مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن،سال نوزدهم، شماره سوم (پیاپی۷۴)، پاییز ۰۱،ص‌ص۲۸-۱۷
شاپا۷۲۸۶-۲۲۵۱

تحلیل مقدار تعادل بازار با رویکرد فازی

فاطمه باباکردی[1]
۱- استادیار، دانشگاه گنبد کاووس، گروه ریاضی و آمار، گنبدکاووس، ایران

رسید مقاله: ۲۳ شهریور ۱۴۰۰
پذیرش مقاله: ۱۴بهمن ۱۴۰۰

چکیده

در این مقاله برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار، مدل‌بندی معادله‌ی دوگان فازی را در نظر می‌گیریم. با تعریف سه دسته جواب برای معادله‌ی دوگان فازی، قیمت فازی متقارن مینیمال، قیمت فازی متقارن ماکسیمال و قیمت فازی نامتقارن را تعیین کرده و از روی آن نقطه‌ی تعادلی فازی بازار و تابع عرضه و تقاضای فازی را محاسبه می‌کنیم و با بیان قضیه‌ای شرایطی را مطرح می‌کنیم که تحت آن معادله‌ی دوگان فازی در نظرگرفته شده برای تعیین قیمت فازی بازار، همواره دارای جواب فازی است. با بحث و بررسی ایرادات روش پیشین برای محاسبه‌ی قیمت فازی بازار نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی اشکالات روش قبلی را ندارد. در پایان مثال‌های عددی کارایی روش پیشنهادی و برتری روش را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادله‌ی خطی دوگان فازی، اعداد فازی، تابع عرضه‌ی فازی، تابع تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادل فازی.

۱ مقدمه

در بازار رقابتی قیمت تعادلی و مقدار تعادلی یک کالا با عرضه و تقاضای بازار برای آن کالا تعیین می‌شود. قیمت تعادلی یک کالا دقیقاً برابر با قیمتی است که مصرف‌کنندگان مقدار کالایی را که حاضرند در یک دوره زمانی خاص بخرند برابر با مقداری است که تولیدکنندگان آن کالا حاضرند عرضه کنند. در قیمت‌های بالاتر کمبود تقاضا اتفاق و باعث مازاد عرضه می‌شود. این اضافه عرضه به قیمت فشار می‌آورد و باعث می‌شود که قیمت دوباره به سطح تعادلی بازگردد. در قیمت‌های پایین‌تر نیز، مقدار تقاضا از مقدار عرضه بیشتر می‌شود و باعث مازاد تقاضا می‌شود. این مازاد تقاضا باعث افزایش قیمت و در نتیجه بازگشت قیمت به اندازه قبل خود (قیمت تعادلی) می‌شود. پس از این‌که قیمت به تعادل رسید، این قیمت میل به استمرار و باقی‌ماندن دارد. مدل عرضه و تقاضا در واقع برای بازار رقابتی تنظیم شده‌است که در آن هیچ‌یک از خریداران و فروشندگان نمی‌توانند اثر زیادی بر روی قیمت بگذارند، و قیمت به صورت یک داده است. در حالی‌که در بازار واقعی در نظر گرفتن قیمت به‌صورت قطعی و ثابت تقریبا غیرممکن است از این رو بایستی مساله را با یک روش پوشش

* فاطمه باباکردی
آدرس الکترونیکی:babakordif@yahoo.com

داده‌های غیرقطعی یعنی نظریه فازی در نظر گرفت. مساله‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی همواره مورد توجه محققین بوده است. در[۱] سیستم اقتصادی با نقشه‌ی اعداد فازی بررسی شد و تعریفی از سیستم اقتصادی فازی ارایه گردید. در[۲] الگوریتمی برای حل مساله‌ی حداکثر نقطه‌ی تعادل سیستم‌های کنترلی فازی، مطالعه شد. لی و همکاران با استفاده از قضیه‌ی نقطه ثابت و ساخت تابع لیاپانوف، شرایط کافی وجود و منحصربفرد بودن و پایداری نمایی نقطه‌ی تعادل برای یک کلاس از شبکه‌های عصبی BAM فازی با تاخیر و تکانه‌های بینهایت در مقیاس‌های زمانی را بررسی کردند[۳].

مدل‌بندی دستگاه و معادله‌ی خطی فازی توصیف خوبی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار می‌باشد. تاکنون پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی دستگاه معادلات خطی فازی صورت گرفته است[۱۱-۴]. در[۱۲] ما و همکاران به حل دستگاه دوگان به فرم $A\tilde{X} = B\tilde{X} + \tilde{Y}$ که در آن A و B ماتریس حقیقی و $\tilde{Y}$ بردار فازی می‌باشد، پرداختند و نشان دادند که در حالت فازی نمی‌توان دستگاه $A\tilde{X} = B\tilde{X} + \tilde{Y}$ را با $(A-B)\tilde{X} = \tilde{Y}$ جایگزین نمود. در سال ۲۰۰۸ عباسبندی و همکاران با تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه قطعی جواب فازی مینیمال، برای حل این دستگاه را بیان کردند[۱۳]. سپس اوتادی روشی برای حل دستگاه دوگان فازی مطرح کرد به‌طوری‌که در شرایط خاص دستگاه دارای جواب فازی است[۱۴].

اخیرا برنامه‌ریزی خطی برای حل دستگاه دوگان کاملا فازی به‌کارگرفته شد [۱۵] و سپس قنبری و همکاران به بیان روش جبری برای حل دستگاه دوگان کاملا فازی پرداختند[۱۶]. در[۱۷] شرایط وجودی نقطه‌ی تعادل فازی برای دستگاه خطی فازی $\tilde{X}(k+1) = \tilde{A}\tilde{X}(k)$ و مفهوم نقطه‌ی تعادلی تعمیم یافته‌ی سیستم خطی فازی مطرح شد. ملیانی و همکاران با بحث روی دستگاه دینامیکی فازی مختلط مفهوم نقطه‌ی تعادل فازی مختلط را معرفی کردند[۱۸].

خبیری و همکاران در [۱۹]، با استفاده از حل دستگاه معادلات خطی فازی، به تعیین مقدار تعادلی بازار پرداختند. در این مقاله بیان می‌کنیم، از آنجایی‌که دستگاه دوگان فازی و دستگاه فازی در حالت کلی با هم معادل نیستند، پس روش خبیری و همکاران دارای نقص است که بایستی اصلاح گردد. لذا روشی برای تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار پیشنهاد می‌کنیم که دارای ایراد فوق نباشد[۲۱-۲۰].

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف پایه‌ای مورد نیاز را مطرح کرده و در بخش ۳ به مرور و بررسی روش خبیری و همکاران می‌پردازیم. در بخش ۴ مدل‌بندی فازی و روشی کاربردی برای تعیین نقطه تعادلی فازی بازار ارایه می‌دهیم. مثال‌های عددی در بخش ۵ آورده شده و نتیجه‌گیری و کارهای آتی در بخش ۶ مطرح شده است.

۲ تعاریف پایه‌ای

تعریف ۲-۱.[۲۳-۲۲] شکل پارامتری یک عدد فازی $\tilde{u}(r)$ یک زوج از توابع $\left(\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right)$است که در آن توابع $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$ برای مقادیر $0 \le r \le 1$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. تابع $\underline{u}(r)$ تابعی غیرکاهشی نیمه‌پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0,1]$ است.
۲. تابع $\overline{u}(r)$ تابعی غیرافزایشی نیمه پیوسته از چپ کراندار روی بازه $[0,1]$ است.
۳. $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r)$، برای مقادیر $0 \le r \le 1$.

در تعریف بالا اگر $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$ توابع خطی باشند، نمایش پارامتری یک عدد فازی مثلثی به‌دست می‌آید و عددفازی $\tilde{u}(r)$ را مثبت گوییم هرگاه بازای هر $0 \le r \le 1$، $\underline{u}(r), \overline{u}(r) \ge 0$ باشد.

تعریف۲-۲. برای دو عدد فازی مثلثی دلخواه $\tilde{x}(r) = (\underline{x}(r), \overline{x}(r))$ و $\tilde{y}(r) = (\underline{y}(r), \overline{y}(r))$ و عدد حقیقی k، جمع، ضرب اسکالر و تفریق به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \overline{x}(r) + \overline{y}(r)), \quad (1)$$

$$k\tilde{x} = (k\underline{x}(r), k\overline{x}(r)), k \ge 0, \quad (2)$$

$$k\tilde{x} = (k\overline{x}(r), k\underline{x}(r)), k < 0, \quad (3)$$

$$\tilde{x} - \tilde{y} = (\underline{x}(r) - \overline{y}(r), \overline{x}(r) - \underline{y}(r)), \quad (4)$$

$$\tilde{x}.\tilde{y} = (\underline{x}(r)\underline{y}(r), \overline{x}(r)\overline{y}(r)),\ \tilde{x}, \tilde{y} \ge 0 \quad (5)$$

۳ روش خیبری و همکاران برای تعیین نقطه تعادلی بازار

خیبری و همکاران در [۱۹]، عرضه و تقاضا فازی را به‌صورت توابعی خطی از قیمت به صورت

$$\begin{cases} q_d = a * p + b \\ q_s = c * p + d \end{cases} \quad (6)$$

که در آن q_s و q_d به ترتیب مقادیر تقاضا و عرضه هستند و پارامتر p قیمت و a و c اعداد حقیقی قطعی، b و d ضرایبی هستند که می‌بایست تعیین شوند، در نظر گرفتند و بیان کردند برای تعیین نقطه‌ی تعادلی بازار که در آن $q_d = q_s = q$، بایستی دستگاه دوگان فازی به فرم

$$\begin{cases} q = a * p + b \\ q = c * p + d \end{cases} \quad (7)$$

را حل کنیم و برای حل (۲) بایستی آن‌را به صورت

$$\begin{cases} q - a * p = b \\ q - c * p = d \end{cases} \quad (8)$$

که یک دستگاه فازی می‌باشد، تبدیل کرده و به روش حل دستگاه فازی حل نمود. آن‌ها در مثالی روابط بین عرضه و تقاضا را به صورت زیر درنظرگرفتند:

$$\begin{cases} q_d = \tilde{p} + \tilde{5} \\ q_s = -3\tilde{p} + 13 \end{cases} \quad (9)$$

و بیان داشتند که اگر $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$ به ترتیب مقادیر فازی عرضه (تقاضا) و مقدار فازی قیمت در نظر گرفته شوند در این‌صورت با برابر قرار دادن مقادیر عرضه و تقاضا می‌بایست یک دستگاه معادلات خطی فازی به صورت زیر حل شود:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 + \tilde{5} \\ \tilde{x}_1 = -3\tilde{x}_2 + 13 \end{cases} \quad (10)$$

با دوباره نویسی معادلات بالا، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \tilde{5} \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = 13 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن اعداد فازی مثلثی $\tilde{5}$ و ۱۳ را به ترتیب به صورت پارامتری $13 = (9+4r, 17-4r)$ و $\tilde{5} = (3+2r, 7-2r)$ در نظر گرفتند و با حل دستگاه فازی به‌دست آوردند:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (3+2r, 7-2r) \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = (9+4r, 17-4r) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (6+r, 8-r) \\ \tilde{x}_2 &= (1+r, 3-r) \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین مقدار تقاضای فازی (همچنین عرضه فازی) و مقدار قیمت فازی به ترتیب عبارتند از $\tilde{7}$ و $\tilde{2}$.

۳-۱ایرادات روش خیبری و همکاران

در این بخش به بیان ایراد اساسی روش خیبری و همکاران می‌پردازیم.

ایراد اساسی وارده این است که آنها برای حل دستگاه دوگان فازی (۲) آن‌را به فرم دستگاه فازی (۳) تبدیل کرده و حل کردند. در صورتی که اگر چه این دو سیستم در حالت قطعی معادلند، در حالت فازی این دو دستگاه معادل نیستند.

اگر $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r))$ و $\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r))$ و از طرفین اولین معادله‌ی (۴)، $\tilde{x}_2$ را کم و به طرفین دومین معادله $3\tilde{x}_2$ را اضافه کنیم، داریم:

(۱۴)

$$\begin{cases} (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) - (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) - (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) + (3+2r, 7-2r) \\ (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) + (3\underline{x}_2(r), 3\overline{x}_2(r)) = (-3\overline{x}_2(r), -3\underline{x}_2(r)) + (3\underline{x}_2(r), 3\overline{x}_2(r)) + (9+4r, 17-4r) \end{cases}$$

با به‌کارگیری اعمال تعریف ۲-۱. به‌دست می‌آوریم:

(۱۵)

$$\begin{cases}\left(\underline{x}_1(r)-\overline{x}_2(r),\overline{x}_1(r)-\underline{x}_2(r)\right)=\left(\underline{x}_2(r)-\overline{x}_2(r)+3+2r,\overline{x}_2(r)-\underline{x}_2(r)+7-2r\right)\\ \left(\underline{x}_1(r)+3\underline{x}_2(r),\overline{x}_1(r)+3\overline{x}_2(r)\right)=\left(-3\overline{x}_2(r)+3\underline{x}_2(r)+9+4r,-3\underline{x}_2(r)+3\overline{x}_2(r)+17-4r\right)\end{cases}$$

از طرف دیگر با به‌کارگیری اعمال تعریف شده در تعریف ۲-۱. در طرفین دستگاه (۴) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\left(\underline{x}_1(r)-\overline{x}_2(r),\overline{x}_1(r)-\underline{x}_2(r)\right)=\left(3+2r,7-2r\right)\\ \left(\underline{x}_1(r)+3\underline{x}_2(r),\overline{x}_1(r)+3\overline{x}_2(r)\right)=\left(9+4r,17-4r\right)\end{cases} \qquad (16)$$

مشاهده می‌کنیم که طرف چپ دستگاه معادلات (۸) و(۹) یکی هستند، در صورتی‌که طرف راست آنها در حالت کلی با هم برابر نمی‌باشند، یعنی دستگاه (۲) قابل تبدیل به دستگاه (۳) نیست. لذا در ادامه روشی برای تعیین مقدار تعادلی بازار ارایه می‌دهیم که بدون تبدیل دستگاه دوگان فازی به دستگاه فازی نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را تعیین می‌کند.

٤ مدل‌سازی و تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار

تعریف ٤-١. به معادله‌ی

$$\tilde{a}+b\tilde{x}=\tilde{c}+d\tilde{x} \qquad (17)$$

که در آن $\tilde{a},\tilde{c}$ اعداد فازی معلوم و b,d اعداد حقیقی معلوم و $\tilde{x}$ عدد فازی مجهول می‌باشد، معادله‌ی دوگان فازی می‌گوییم.

تعریف ٤-٢. سه دسته جواب معادله‌ی (۱۰) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. مجموعه جواب متحد

$$X_{\exists\exists}=\left\{x':(\exists a\epsilon\tilde{a})(\exists c\epsilon\tilde{c})\, s.t. a+bx'=c+dx'\right\}=\left\{x':(\tilde{a}+bx')\cap(\tilde{c}+dx')\neq\varnothing\right\}, \qquad (18)$$

ب. مجموعه جواب قابل قبول

$$X_{\forall\exists}=\left\{x':(\forall a\epsilon\tilde{a})(\exists c\epsilon\tilde{c})\, s.t. a+bx'=c+dx'\right\}=\left\{x':(\tilde{a}+bx')\subseteq(\tilde{c}+dx')\right\}, \qquad (19)$$

ج. مجموعه جواب قابل کنترل

$$X_{\exists\forall}=\left\{x':(\exists a\epsilon\tilde{a})(\forall c\epsilon\tilde{c})\, s.t. a+bx'=c+dx'\right\}=\left\{x':(\tilde{a}+bx')\supseteq(\tilde{c}+dx')\right\}, \qquad (20)$$

تابع تقاضا فازی: اصطلاح تقاضا مبین کل وضعیت امکانات فردی است که وی را قادر به خرید کالاها در قیمت‌های متفاوت می‌نماید و با فرض ثابت بودن سایر شرایط، بیان می‌کند که چه ارتباطی میان جهت و مقدار درخواستی کالا وجود دارد. عوامل مختلفی نظیر قیمت خود کالا، درآمد مصرف‌کننده، تعداد مصرف‌کنندگان در بازار، سلیقه و ترجیحات مصرف‌کنندگان، دامنه انتخاب و تعداد مصرف‌کننده، انتظارات قیمتی و قیمت سایر کالاهای مرتبط بر میزان تقاضا تاثیرگزار می‌باشد که با ثابت در نظرگرفتن عوامل موثر بر تقاضا به غیر از قیمت فازی کالای x، تابع تقاضا فازی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{f}\left(\tilde{p}_x(r)\right) \tag{۲۱}$$

بدون آنکه به کلیت کار خللی وارد شود، می‌توان تابع تقاضای فازی را به فرم خطی درنظرگرفت.

$$\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\,\tilde{p}_x(r) \tag{۲۲}$$

که در آن $\tilde{a}(r)$ عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و b عددحقیقی مثبت معلوم و $\tilde{Q}_x^d(r)\,,\tilde{p}_x(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می‌باشند.

تابع عرضه فازی: منظور از عرضه مقدار کالا و خدماتی است که تولیدکنندگان حاضرند در قیمت‌های مختلف در اختیار مصرف‌کنندگان قرار دهندکه عواملی نظیر قیمت کالا، هزینه‌ی تولید و... در عرضه موثر می‌باشند که با ثابت در نظرگرفتن بقیه‌ی عوامل به غیر از قیمت فازی، تابع عرضه‌ی فازی کالای x توسط تولید کننده به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{f}\left(\tilde{p}_x(r)\right) \tag{۲۳}$$

بدون آنکه به کلیت کار خللی وارد شود، می‌توان تابع عرضه‌ی فازی را به فرم خطی درنظرگرفت.

$$\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\,\tilde{p}_x(r) \tag{۲۴}$$

که در آن $\tilde{c}(r)$ و عدد فازی مثلثی مثبت معلوم و d عدد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{Q}_x^s(r),\ \tilde{p}_x(r)$ اعداد فازی مثلثی مثبت مجهول می‌باشند.

نقطه‌ی تعادلی فازی بازار: منظور از نقطه‌ی تعادلی فازی بازار، نقطه‌ای است که در آن میزان عرضه فازی یک کالا با میزان تقاضا فازی بازار حدودا برابر می‌باشد. در این حالت تقاضا کننده تقریبا همان مقدار کالایی را می‌خواهد که فروشنده قصد عرضه آن را دارد و فروشنده حدودا همان میزان کالایی که تولید کرده می‌فروشد.

مدل ریاضی مقدار تعادلی فازی بازار: تابع تقاضای فازی و عرضه‌ی فازی به ترتیب به فرم $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{a}(r) - b\tilde{p}_x(r)$ و $\tilde{Q}_x^s(r) = \tilde{c}(r) + d\,\tilde{p}_x(r)$ که در آن $\tilde{a}(r) = \left(\underline{a}(r), \overline{a}(r)\right)$ و $\tilde{c}(r) = (\underline{c}(r), \overline{c}(r)$(اعداد فازی مثلثی مثبت معلوم و b,d اعداد حقیقی مثبت معلوم و $\tilde{p}(r) = \left(\underline{p}(r), \overline{p}(r)\right)$ عدد فازی مثلثی مثبت مجهول هستند را در نظر بگیرید، برای تعیین مقدار تعادلی فازی بازار، ابتدا قیمت فازی تعادلی را با حل معادله‌ی $\tilde{Q}_x^d(r) = \tilde{Q}_x^s(r)$ که یک معادله‌ی دوگان فازی به صورت زیر می‌باشد، تعیین می‌کنیم:

$$\left(\underline{a}(r), \overline{a}(r)\right) - b\left(\underline{p}(r), \overline{p}(r)\right) = \left(\underline{c}(r), \overline{c}(r)\right) + d\left(\underline{p}(r), \overline{p}(r)\right) \tag{۲۵}$$

۵ مدل‌سازی و تعیین مقدار تعادلی فازی بازار

۵-۱ تعیین مقدار تعادلی فازی متقارن بازار

برای حل معادله‌ی (۱۱) ابتدا قرار می‌دهیم $r=۱$ و با حل معادله‌ی زیر $\underline{p}(۱) = \overline{p}(۱) = p$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\underline{a}(۱), \overline{a}(۱)\right) - b(p,p) = \left(\underline{c}(۱), \overline{c}(۱)\right) + d(p,p) \tag{۲۶}$$

حال برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\underline{a}(r),\overline{a}(r)\right)-b\left(p-\alpha,p+\alpha\right)=\left(\underline{c}(r),\overline{c}(r)\right)+d\left(p-\alpha,p+\alpha\right) \qquad (۲۷)$$

با اعمال حسابی تعریف ۲-۱ به‌دست می‌آوریم:

$$\underline{a}(r)-b\left(p+\alpha\right)=\underline{c}(r)+d\left(p-\alpha\right) \qquad (۲۸)$$

و

$$\overline{a}(r)-b\left(p-\alpha\right)=\overline{c}(r)+d\left(p+\alpha\right) \qquad (۲۹)$$

در ادامه بجای α در معادله ی اول α_{11} و بجای α در معادله‌ی دوم α_{12}، قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_{11}=\frac{\underline{a}(r)-\underline{c}(r)-bp-dp}{b-d}, \qquad (۳۰)$$

$$\alpha_{12}=\frac{\overline{a}(r)-\overline{c}(r)-bp-dp}{d-b}, \qquad (۳۱)$$

سرانجام گستره‌های متقارن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_s^-=min_{0\le r\le 1}\left\{\left|\alpha_{11}\right|,\left|\alpha_{12}\right|\right\}, \qquad (۳۲)$$

$$\alpha_s^+=max_{0\le r\le 1}\left\{\left|\alpha_{11}\right|,\left|\alpha_{12}\right|\right\}, \qquad (۳۳)$$

جواب متقارن فازی معادله‌ی (۱۱) به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tilde{p}^-(r)=\left(p-\alpha_s^-,p+\alpha_s^-\right), \qquad (۳۴)$$

$$\tilde{p}^+(r)=\left(p-\alpha_s^+,p+\alpha_s^+\right), \qquad (۳۵)$$

۲-۵ تعیین مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار

برای مشخص کردن مقدار تعادلی فازی نامتقارن بازار $\tilde{p}=\left(p,\alpha,\beta\right)$ و پس از محاسبه‌ی مقدار p از (۱۲)، برای محاسبه‌ی گستره‌ها معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\underline{a}(r),\overline{a}(r)\right)-b\left(p-\alpha,p+\beta\right)=\left(\underline{c}(r),\overline{c}(r)\right)+d\left(p-\alpha,p+\beta\right) \qquad (۳۶)$$

با اعمال حسابی تعریف ۲-۱و برابر قرار دادن طرفین (۲۲)، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d\alpha-b\beta=\left(\underline{c}(r)-\underline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p \\ b\alpha-d\beta=\left(\overline{c}(r)-\overline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p \end{cases} \qquad (۳۷)$$

که سرانجام با به‌کارگیری روش کرامر از (۲۳) داریم:

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\left(\underline{c}(r)-\underline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p & -b \\ \left(\overline{c}(r)-\overline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p & -d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & -b \\ b & -d\end{vmatrix}},\ \beta=\frac{\begin{vmatrix} d & \left(\underline{c}(r)-\underline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p \\ b & \left(\overline{c}(r)-\overline{a}(r)\right)+\left(b+d\right)p\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & -b \\ b & -d\end{vmatrix}} \qquad (۳۸)$$

تذکر ۵-۲-۱. قیمت فازی نامتقارن، قیمت فازی متقارن ماکسیمال و قیمت فازی متقارن مینیمال را به روش‌های بیان شده در بالا محاسبه می‌کنیم و با قراردادن در معادلات عرضه و تقاضای فازی، نقطه‌ی تعادلی فازی بازار را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۵-۱. هرگاه $(b-d),(b+d)\neq 0$، معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، دارای جواب فازی منحصربفرد است.

اثبات. جواب معادله‌ی دوگان فازی (۲۵)، به‌صورت $\tilde{p}(r)=(p-\alpha,p+\beta)$، می‌باشد که در آن p از (۲۶) با قرار دادن $a=(\underline{a}(1),\overline{a}(1))$ و $c=(\underline{c}(1),\overline{c}(1))$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p=\frac{a-c}{b+d} \tag{۳۹}$$

چون $b+d\neq 0$، بنابراین هسته‌ی $\tilde{p}(r)$، یعنی p، از (۳۹) به‌صورت منحصربفرد تعیین می‌گردد. از طرفی برای تعیین گستره‌ها، دو حالت زیر را درنظرمی‌گیریم:

- جواب فازی متقارن: در این حالت چون $b-d\neq 0$، گستره‌ها به‌صورت منحصربفرد از (۳۰) و (۳۱)، تعیین می‌گردند.
- جواب فازی نامتقارن: در این حالت چون $(b-d),(b+d)\neq 0$ یعنی $b^2-d^2\neq 0$، بنابراین در این حالت نیز گستره‌ها به‌صورت منحصربفرد از(۳۸)، به‌دست می‌آیند.

لذا حکم برقرار است.

۶ مثال‌های عددی

مثال ۶-۱. در این مثال روابط بین عرضه و تقاضا که در مقاله‌ی خبیری و همکاران[۱۹]، به صورت زیر درنظرگرفته شده بود:

$$\begin{cases} \tilde{q}_d=\tilde{p}+\tilde{5} \\ q_s=-3\tilde{p}+13 \end{cases} \tag{۳۹}$$

را با روش‌های پیشنهادی با فرض $\tilde{p}=(\underline{p}(r),\overline{p}(r))$ حل می‌کنیم:

$$(\underline{p}(r),\overline{p}(r))+(3+2r,7-2r)=-3(\underline{p}(r),\overline{p}(r))+(9+4r,17-4r), \tag{۴۰}$$

با قرار دادن $r=1$، $\underline{p}(1),\overline{p}(1)=2$ به‌دست می‌آوریم و برای محاسبه‌ی قیمت فازی متقارن ماکسیمال و مینیمال معادله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(2-\alpha,2+\alpha)+(3+2r,7-2r)=-3(2-\alpha,2+\alpha)+(9+4r,17-4r) \tag{۴۱}$$

از (۱۷-۱۲) داریم:

$$\alpha_{11}=-1+r, \tag{۴۲}$$

$$\alpha_{12}=-1+r, \tag{۴۳}$$

بنابراین از (۱۹-۱۸) به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{p}^-(r)=\tilde{p}^+(r)=\left(2-|-1+r|,2+|-1+r|\right)=(1+r,3-r)=\tilde{2}, \tag{۴۴}$$

سرانجام نقطه‌ی تعادلی فازی متقارن بازار با به‌کارگیری (۲۵)، $(\tilde{2},\tilde{7})$ یعنی $\left((1+r,3-r),(4+3r,10-3r)\right)$ یا $\left((1+r,3-r),(7r,14-7r)\right)$ خواهد بود.

برای تعیین قیمت فازی نامتقارن معادله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(2-\alpha,2+\beta)+(3+2r,7-2r)=-3(2-\alpha,2+\beta)+(9+4r,17-4r) \tag{۴۵}$$

که در این حالت نیز به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=\beta=-1+r \tag{۴۶}$$

بنابراین نقطه‌ی تعادلی فازی بازار $(\tilde{2},\tilde{7})$، یعنی $\left((1+r,3-r),(4+3r,10-3r)\right)$ یا $\left((1+r,3-r),(7r,14-7r)\right)$ خواهد بود که انتخاب به عهده‌ی تصمیم‌گیرنده است.

در مقایسه‌ی نقطه‌ی تعادلی فازی به‌دست آمده با این روش و نقطه‌ی تعادلی فازی به‌دست آمده به روش خبیری و همکاران دقت کنید که آنها پول فازی $\tilde{x}_2(\tilde{p})$ را $(1+r,3-r)$ به‌دست آوردند که اگر این مقدار را در اولین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_d=(4+3r,10-3r)$ بدست می‌آید و اگر در دومین معادله‌ی دستگاه (۲۵) قرار دهیم $\tilde{q}_s=(7r,14-7r)$ به‌دست می‌آید. چند نکته در اینجا وجود دارد:

۱. در اغلب موارد تابع عرضه بر حسب قیمت صعودی و تابع تقاضا نزولی است، بنابراین بایستی جای s و d عوض گردد و صورت سوال به فرم زیر اصلاح گردد:

$$\begin{cases}\tilde{q}_s=\tilde{p}+\tilde{5}\\ \tilde{q}_d=-3\tilde{p}+13\end{cases} \tag{۴۷}$$

۲. در [۱۴]، مقدار عرضه و تقاضا در نقطه‌ی تعادل را برابر با $(6+r,8-r)$بیان کردند. در صورتی که با جاگذاری قیمت تعادلی $(1+r,3-r)$، در معادله‌ی اول دستگاه (۲۵)،$(4+3r,10-3r)$ و در معادله‌ی دوم دستگاه (۲۵)، $(7r,14-7r)$، را به‌دست می‌آوریم.

۳. طبق تعریف ۵-۳ مقاله‌ی آنها اگر $\tilde{q}_d=\left(\underline{q}_d(r),\overline{q}_d(r)\right)$ و $\tilde{q}_s=\left(\underline{q}_s(r),\overline{q}_s(r)\right)$ در نقطه‌ی تعادلی فازی بایستی $\underline{q}_d(r)=\underline{q}_s(r)$ و $\overline{q}_d(r)=\overline{q}_s(r)$ اما مشاهده می‌کنیم در این مثال در قیمت تعادلی، $\tilde{q}_s\neq\tilde{q}_d$.

طبق دسته جواب‌های تعریف‌شده در این مقاله، قیمت تعادلی $(1+r,3-r)$، یک جواب قابل قبول برای معادله‌ی تعادل $\tilde{q}_s=\tilde{q}_d$، می‌باشد(چون $(7r,14-7r)\subseteq(4+3r,10-3r)$).

بنابراین روش ما ایرادات [۱] را ندارد.

مثال ٦-۲. فرض کنید تابع عرضه و تقاضای فازی کالای x ترتیب به صورت $\tilde{Q}_x^s=(r,3-2r)+3\tilde{p}_x$ و $\tilde{Q}_x^d=(18+3r,24-3r)-2\tilde{p}_x$ باشد، می‌خواهیم مقدار تعادلی فازی بازار و میزان عرضه و تقاضای فازی در قیمت تعادلی را محاسبه کنیم، بدین منظور معادله‌ی (۱۱) را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(r,۳-۲r)+۳\left(\underline{p}(r),\overline{p}(r)\right)=(۱۸+۳r,۲۴-۳r)-۲\left(\underline{p}(r),\overline{p}(r)\right) \tag{۴۸}$$

با قرار دادن $r=۱$ به‌دست می‌آوریم $\underline{p}(۱),\overline{p}(۱)=۴$.

- مقدار تعادلی فازی متقارن: معادله‌ی(۱۳) را به فرم زیر تشکیل می‌دهیم:

(۴۹) از (۱۲-۱۷) داریم: $(r,۳-۲r)+۳(۴-\alpha,۴+\alpha)=(۱۸+۳r,۲۴-۳r)-۲(۴-\alpha,۴+\alpha)$

$$\alpha_{۱۱}=-۲r+۲, \tag{۵۰}$$

$$\alpha_{۱۲}=-r+۱, \tag{۵۱}$$

بنابراین:

$$\tilde{p}^{-}(r)=\left(۴-(-r+۱),۴+(-r+۱)\right)=(۳+r,۵-r), \tag{۵۲}$$

$$\tilde{p}^{+}(r)=\left(۴-(-۲r+۲),۴+(-۲r+۲)\right)=(۲+۲r,۶-۲r), \tag{۵۳}$$

نمودار آنها در شکل ۱ نشان داده شده است و نقطه‌ی تعادلی بازار $(\tilde{۴},۱۳)$ می‌باشد، یعنی

$$\left(\tilde{p}^{-}(r),\tilde{Q}_x^{-s}\right)=\left((۳+r,۵-r),(۹+۴r,۱۸-۵r)\right), \tag{۵۴}$$

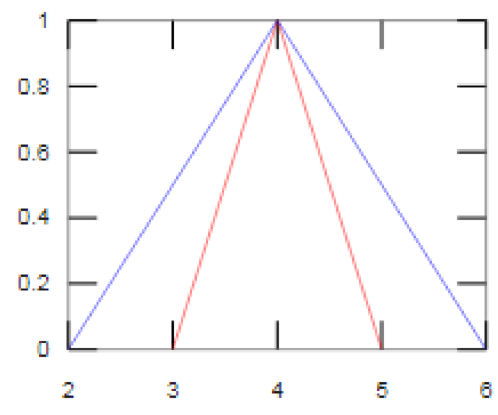
یا

(۵۵) $\left(\tilde{p}^{-}(r),\tilde{Q}_x^{-d}\right)=\left((۳+r,۵-r),(۸+۵r,۱۸-۵r)\right),$ و

(۵۶) $\left(\tilde{p}^{+}(r),\tilde{Q}_x^{+s}\right)=\left((۲+۲r,۶-۲r),(۶+۷r,۲۱-۸r)\right),$ یا

$$\left(\tilde{p}^{+}(r),\tilde{Q}_x^{+d}\right)=\left((۲+۲r,۶-۲r),(۶+۷r,۲۰-۷r)\right). \tag{۵۷}$$

$\tilde{p}^{-}(r)$، یک جواب قابل قبول برای معادله‌ی $\tilde{Q}_x^{-s}=\tilde{Q}_x^{-d}$ و $\tilde{p}^{+}(r)$، یک جواب قابل کنترل برای $\tilde{Q}_x^{+s}=\tilde{Q}_x^{+d}$ می‌باشد.



شکل۱. نمایش $\tilde{p}^{-}(r)$ (نمودار قرمز) و $\tilde{p}^{+}(r)$ (نمودارآبی) در مثال ۴-۲

- مقدار تعادلی فازی نامتقارن: معادله‌ی (۲۲) را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$(r,۳-۲r)+۳(۴-\alpha,۴+\beta)=(۱۸+۳r,۲۴-۳r)-۲(۴-\alpha,۴+\beta) \tag{۵۸}$$

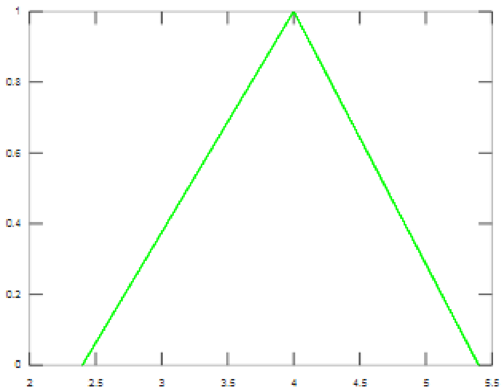
از (۲۴) و(۲۷)، به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha=\frac{-۸r+۸}{۵},\ \beta=\frac{-۷r+۷}{۵},$$ بنابراین قیمت (۵۹)

فازی نامتقارن به‌صورت زیر است:

$$\tilde{p}(r)=\left(۴-\left(\frac{-۸r+۸}{۵}\right),۴+\left(\frac{-۷r+۷}{۵}\right)\right) \tag{۶۰}$$

که قیمت تعادلی فازی نامتقارن در شکل ۲ نشان داده شده است و مقدار تعادلی بازار $\tilde{Q}_x^s=\tilde{Q}_x^s=\left(\frac{۳۶}{۵}+\frac{۲۹}{۵}r,\frac{۹۶}{۵}-\frac{۳۱}{۵}r\right)$ می‌باشد.



شکل۲. نمایش $\tilde{p}(r)$ (نمودار سبز) در مثال ۴-۲

۷ نتیجه‌گیری

باتوجه به شرایط اقتصادی جهان به علت آسیب‌های ناشی ازکروناویروس، وجود اطلاعات دقیق در زمینه‌های اقتصادی برای تصمیم‌گیری امکان‌پذیر نیست، از آنجایی‌که یکی از مباحث کلیدی در اقتصاد نقطه‌ی تعادلی بازار است؛ لذا در این مقاله به تحلیل نقطه‌ی تعادلی بازار با رویکرد فازی پرداختیم. از مزایای روش پیشنهادی این‌است که قیمت تعادلی فازی متقارن مینیمال، قیمت تعادلی فازی متقارن ماکسیمال و قیمت تعادلی فازی نامتقارن را به روش پیشنهادی محاسبه می‌کنیم و درپایان تصمیم‌گیرنده جوابی که به مساله واقعی نزدیک‌تر است را به عنوان جواب نهایی سیستم انتخاب می‌کند. در پژوهش بعدی تردیدهای ناشی از تصمیم‌گیری را نیز در مدل‌سازی در نظر می‌گیریم و به تعیین نقطه‌ی تعادلی فازی مردد بازار خواهیم پرداخت.

منابع

[1] Miao, Y.S.: The Equilibrium Point in Fuzzy Economic Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 6(1), 9–14 (1992).
[2] Zhu, K.P., Zhong, M.Y., Tang, B.Y.: Study on Algorithm for the Greatest Equilibrium State of Fuzzy Control Systems. J. of Fuzzy Systems and Mathematics 15(3), 80–83 (2001)..

[3] Yongkun, L., Lijie, S and Li, Y., (2014), Existence and Exponential Stability of Equilibrium Point for Fuzzy BAM Neural Networks with Infinitely Distributed Delays and Impulses on Time Scales, Journal of Applied Mathematics, Article ID 721586.

[4] Allahviranloo, T., Babakordi, F., (2017), Algebraic solution of fuzzy linear system as: $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{X} = \tilde{Y}$,Soft Computing, 7463-7472.

[5] Babakordi, F., (2020), A Novel Transformation Method for Solving Complex Interval Matrix, 12, 239-234.

[6] Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2020), On the rectangular fuzzy complex linear systems, 91, 106-196.

[7] Mosleh , M, Otadi, M., Abbasbandy, S., (2011), Solution of Fully Fuzzy Linear Systems by ST Method, Journal of applied Mathematics, 28, 23-31.

[8] Younbae, J., (2021), Relaxation Technique For Solving Fuzzy Linear Systems Of Linear Fuzzy Real Numbers, J. Math. Comput. Sci. 11, 8211-8220.

[9] StephenDinagar, D., HetciyalSangeethaPriyam, A., (2021),Solving LinearSystem Of Equations With Fuzzy Revised Decomposition Method, Advances and Applications in Mathematical Sciences, 20, 931-99954.

[10] Abdollahzadeh, R., ModarreseKhiabani, F., Iranzadeh, S., (2021) A Model for Evaluating the Financial Performance of Islamic Azad Universities using the Combination of ANFIS and PSO, Journal of applied Mathematics , 18, 39-56.

[11] Babakordi, F., Allahviranloo, T., (2021), A New Method for Solving Fuzzy Bernoulli Differential Equation,Journal Of Mathematical Extension, 15, 1-20.

[12] Ma, M., Friedman, M., Kandel, A., (2000), Duality in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets Syst. 109, 55–58.

[13] Abbasbandy, S., Otadi, M., Mosleh, M., (2008), Minimal solution of general dual fuzzy linear systems, Chaos, Solitons and Fractals, 37, 1113-1124.

[14] Otadi, M., (2013), A New Method for Solving General Dual Fuzzy Linear Systems, Journal of Mathematical Extension, 7, 63-75.

[15] Babakordi, F., Adabitabarfirozja, M., (2020), Solving fully fuzzy matrix dual system with optimization problem, International Journal of Industrial Mathematics,12, 11pages.

[16]Ghanbari, M., Allahviranloo, T., Pedrycz, W., (2021), A straightforward approach for solving dual fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems,10.1016/j.fss.2021.04.007.

[17] Jian-bing Gao, Si-zong Guo, (2010), A Solving Method of Fuzzy Linear System's Equilibrium Point, conference paper, Fuzzy Information and Engineering, 189-197.

[18] Melliani, S., El Allaoui, A., Chadli, L. S., (2016), Complex fuzzy dynamical systems and Stability of the equilibrium Point, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 3, 223-233.

[19] Khabiri, B., Naseri, S.H., Abdi, M., (2010). Determination of the market equilibrium value using the solution of the fuzzy linear equation system. Journal of Applied Mathematics, Lahijan Branch, 2 (25), 69-77.

[20] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Khezerloo, M., (2011). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 4652–4662.

[21] Allahviranloo, T.,Salahshour, S.,Homayoun-nejad, M.,Baleanu, D., (2013), General Solutions of Fully Fuzzy Linear Systems, Abstract and Applied Analysis, 10.1155/2013/593274.

[22] Cong-Xin, W., Ming, M., (1991). Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems. Embedding problem of fuzzy number space: Part I, Fuzzy Sets and Systems 44, 33-38.

[23] Goetschel, R., Voxman, W., (1986), Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems. 18, 31-43.