سطر دوم و تقاضای ستون سوم برابر $\otimes x_{۲۳} = \otimes[۱۳,۱۵]$ خواهد بود. بعداز تخصیص چون مقدار تقاضای ستون سوم برابر صفر شده، آن را از جدول ۶ حذف می‌کنیم.
حال می‌توان نوشت: $\otimes[۱۴,۱۸] = \otimes[۱۳,۱۵] + \otimes[۱,۳]$
درنتیجه مقدار عرضه باقیمانده سطر دوم برابر با $\otimes[۱,۳]$ خواهد بود.
ما این روند را تا زمانی که تمام مقادیر عرضه و تقاضا تخصیص یابد و تمام سطرها و ستون‌ها حذف شود ادامه می‌دهیم؛ بنابراین در پایان این روش به جواب زیر خواهیم رسید.

$$\otimes x_{۱۱} = \otimes[۷,۹]\,,\ \otimes x_{۲۱} = \otimes[۳,۳]\,,\ \otimes x_{۲۳} = \otimes[۱۳,۱۵]\,,\ \otimes x_{۲۴} = \otimes[۱,۳]\,,\ \otimes x_{۳۲} = \otimes[۲,۴]\,,\ \otimes x_{۳۴} = \otimes[۱۴,۱۴]$$

یافته‌های پژوهش نشان می‌دهدکه مجموع مقادیر اختصاص‌یافته در هر سطر برابر با میزان عرضه است. مجموع مقادیر اختصاص داده‌شده در هر ستون برابر با مقدار تقاضای آن است و همچنین تعداد متغیرهای اساسی برابر۶ است؛ بنابراین، جواب به‌دست‌آمده یک جواب موجه برای مساله حمل‌ونقل خاکستری است.

$$\begin{aligned}\otimes Z &= \otimes[۱,۲]\times\otimes[۷,۹]+\otimes[۱,۲]\times\otimes[۳,۳]+\otimes[۲,۶]\times\otimes[۱۳,۱۵]+\otimes[۳,۵]\times\otimes[۱,۳]\\ &+\otimes[۷,۱۱]\times\otimes[۲,۴]+\otimes[۵,۷]\times\otimes[۱۴,۱۴]=_G \otimes[۱۲۳,۲۷۱].\end{aligned}$$

مثال۲: مساله حمل‌ونقل خاکستری نامتوازن زیر را در نظر بگیرید.

جدول ۸. ماتریس مساله حمل‌ونقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	عرضه
۱	$\otimes[۱,۴]$	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۲,۵]$
۲	$\otimes[۳,۵]$	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۳,۵]$
تقاضا	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۳,۶]$	$\otimes[۵,۱۰]$ $\otimes[۳,۷]$

جواب: ابتدا با اضافه کردن یک ستون تقاضای مجازی با هزینه حمل صفر و میزان تقاضای $\otimes[۲,۳]$، مساله حمل‌ونقل خاکستری را متوازن می‌کنیم.

جدول ۹. ماتریس متوازن شده مساله حمل‌ونقل خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	۳	عرضه
۱	$\otimes[۱,۴]$	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۰,۰]$	$\otimes[۲,۵]$
۲	$\otimes[۳,۵]$	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۰,۰]$	$\otimes[۳,۵]$
تقاضا	$\otimes[۲,۴]$	$\otimes[۳,۶]$	$\otimes[۲,۳]$	$\otimes[۵,۱۰]$ $\otimes[۵,۱۰]$

ماتریس مساله حمل‌ونقل با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری در جدول ۱۰ آورده شده است.

جدول ۱۰. ماتریس مساله حمل‌ونقل متناظر جدول ۹ با توجه به مفاهیم مرکز و عرض اعداد خاکستری

مقاصد مبادی	۱	۲	۳	عرضه
۱	$\langle ۲/۵,۱/۵\rangle$	$\langle ۳,۱\rangle$	$\langle ۰,۰\rangle$	$\langle ۳/۵,۱/۵\rangle$
۲	$\langle ۴,۱\rangle$	$\langle ۳,۱\rangle$	$\langle ۰,۰\rangle$	$\langle ۴,۱\rangle$
تقاضا	$\langle ۳,۱\rangle$	$\langle ۴/۵,۱/۵\rangle$	$\langle ۲/۵,۰/۵\rangle$	$\langle ۷/۵,۲/۵\rangle$

با به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی تخصیص‌های زیر را خواهیم داشت.

$$\otimes x_{11} = \otimes[0,2]\ ,\ \otimes x_{13} = \otimes[2,3]\ ,\ \otimes x_{21} = \otimes[1,1]\ ,\ \otimes x_{22} = \otimes[2,4]$$

بنابراین جواب موجه مساله حمل‌ونقل خاکستری به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\otimes Z = \otimes[1,4]\times\otimes[0,2]+\otimes[0,0]\times\otimes[2,3]+\otimes[3,5]\times\otimes[1,1]+\otimes[2,4]\times\otimes[2,4] =_G \otimes[7,29].$$

۵ نتیجه‌گیری

مساله حمل‌ونقل کاربردهای عملی گسترده‌ای در سیستم‌های لجستیک، برنامه‌ریزی نیروی انسانی، تخصیص کارکنان، کنترل موجودی، برنامه‌ریزی تولید و غیره دارد و هدف از آن یافتن بهترین جواب برای تحقق تقاضای n مقصد با استفاده از ظرفیت‌های عرضه m مبدأ می‌باشد. روش‌های کارآمد مختلفی برای حل مسایل حمل‌ونقل با پارامترهای کاملاً دقیق ایجادشده است اما در مسایل زندگی واقعی، این شرایط ممکن است همیشه ارضا نشود. در این مقاله، مساله حمل‌ونقل تحت عدم قطعیت خاکستری به طوری که کلیه پارامترهای حمل‌ونقل به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای بیان شده‌اند مدل‌سازی و حل شده است. از نظریه سیستم های خاکستری برای حل مساله تصمیم‌گیری با پارامترهای نامشخص استفاده می‌کنیم که در آن داده‌های ورودی با یک احتمالی، بین یک کران پایین و یک کران بالا قرار می‌گیرند. برخلاف روش‌های موجود برای حل این گونه مسایل که از سفیدسازی پارامترهای خاکستری استفاده می‌کنند و باعث می‌شوند تا عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی مساله در همان ابتدا نادیده گرفته شوند و عملاً، عدم قطعیتی در خروجی مساله مشاهده نشود، در این مطالعه، با توجه به مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری جهت مواجهه با عدم قطعیت موجود در استفاده از مساله حمل‌ونقل در دنیای واقعی، یک رویکرد جدید را پیشنهاد کرده‌ایم. این روش می‌تواند جواب مساله حمل‌ونقل خاکستری را در حالت متوازن یا نامتوازن به‌طور مستقیم و بدون تبدیل آن به یک مساله معادل کلاسیک، با استفاده از سفیدسازی پارامترهای خاکستری مساله حمل‌ونقل و یک روش جدید مقایسه اعداد خاکستری، به‌صورت اعداد خاکستری تعیین کند. بدین ترتیب عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی بهتر در جواب پایانی بازتاب می‌یابد. این روش از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و به‌کارگیری آن آسان است.

منابع

[1] Kavitha, K. and Pandian, P., (2012). Sensitivity analysis of supply and demand in a fully interval transportation problem. International Journal of Engineering Research and Applications. 2(3), 1900-1910.
[2] Bai, G., Mao, J. and Lu, G., (2004). Grey transportation problem. Kybernetes. 33(2), 219-224.
[3] Roy, S.K. and Mahapatra, D.R., (2011). Multi-objective interval valued transportation probabilistic problem involving log-normal, International Journal of Mathematics and Scientific Computing, 1(2), 14-21.
[4] Pandian, P. and Anuradha, D., (2011). Solving interval transportation problems with additional impurity constraints, Journal of Physical Sciences, 15, 103-112.
[5] Kantorovich, L.V., (1960). Mathematical methods of organizing and planning production, Management Science, 6(4), 366–422.
[6] Hitchcock, F.L., (1941). The distribution of a product from several sources to numerous localities, Journal of Mathematical Physics, 20, 224–230.
[7] Gupta, A. and Kumar, A., (2012). A new method for solving linear multi objective transportation problems with fuzzy parameters, Applied Mathematical Modelling, 36, 1421-1430.

[8] Baidya, A., Bera, U.K. and Maiti, M., (2016). The grey linear programming approach and its application to multi-objective multi-stage solid transportation problem, Opsearch, 53(3), 500–522.
[9] Annie Christi, M.S. and Kalpana, I., (2016). Solutions of multi objective fuzzy transportation problem with non-linear membership functions, International Journal of Engineering Research and Application, 6(11), 52-57.
[10] Yeola, M.C. and Jahav, V.A., (2016). Solving multi-objective transportation problem using fuzzy programming technique parallel method, International Journal of Recent Scientific Research, 7(1), 8455-8457.
[11] Abdul Kalam Azad, S.M., Hossain, B. and Rahaman, M., (2017). An algorithmic approach to solve transportation problem with the average total oppurtunity cost method, International Journal of Scientific and Research Publications, 7(2), 262-270.
[12] Nasseri, H., and Khabiri, B., (2019). A grey transportation problem in fuzzy environment. Journal of Operational Research and Its Applications, 16 (3), 111-122.
[13] Chanas, S. and Kuchta, D., (1996). A concept of solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficient, Fuzzy Sets and Systems, 82, 299-305.
[14] Dutta, D. and Satyanarayana Murthy, A., (2010). Fuzzy transportation problem with additional restrictions, Journal of Engineering and Applied Sciences, 5(2), 36-40.
[15] Kowalski, K., Lev, B., Shen, W. and Tu, Y., (2014). A fast and simple branching algorithm for solving small scale fixed-charge transportation problem. Operations Research Perspectives, 1(1), 1-5.
[16] Pandian, P., Natarajan, G. and Akilbasha, A., (2016). Fully rough integer interval transportation problems, International Journal of Pharmacy and Technology, 8, 13866-13876.
[17] Pandian, P. and Akilbasha, A., (2018). Fuzzy interval integer transportation problems, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 111(9), 133-142.
[18] Sophia Porchelvi, R. and Anitha, M., (2018). On solving multi objective interval transportation problem using fuzzy programming technique, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 118(6), 483-491.
[19] Deng, J.L., (1982). The control problems of grey systems, Systems and Control Letters, 1(5), 288-294.
[20] Jignasha, G.P. and Jayesh M.D., (2017). Solving multi Objective interval transportation problem using grey situation decision-making theory based on grey numbers, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 113(2), 219-233.
[21] Li, Q.X. and Lin, Y., (2014). A briefing to grey systems theory, Journal of Systems Science and Information, 2(2), 178-192.
[22] Wang, S., Xie, Y., Tang, Y., Zang, H. and Wang, Z., (2013). An interval programming based traffic planning model for urban vehicle emissions management, Energy and Power Engineering, 5, 344-349.
[23] Liu, S. F. and Xie, N., (2013). Grey Systems Theory and its Applications, The Science Press of China, Beijing.
[24] Xie, N.M., (2013). On computational algorithms of grey numbers based on information background, Grey Systems: Theory and Application, 3(2), 177-190.
[25] Yang Y. and John R., (2012). Grey system and greyness, Information Sciences, 185, 249-264.
[26] Nasseri, S.H. and Darvishi, D., (2016b). Diet modeling in uncertainty conditions using grey systems approach, Journal of Operational Research and its Applications, 12(4), 29-45.
[27] Darvishi salokolaei, D., (2019). Some duality results in grey linear programming problem, Journal of Operational Research and Its Applications, 16(3), 55-68.
[28] Darvishi, D., Forrest, J. and Liu, S., (2019). A comparative analysis of grey ranking approaches, Grey Systems: Theory and Application, 9(4), 472-487.
[29] Darvishi, D. and Nasseri, S.H., (2018). A dual simplex method for grey linear programming problems based on duality results, Grey Systems: Theory and Application, 30(3), 127-142.
[30] Liu, S., Yang, Y. and Forrest, J., (2017). Grey Data Analysis, Springer, Singapore.
[31] Nasseri, S.H., Yazdani, A.B. and Darvishi, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients, Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 121-142.
[32] Nasseri, S.H., Darvishi, D. and Yazdani, A., (2017). A new approach for solving grey assignment problems, Control and Optimization in Applied Mathematics, 2(1), 15-28.
[33] Nasseri, S.H. and Darvishi, D., (2018). Duality results on grey linear programming problems, The Journal of Grey System, 30(3), 127-142.

[34] Saffar Ardabili, J., Darvishi, D. and PourOfoghi, F., (2020). Application of center and width concepts to solving grey linear programming, International Journal of Applied and Computational Mathematics, 6(49), 1-12.
[35] Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J., (2009). Introduction to Interval Analysis. SIAM Press, Philadelphia.
[36] Hu, B.Q. and Wang, S., (2006). A novel approach in uncertain programming part I: new arithmetic and order relation for interval numbers, Journal of Industrial and Management Optimization, 2(4), 351-371.