

شاخص بهره وری مالکونئست چند مرحله ای

محمد علی جهانتیغی^{1*}، زهره مقدس²، محسن واعظ قاسمی²

¹دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان، گروه ریاضی

²دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، گروه ریاضی

رسید مقاله: اول شهریور 1390

پذیرش مقاله: شانزدهم آذرماه 1390

چکیده

زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند. این گونه مراحل موجود در واحدهای تصمیم گیرنده در اغلب مسایل حقیقی کاربردهای بسیاری دارند. در نظر نگرفتن این زیر واحدها و ارتباطات آن ها می تواند منجر به تناجیح دور از واقعیت گردد. به منظور ارزیابی عملکرد یک واحد با زیر مجموعه های آن نسبت به گذشته و دیگران می توان از تکنیک های پیشرفت و پسرفت استفاده نمود که مهمترین تکنیک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد، شاخص بهره وری مالکونئست می باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن واحدهای تصمیم گیرنده که شامل چند زیر واحد که به صورت سری به هم متصل هستند رویکرد شاخص بهره وری مالکونئست بسط داده است. همچنین کارایی هر یک از این زیر واحدها و کارایی تجمعی آن ها محاسبه و اندیس بهره وری مالکونئست برای هر زیر واحد و و اندیس بهره وری مالکونئست تجمعی معرفی می شوند.
کلمات کلیدی: شاخص بهره وری مالکونئست، تحلیل پوششی داده ها، مدل های چند مرحله ای، پیشرفت، پسرفت.

1 مقدمه

مهمترین مساله برای مدیران در رابطه با واحدهای تصمیم گیرنده به منظور هدایت آن ها اطلاع از عملکرد واحدها می باشد. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد عملکرد، اثرات عوامل بیرونی، اثر واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم گیری های مناسب، تغییرات ناگهانی خط مشی به علت برخورد های انفعالی با مشکلات حاد (مانند بیکاری و...) از جمله عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی تواند از کارکرد واحدهای تحت امر، مطلع باشد و تصمیم گیری مناسبی را در جهت بهبود کارایی و بهره وری اتخاذ نماید. میزان پیشرفت با پسرفت یک واحد تصمیم گیرنده اولین بار با ایده تقسیم کارایی زمان حال به کارایی زمان گذشته مطرح گردید که به دلیل مشکلات زیاد، شاخص بهره وری مالکونئست که نشان دهنده پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده می باشد معرفی گردید.

*عهده دار مکاتبات

در سال 1953 مالک‌کوئیست [1] اندیسی را معرفی کرد که مبنای کار کیوز و همکاران در سال 1982 برای ساختن اندیس بهره وری شد. در حال حاضر در میان محققینی که به تحلیل عملکرد واحد ها می پردازند، اندازه گیری و تحلیل تغییرات بهره وری بسیار مورد توجه می باشد. مایاداکیس و همکاران [2] اندیس بهره وری ای که تعمیم یافته ی اندیس بهره وری مالک‌کوئیست بود را معرفی کردند. اندیس بهره وری هنگامی که قیمت ورودی ها مشخص و هدف تولید کننده ها به حداقل رسانیدن هزینه است قابل استفاده می باشد. به این منظور آن ها اندیس بهره وری را طوری توسعه دادند که نه تنها کارایی تکنیکی و تغییرات تکنولوژی بلکه کارایی تخصیصی و اثر تغییرات قیمت ورودی ها را نیز در نظر بگیرد. چن [3] بر مبنای آن چه در تحلیل پوششی داده ها برای محاسبه این اندیس عنوان شده بود اندیس بهره وری مالک‌کوئیست غیر شعاعی که در آن نظر تصمیم گیرنده در رابطه با اولویت نیز در نظر گرفته شده بود را مطرح کرد. حسن این اندیس این است که می تواند با اسلک های غیر صفر نا کارایی ممکنه را بر طرف نماید. لین و همکاران [4] 117 شعبه بانک را در تایوان در نظر گرفته و با استفاده از تحلیل پوششی داده ها به ارزیابی عملکرد این واحد ها پرداختند. ونگ و همکاران [5] فرآیند ساختار سلسله مراتبی را برای انتخاب سیاست های بانک به کار گرفتند. نتایج به دست آمده مبین این مطلب است که در انتخاب استراتژی، مدیریت ریسک و نسبت ها مالی بانک ها از مهم ترین ملاحظات می باشند. هوآنگ-ای وو و همکاران [6] برای ارزیابی عملکرد بانک ها تصمیم گیری چند معیاره فازی را پیشنهاد دادند.

در این مقاله واحد های تصمیم گیرنده و زیر واحدهای آن ها که غالباً به صورت سری مطرح می شوند در نظر گرفته شده و عملکرد آن ها با زیر مجموعه های خود نسبت به گذشته و دیگران محاسبه شده است. در نیل به این هدف از مهمترین تکنیک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد که شاخص بهره وری مالک‌کوئیست می باشد استفاده شده است. همچنین رویکرد شاخص بهره وری مالک‌کوئیست بسط داده شده و برای محاسبه دو مرحله ای سری زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده با ورودی و خروجی های میانی مورد استفاده قرار گرفته است. بخش های مختلف این مقاله به شرح ذیل است: در بخش اول به اختصار تحلیل پوششی داده ها معرفی خواهد شد در ادامه، در بخش دوم، به معرفی اندیس بهره وری مالک‌کوئیست خواهیم پرداخت. در بخش سوم شاخص بهره وری مالک‌کوئیست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی مورد بحث قرار میگیرد و در بخش چهارم به بیان نتایج و پیشنهادات خواهیم پرداخت.

2 تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می گیرد، عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است. وقتی گفته می شود واحد تصمیم گیرنده P ام کاراست یعنی این واحد خوب عمل می کند و از منابع به خوبی استفاده می کند. از آن جا که هدف پیدا نمودن مرز کارا یا تابع تولید است، که معمولاً در دسترس نمی باشد، با پذیرفتن اصول موضوعه زیر مجموعه امکان تولید زیر ساخته می شود و مرز

مجموعه به عنوان تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می شود. مجموعه امکان تولید T_c که در آن تکنولوژی با بازده به مقیاس ثابت در نظر گرفته شده است به صورت زیر است:

$$T_c = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \quad \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \right\}$$

فرض کنید DMU_j ($j=1, L, n$) واحد متجانس هستند که با به کار بردن بردار ورودی x_j ($j=1, \dots, n$) بردار خروجی y_j ($j=1, \dots, n$) را تولید می نمایند. همچنین فرض کنید که $x_j \in R^{m \geq 0}$ و $y_j \in R^{s \geq 0}$ ($j=1, \dots, n$). اگر در T_c امکان تولیدی مانند (x, y) یافت نشود که غالب بر (x_o, y_o) باشد، در این صورت DMU_o کارای نسبی است. برای بررسی حالت اول مدل زیر که به مدل معروف است حل می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{st. } (\theta X_o, Y_o) \in T_c. \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن (x_o, y_o) بردار ورودی ها و خروجی های DMU_o است. مدل (1) به مدل CCR با ماهیت ورودی در فرم پوششی مشهور است. با توجه به تعریف T_c ، مدل (1) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{st. } X \lambda \leq \theta X_o, \\ & \quad Y \lambda \geq Y_o, \\ & \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

توجه کنید که مدل (2) همواره شدنی است و $0 < \theta^* \leq 1$. اگر $\theta^* = 1$ در این صورت DMU_o کاراست در غیر این صورت ناکاراست. دوآل فرم پوششی که معروف به فرم مضربی است چنین می باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Max } U Y_o \\ & \text{st. } U Y_j - V X_j \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \\ & \quad V X_o = 1, \\ & \quad u \geq 0, \\ & \quad v \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

3 شاخص بهره وری مالکونیست

در تحلیل های اقتصادی یکی از شاخص هایی که در بررسی رشد بهره وری کل عوامل، همواره مورد توجه بوده است شاخص بهره وری مالکونیست می باشد.

این شاخص ابتدا توسط مالم کوئیست [1] به عنوان شاخص استاندارد معرفی شد و برای اولین بار توسط کیوز و همکاران [7]، در تئوری تولید به کار گرفته شد. کیوز و همکاران [7] برای محاسبه شاخص ها، از تابع فاصله $D(\cdot)$ استفاده کرده و فرض نمودند که همه واحدها نسبت به مرز تولید زمان خود، کارا می باشند یعنی $D^k(x^k, y^k) \equiv 1$. در واقع، آن ها برای محاسبه رشد بهره وری یک DMU طی زمان t_1, t_2 به محاسبه نسبت تابع فاصله مشاهدات آن DMU در زمان های مذکور نسبت به یکی از مرزهای کارایی زمان t_1, t_2 پرداخت و دو شاخص بهره وری را ارایه نمود. تابع فاصله فوق الذکر به صورت ذیل تعریف می شود:

$$D^{t_2}(x^{t_1}, y^{t_1}) = \text{Min}\{\theta \mid \theta x^{t_1} \text{ بتواند با تکنولوژی زمان } t_2 \text{ را تولید کند}\}$$

با توجه به یکسان بودن تعریف کارایی فنی فارل و تابع فاصله فوق الذکر، فار و همکاران [8] از تکنیک های تحلیل پوششی داده ها برای محاسبه شاخص مالکونیست استفاده کردند و آن را به صورت میانگین هندسی شاخص های بهره وری مالکونیست ارایه شده توسط کیوز و همکاران ارایه نمودند

در این تحقیق برای محاسبه رشد بهره وری عوامل تولید واحد تصمیم گیرنده K در طی زمان t_1, t_2 از شاخص بهره وری مالکونیست فار استفاده می شود. این شاخص، با بهره گیری از مدل های تحلیل پوششی داده ها و براساس اندازه گیری تابع فاصله یا کارایی فنی مختصات مشاهدات واحد K در زمان t_1, t_2 نسبت به مرزهای تولید با تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت زمان های t_1, t_2 صورت می پذیرد.

فرض کنید تعداد واحد های تصمیم گیرنده برابر n می باشد و $x_j^{t_1} = (x_{1j}^{t_1}, \dots, x_{mj}^{t_1})$ و $y_j^{t_1} = (y_{1j}^{t_1}, \dots, y_{sj}^{t_1})$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم گیرنده j ($j \in \{1, \dots, n\}$) در زمان t_1 و $x_j^{t_2} = (x_{1j}^{t_2}, \dots, x_{mj}^{t_2})$ و $y_j^{t_2} = (y_{1j}^{t_2}, \dots, y_{sj}^{t_2})$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی واحد مزبور در زمان t_2 می باشد. براساس شاخص بهره وری مالکونیست، رشد بهره وری واحد تصمیم گیرنده o ($o \in \{1, \dots, n\}$) در زمان t_2 نسبت به t_1 از روش ذیل محاسبه می گردد.

$$M_o = \left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \times \frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{1/2}$$

$$M_o = \frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{1/2}$$

که در آن:

$$D_o^{t1}(X_o^{t1}, Y_o^{t1}) = \text{Min } \theta$$

s.t.

$$\begin{aligned} X_o^{t1} \lambda &\leq \theta X_o^{t1}, \\ Y_o^{t1} \lambda &\geq Y_o^{t1}, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

$$D_o^{t2}(X_o^{t1}, Y_o^{t1}) = \text{Min } \theta$$

s.t.

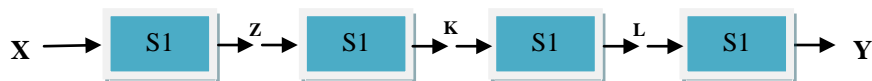
$$\begin{aligned} X_o^{t2} \lambda &\leq \theta X_o^{t1}, \\ Y_o^{t2} \lambda &\geq Y_o^{t1}, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

$D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})$ و $D_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})$ نیز به طور مشابه محاسبه می شوند.

در صورتی که مقدار M_o بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده افزایش، کاهش و عدم تغییر بهره وری واحد مورد نظر بوده است.

4 شاخص بهره وری مالکویست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی

فرض کنید Π واحد تصمیم گیرنده موجود است به طوری که هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار زیر واحد باشند که بصورت زیر می توان نشان داد.



شکل (1)

بنابراین هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار مرحله یا زیر واحد می باشد و (X, Z, K, L, Y) بردار مختصات واحد تصمیم گیرنده می باشد. در این بردار X بردار ورودی، Y بردار خروجی و L, K, Z بردارهایی با نام تولیدات میانی می باشند. کارایی مرحله اول، دوم، سوم، چهارم و تجمعی از رابطه زیر حاصل می شوند.

$$e^1 = \frac{WZ}{VX}, \quad e^2 = \frac{\bar{U}K}{WZ}, \quad e^3 = \frac{\bar{V}L}{UK}, \quad e^4 = \frac{UY}{VL}, \quad e^a = \frac{UY}{VY} \quad (6)$$

مدل مضربی جهت محاسبه کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده P به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \frac{UY_p}{VX_p} \\
 & \text{s.t.} \quad \frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \frac{WZ_j}{VX_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \frac{\bar{U}K_j}{WZ_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \frac{\bar{V}L_j}{\bar{U}K_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \frac{UY_j}{\bar{V}L_j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad U \geq 1\varepsilon, \quad V \geq 1\varepsilon, \quad W \geq 1\varepsilon, \\
 & \quad \bar{U} \geq 1\varepsilon, \quad \bar{V} \geq 1\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{7}$$

مدل خطی متناظر مدل (7) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad UY_p \\
 & \text{s.t.} \quad UY_j - VX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad WZ_j - VX_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \bar{U}K_j - WZ_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad \bar{V}L_j - \bar{U}K_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad UY_j - \bar{V}L_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \quad VX_p = 1, \\
 & \quad U \geq 1\varepsilon, V \geq 1\varepsilon, W \geq 1\varepsilon, \\
 & \quad \bar{U} \geq 1\varepsilon, \bar{V} \geq 1\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{8}$$

بدیهی است دسته قیود اول در مدل (3.4) از مجموع دسته قیود دوم الی چهارم حاصل می شود و لذا زاید است و می تواند در مدل حذف گردد. با حذف این دسته قیود، دو آل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.t.} \quad X \lambda^1 \leq \theta X_p, \\
 & \quad Z \lambda^1 - Z \lambda^2 \geq 0, \\
 & \quad K \lambda^2 - K \lambda^3 \geq 0, \\
 & \quad L \lambda^3 - L \lambda^4 \geq 0, \\
 & \quad Y \lambda^4 \geq Y_p, \\
 & \quad \lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0, \lambda^3 \geq 0, \lambda^4 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

بدیهی است رابطه زیر بین کارایی مراحل یک واحد تصمیم گیرنده و تجمعی آن وجود دارد.

$$e_p^a = e_p^1 \cdot e_p^2 \cdot e_p^3 \cdot e_p^4$$

به کمک این رابطه می توان فهمید که یک واحد تصمیم گیرنده کارا است اگر و فقط اگر تمام مراحل آن واحد کارا باشد. حال فرض کنید برای همه واحدهای تصمیم گیرنده در دو مقطع زمانی داده وجود دارد.

$$(X_j^{t+1}, Z_j^{t+1}, K_j^{t+1}, L_j^{t+1}, Y_j^{t+1}), \quad (X_j^t, Z_j^t, K_j^t, L_j^t, Y_j^t)$$

به ترتیب مختصات DMU_j در لحظه t, t+1 باشد. در این صورت برای هر واحد تصمیم گیرنده و مراحل چهار کارایی می توان به دست آورد که به کمک آن ها بتوان شاخص بهره وری المکونیست را محاسبه کرد. کارایی واحد تصمیم گیرنده pام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مسأله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \theta^t(t) = \text{Max} \quad & UY_p^t \\ \text{s.t.} \quad & WZ_j^t - VX_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{U}Y_j^t - WZ_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \bar{V}L_j^t - \bar{U}K_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & UY_j^t - \bar{V}L_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & VX_p^t = 1, \\ & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0 \\ & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

فرض کنید $(v^*, u^*, w^*, \bar{v}^*, \bar{u}^*)$ جواب بهین مدل (10) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد تصمیم گیرنده Pام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t) = \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \quad e_p^{3,t}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{\bar{U}^* K_p^t}, \quad e_p^{4,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t}, \quad e_p^{a,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t} \quad (11)$$

کارایی واحد pام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از مسأله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \theta_p^{t+1}(t) = \text{Max} \quad & UY_p^t \\
 \text{s.t.} \quad & WZ_j^{t+1} - VX_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{U}Y_j^{t+1} - \bar{W}Z_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{V}L_j^{t+1} - \bar{U}K_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & UY_j^{t+1} - \bar{V}L_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & VX_p^t = 1, \\
 & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0, \\
 & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

با فرض $(U^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, V^*)$ به عنوان جواب بهین مساله (12) کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد Pام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید در لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
 e_p^{1,t+1}(t) &= \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \quad e_p^{2,t+1}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \quad e_p^{3,t+1}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{U^* K_p^t}, \quad e_p^{4,t+1}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t}, \\
 e_p^{a,t+1}(t) &= \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t}
 \end{aligned} \tag{13}$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده Pام با مختصات لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مساله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \theta_p^t(t+1) = \text{Max} \quad & UY_p^{t+1} \\
 \text{s.t.} \quad & WZ_j^t - VX_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{U}Y_j^t - \bar{W}Z_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \bar{V}L_j^t - \bar{U}K_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & UY_j^t - \bar{V}L_j^t \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & VX_p^{t+1} = 1, \\
 & U \geq 0, \quad V \geq 0, \quad W \geq 0, \\
 & \bar{U} \geq 0, \quad \bar{V} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

فرض کنید $(U^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, V^*)$ جواب بهین مساله (14) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد Pام در لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t+1) = \frac{W^* Z_p^{t+1}}{V^* X_p^{t+1}}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^{t+1}}{W^* Z_p^{t+1}}, \quad e_p^{3,t}(t+1) = \frac{\bar{V}^* L_p^{t+1}}{\bar{U}^* K_p^{t+1}}, \quad e_p^{4,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{\bar{V}^* L_p^{t+1}},$$

$$e_p^{a,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{V^* Y_p^{t+1}} \quad (15)$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده p ام با مختصات لحظه $t+1$ نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه $t+1$ از حل مسأله زیر به دست می آید.

$$\theta_p^{t+1}(t+1) = \text{Max } UY_p^{t+1}$$

$$s.t. \quad WZ_j^{t+1} - VX_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\bar{U}Y_j^{t+1} - WZ_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\bar{V}L_j^{t+1} - \bar{U}K_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$UY_j^{t+1} - \bar{V}L_j^{t+1} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$VX_p^{t+1} = 1,$$

$$U \geq 0, V \geq 0, W \geq 0,$$

$$\bar{U} \geq 0, \bar{V} \geq 0.$$
(16)

فرض کنید $(v^*, u^*, w^*, \bar{v}^*, \bar{u}^*)$ جواب بهین مسأله (16) باشد. در این صورت کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد p ام در لحظه $t+1$ نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه $t+1$ از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t+1) = \frac{W^* Z_p^{t+1}}{V^* X_p^{t+1}}, \quad e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^{t+1}}{W^* Z_p^{t+1}}, \quad e_p^{3,t}(t+1) = \frac{\bar{V}^* L_p^{t+1}}{\bar{U}^* K_p^{t+1}}, \quad e_p^{4,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{\bar{V}^* L_p^{t+1}},$$

$$e_p^{a,t}(t+1) = \frac{U^* Y_p^{t+1}}{V^* Y_p^{t+1}} \quad (17)$$

بنابراین شاخص بهره وری مالکونیست مرحله اول در زمان های $t+1$ نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_p^1 = \left(\frac{\theta_p^{1,t}(t+1) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_p^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{1,t}(t+1) \cdot \theta_p^{1,t}(t)}{\theta_p^{1,t+1}(t) \cdot \theta_p^{1,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \quad (18)$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^1 > 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^1 < 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^1 = 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالکونیست مرحله دوم در زمان های $t+1$ نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_p^2 = \left(\frac{\theta_p^{2,t}(t+1) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t)} \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$= \frac{\theta_p^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{2,t}(t+1) \cdot \theta_p^{2,t}(t)}{\theta_p^{2,t+1}(t) \cdot \theta_p^{2,t+1}(t+1)} \right)^{1/2}$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^2 > 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^2 < 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^2 = 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالکونیست مرحله سوم در زمان های $t+1$ نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_p^3 = \left(\frac{\theta_p^{3,t}(t+1) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t)} \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$= \frac{\theta_p^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_p^{3,t}(t+1) \cdot \theta_p^{3,t}(t)}{\theta_p^{3,t+1}(t) \cdot \theta_p^{3,t+1}(t+1)} \right)^{1/2}$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^3 > 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^3 < 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^3 = 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالکونیست مرحله چهارم در زمان های $t+1$ نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_P^4 = \left(\frac{\theta_P^{4,t}(t+1) \cdot \theta_P^{4,t+1}(t+1)}{\theta_P^{4,t}(t) \cdot \theta_P^{4,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_P^{4,t+1}(t+1)}{\theta_P^{4,t}(t)} \cdot \left(\frac{\theta_P^{4,t}(t+1) \cdot \theta_P^{4,t}(t)}{\theta_P^{4,t+1}(t) \cdot \theta_P^{4,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \quad (21)$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

- الف) اگر $M_P^4 > 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.
- ب) اگر $M_P^4 < 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.
- ج) اگر $M_P^4 = 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالکونیست جمعی در زمان های $t+1$ نسبت به لحظه t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_P^a = \left(\frac{\theta_P^a,t(t+1) \cdot \theta_P^a,t+1(t+1)}{\theta_P^a,t(t) \cdot \theta_P^a,t+1(t)} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\theta_P^a,t+1(t+1)}{\theta_P^a,t(t)} \cdot \left(\frac{\theta_P^a,t(t+1) \cdot \theta_P^a,t(t)}{\theta_P^a,t+1(t) \cdot \theta_P^a,t+1(t+1)} \right)^{1/2} \quad (22)$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

- الف) اگر $M_P^a > 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.
- ب) اگر $M_P^a < 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t پسرفت دارد.
- ج) اگر $M_P^a = 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرنده p ام (تجمعی) در لحظه $t+1$ نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

5 نتیجه گیری

فرموله کردن مدل های واقعی که در برگیرنده جزئیات خاصی هستند مستلزم بررسی روابط مختلف و متعددی می باشد تا بتوان تمام جزئیات آن را به منظور به دست آوردن نتایج معتبر در نظر گرفت. زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند که هر دوی این حالات کاربرد های عملی فراوانی در مسائل حقیقی دارند.

در این مقاله به بررسی شاخص بهره وری مالکونیست در حالت سری بودن چند زیر واحد می باشد پرداخته شده است. با در نظر گرفتن مدل ارایه شده می توان میزان پیشرفت یا پسرفت واحدها را در دو دوره ارزیابی برای

حالت شبکه‌ای محاسبه نمود. پیشنهادات بعدی برای پیشبرد هدف این مقاله در نظر گرفتن حالت اتصال موازی زیر واحد‌ها و بسط و توسعه مدل‌های معرفی شده می‌باشد.

منابع

- [1] Malmquist, S., (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estadística*, 4, 209–242.
- [2] Maniadakis N. and Thanassoulis E., (2004). A cost Malmquist productivity index. *European Journal of Operational Research*, 154, 396–409.
- [3] Chen, Y., (2003). A non-radial Malmquist productivity index with an illustrative application to Chinese major industries. *Int. J. Production Economics*, 83, 27–35.
- [4] Lin, Tyrone T., Lee, Chia-Chi, T Chiu, Sui-Fen., (2009). Application of DEA in analyzing a bank's operating performance. *Expert Systems with Applications*, 36, 8883–8891.
- [5] Wang, Tien-Chin, Lin Ying-Ling., (2009). Applying the consistent fuzzy preference relations to select merger strategy for commercial banks in new financial environments. *Expert Systems with Applications*, 36, 7019–7026.
- [6] Wu, Hung-Yi, Tzeng, Gwo-Hshiung, Chen, Yi-Hsuan, (2009). A fuzzy MCDM approach for evaluating banking performance based on Balanced Scorecard. *Expert Systems with Applications*, 6, 10135- 10147 .
- [7] Caves D.W., Christensen L. R. Diewert, W. E., (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity. *Econometrica*, 50, 1393–1414.
- [8] Fare, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., Ross, P., (1989). Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach, Southern Illinois University at Carbondale. Department of Economics. Working Paper.
- [9] Charnes A, Cooper w. w. w., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of operational research*. 2; 429-444.
- [10] Grifell-Tatjé E., Lovell C. A. K., Pastor J. T., (1998). A Quasi-Malmquist Productivity Index. *Journal of Productivity Analysis*, 10, 7–20.