

روشی برای رتبه بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده ها

مجید ظرافت انگیز لنگرودی*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، گروه ریاضی، فیروزکوه، ایران

رسید مقاله: سوم شهریور ماه 1390

پذیرش مقاله: بیست و دوم آذر ماه 1390

چکیده

سیستم رأی گیری ترجیحی یکی از انواع مسایل تصمیم گیری چند معیاره است که در آن متخصصین گزینه ها را رتبه بندی می نمایند. انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی موضوع بسیاری از مطالعات اخیر می باشد. روش های متعددی برای تجمیع آراء رأی دهندگان و رتبه بندی گزینه ها در یک سیستم رأی گیری ترجیحی وجود دارند. این روش ها امتیازاتی را برای هر گزینه به دست می آورند که براساس آن رتبه بندی صورت می گیرد. در سال های اخیر محققین تحقیق در عملیات از تحلیل پوششی داده ها به منظور رتبه بندی گزینه ها در حوزه مسایل تصمیم گیری چند معیاره استفاده نموده اند. این مقاله، به منظور معرفی یک روش ریاضی جدید برای انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی، مفهوم تحلیل پوششی داده ها و مفاهیم فازی را به کار می گیرد. مثال ارائه شده در مقاله چگونگی مکانیزم عمل و مزیت الگوریتم پیشنهادی را بر مدل های مشابه نشان می دهد.

کلمات کلیدی: رأی گیری ترجیحی، تحلیل پوششی داده ها، فازی.

1 مقدمه

انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی موضوع بسیاری از مطالعات اخیر می باشد. در سیستم رأی گیری ترجیحی گروهی، هدف انتخاب m گزینه از میان n گزینه می باشد ($n > m$) که در آن هر تصمیم گیرنده یک رتبه بندی از گزینه ها را ارائه می دهد. به وضوح به سبب تفاوت در دیدگاه تصمیم گیرندگان، این رتبه بندی ها متفاوت خواهد بود. بعضی از روش های معمول، یک روش تجمیعی ساده را پیشنهاد می کنند که در آن ارزش هر گزینه از مجموع وزنی ارزش جایگاه ها به دست می آید. مشکل اساسی در این روش ها تعیین وزن های هر جایگاه است. شاید روش بردا [1]، به سبب سادگی در محاسبات، یکی از متداول ترین روش های مورد اشاره بالا باشد.

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mzarafat24@gmail.com

ظرافت انگیز لنگرودی، روشی برای رتبه بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده ها

اساساً و بدواً روش تحلیل پوششی داده‌ها برای مساله ارزیابی کارائی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیری [2] مانند مدارس، بیمارستان‌ها، شعبات بانک‌ها، دادگاه‌ها و غیره به کار گرفته شده است. در سال‌های اخیر تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان ابزاری قوی در خدمت رتبه بندی گزینه‌ها قرار گرفته است. اولین بار کوک و کرس [3] مدل تحلیل پوششی داده‌ها را در یک مسأله رأی‌گیری ترجیحی به کار گرفتند. یکی از ضعف‌های این مدل این است که بعضی اوقات قادر نیست بین بعضی از گزینه‌ها تمیز قایل شود. از طرفی دیگر وزن‌ها در این مدل‌ها به راحتی قابل کنترل نیستند، حال آنکه این امر در مباحث رأی‌گیری بسیار حایز اهمیت می‌باشد. در مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی، به تعداد گزینه‌ها مدل برنامه‌ریزی خطی حل می‌شود.

در این مقاله برای یافتن گزینه ارجح در یک تصمیم‌گیری گروهی ابتدا از تجمیع تمام داده‌ها که از نظرات رأی‌دهندگان در مورد جایگاه گزینه‌ها حاصل می‌شود، اعدادی فازی استخراج می‌کنیم و سپس به کمک مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی [4] عددی متناظر با هر یک از این اعداد فازی به دست می‌آید که در کنار یکدیگر خروجی‌های یک واحد مجازی به نام گزینه هدف را تشکیل می‌دهند. مقایسه هر گزینه با این گزینه هدف، با استفاده از مدل کوک و کرس [3]، معیار تمایز گزینه‌ها با یکدیگر خواهد بود.

2. مقدمه ای بر مفاهیم فازی و رأی‌گیری ترجیحی

1.2 اعداد فازی LR

کاربرد اعداد فازی مستلزم محاسبات پیچیده و طولانی است و این برای اهداف عملی مناسب نیست زیرا هنگام استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی مانند هر نظریه دیگری، در مواجهه با مسایل عملی، کارائی محاسباتی بسیار اهمیت دارد. دوبویس و پرید [5] با معرفی اعداد فازی LR تا اندازه‌ای کار را آسان کرده‌اند. این اعداد نوع خاصی از اعداد فازی هستند که ویژگی آن‌ها در تابع عضویت آن‌هاست. همان‌طور که خواهیم دید اعمال جبری با این نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است. این ویژگی باعث شده است که در بسیاری از کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی، از این نوع اعداد استفاده گردد.

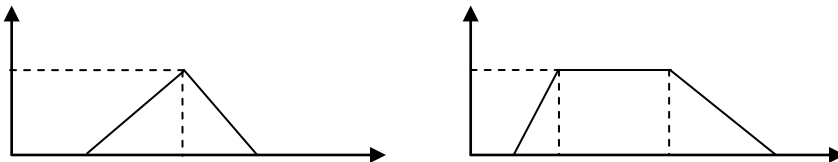
تعریف 1 اگر عدد فازی \tilde{A} دارای تابع عضویتی به صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{x}-x^l}{x^m-x^l}\right) & x^l \leq \bar{x} \leq x^m \\ R\left(\frac{x^u-\bar{x}}{x^u-x^m}\right) & x^m \leq \bar{x} \leq x^u \end{cases} \quad (1)$$

باشد که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $L(0) = R(0) = 1$ ، آن گاه \tilde{A} را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می دهیم. x^m را مقدار نمائی یا میانی و $\alpha = x^m - x^l$ و $\beta = x^u - x^m$ را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست \tilde{A} می نامیم. تعریف 2 اگر $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$ ، \tilde{A} را یک عدد فازی L نامیده و با نماد $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_L$ نشان می دهیم.

دسته خاصی از اعداد فازی LR ، اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای هستند. یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)$ یا به اختصار $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ نمایش داده می شود که در آن x^m مقدار میانی و α و β به ترتیب گستره چپ و راست عدد نامیده می شود. بطور مشابه، عدد فازی دوزنقه ای به صورت $\tilde{A} = (x^{m_1}, x^{m_2}, \alpha, \beta)$ یا به اختصار $\tilde{A} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$ تعریف می شود که x^{m_1} و x^{m_2} مقادیر میانی و α و β به ترتیب گستره چپ و راست عدد هستند. مثالی از این اعداد در شکل 1 نشان داده شده است.

2-2 مدل کوک و کرس



شکل 1. اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای

کوک و کرس [3] برای نخستین بار از مدل اصلاح شده تحلیل پوششی داده ها در یک مساله رأی گیری ترجیحی استفاده نمودند. خروجی ها در این مدل را تعداد آراء در جایگاه های رتبه ای تشکیل می دهند و ورودی همه واحدهای تصمیم گیری، عدد 1 می باشد. مدل پیشنهادی توسط کوک و کرس به صورت زیر است:

ظرافت انگیز لنگرودی، روشی برای رتبه بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده ها

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{j=1}^n u_j v_{ij} p_j \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n u_j v_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & u_j - u_{j+1} \geq d(j, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ & u_n \geq d(n, \varepsilon). \end{aligned}$$

در مدل فوق v_{ij} تعداد دفعاتی است که کاندیدای i در جایگاه رتبه ای j قرار می گیرد و u_j وزن جایگاه j را نشان می دهد. به وضوح $u_j \geq u_{j+1}$ ، و بنابراین قید $u_j - u_{j+1} \geq d(j, \varepsilon)$ ترجیح جایگاه رتبه ای j بر $j+1$ را نشان می دهد. نماد $d(j, \varepsilon)$ تابعی است غیرافزایشی از ε که تابع شدت تمایز نامیده می شود. هاشیموتو [6] با افزودن قید $u_j - 2u_{j+1} + u_{j+2} \geq 0$ ، $1 = j$ ، $2, \dots, n-2$ به مدل کوک و کرس [3] تلاش نمود تا مشکل این مدل را در تفکیک واحدهای کارا حل نماید.

3 گزینه ارجح در یک مسأله رأی گیری ترجیحی گروهی

در این بخش یک الگوریتم چهار مرحله ای برای تعیین گزینه ارجح به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

گام 1. تعریف اعداد فازی برای رتبه بندی مجموعه ای از گزینه ها در یک مسأله ترجیحی گروهی در یک مسأله ترجیحی هر کاندیدا ی j ($j = 1, 2, \dots, n$) با رأی تعدادی رأی دهنده در جایگاه رتبه ای اول (v_{1j})، دوم (v_{2j})، ...، جایگاه رتبه ای m (v_{mj}) قرار می گیرد [3] را ببینید). فرض کنیم v_{rj} تعداد آرای باشد که در آن رأی دهندگان گزینه j را در جایگاه r قرار می دهند. گزینه فازی را به صورت اعداد مثلثی $\tilde{v}_{r(n+1)} = (m_r, \alpha_r, 0)_{LR}$ ، که در آن m_r و α_r به ترتیب مقدار میانی و گسترش چپ عدد فازی $\tilde{v}_{r(n+1)}$ هستند تعریف می کنیم. توابع عضویت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mu_{\tilde{v}_{r(n+1)}}(\bar{v}_{r(n+1)}) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{v}_{r(n+1)} - v_{r(n+1)}^l}{v_{r(n+1)}^m - v_{r(n+1)}^l}\right) & v_{r(n+1)}^l \leq \bar{v}_{r(n+1)} \leq v_{r(n+1)}^m \quad \forall r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

در فرمول فوق $v_{r(n+1)}^l = \min \{v_{rj}\}_{j=1,2,\dots,n}$ و $v_{r(n+1)}^m = \max \{v_{rj}\}_{j=1,2,\dots,n}$ به ترتیب مقدار میانی و کمترین مقدار در بازه عدد فازی فوق هستند. با فرض $L(x) = x$ تابع فوق، تابع عضویت یک عدد مثلثی خواهد بود. از این پس، در تمام این فصل، منظور از عدد فازی مثلثی، چنین عددی است.

گام 2. استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی به منظور یافتن گزینه هدف

در این گام با در نظر گرفتن عدد فازی مثلثی (3) در مدل برنامه ریزی خطی فازی زیر و حل آن، گزینه ای مجازی، که از این پس گزینه هدف نامیده می شود، تولید می گردد:

$$\text{Min } Z = \Omega_{n+1} - \sum_{k=1}^n d(n+k, \varepsilon) \lambda_{n+k} \quad (4)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 + \Omega_{n+1},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{1j} - \lambda_{n+1} \geq \tilde{v}_{1(n+1)} - \Omega_{n+1},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{v}_{rj} + \lambda_{n+k} - \lambda_{n+k+1} \geq \tilde{v}_{r(n+1)} - \Omega_{n+1}, \quad k=1, \dots, n-1,$$

$$\lambda_j \geq 0,$$

$$\Omega_{n+1} \text{ free.}$$

هدف از حل مدل (4) یافتن واحدی است که از تجمیع مقادیر ستاده حاصل می گردد و مقایسه هر واحد تصمیم گیری با آن معیاری برای ارزیابی آن ها خواهد بود.

چگونگی طراحی ساختار مدل (4)، نمادهای به کار گرفته شده در آن و همچنین روش حل مدل بطور مبسوط در [4] شرح داده شده است. فرض کنیم $r=1, 2, \dots, n$ عناصر گزینه هدف باشند.

گام 3. ارزیابی گزینه ها در یک مقایسه زوجی

مدل کوک و کرس [3] را به این صورت به کار می گیریم که در یک مقایسه زوجی هر گزینه با گزینه مجازی هدف، مقایسه می گردد. اینکار با حذف داده های گزینه مورد ارزیابی از قيود انجام می گیرد. با اینکار در حقیقت، قيود برای تمام گزینه ها در ارزیابی زوجی، یکسان خواهد بود. مقایسه با یک مجموعه قيود ثابت ارزیابی منصفانه تری را موجب خواهد شد. با استفاده از مدل (2) مدل برنامه ریزی خطی زیر برای همه گزینه ها اجراء می شود:

$$\text{Max } z_p = \sum_{r=1}^n u_r v_{pr}$$

s.t.

(5)

$$\sum_{r=1}^n u_r v_r^* \leq 1,$$

$$u_r - u_{r+1} \geq d(r, \varepsilon), \quad r=1, 2, \dots, n-1,$$

$$u_n \geq d(n, \varepsilon).$$

بدیهی است که تعداد قيود در مدل فوق کمتر از مدل اصلی کوک و کرس است، بویژه وقتی که تعداد گزینه ها قابل توجه باشد، به تعداد این گزینه ها به مسأله، قيد اضافه می گردد. در مدل (5) بدون توجه به تعداد گزینه ها،

ظرافت انگیز لنگرودی، روشی برای رتبه بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده ها

به جای قیود متناظر با گزینه ها، تنها قید $\sum_{r=1}^n u_r v_r^* \leq 1$ را خواهیم داشت و این امر از لحاظ محاسباتی از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد.

4 مثال توضیحی

در این مثال چگونگی به کار گیری روش پیشنهادی برای رتبه بندی 4 گزینه توضیح داده می شود. 20 رأی دهنده از دید خود این گزینه ها را رتبه بندی نمودند که نظرات آن ها در جدول 1 دیده می شود.

جدول 1. نظرات رأی دهندگان در مورد چهار گزینه

رأی دهنده	رتبه بندی			
	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	1	4	2
3	3	2	1	4
4	2	1	3	4
5	4	2	3	1
6	4	2	1	3
7	2	3	1	4
8	1	4	2	3
9	1	3	4	2
10	3	2	4	1
11	4	3	3	1
12	1	2	3	4
13	1	3	2	4
14	1	4	3	2
15	4	2	3	1
16	4	3	1	2
17	4	2	1	3
18	3	4	2	1
19	2	4	3	1
20	2	3	1	4

گام 1. در جدول 2 تعداد دفعات قرار گرفتن گزینه ها در جایگاه ها و در سطر آخر، اعداد فازی متناظر با آن ها دیده می شوند.

جدول 2. تعداد دفعات قرار گرفتن گزینه ها در جایگاه ها و اعداد فازی متناظر با آن ها

گزینه	رتبه			
	1	2	3	4
1	5	2	6	7
2	5	7	4	4
3	4	7	6	3
4	6	4	4	6
Fuzzy group $(m, \alpha, 0)_{LR}$	(6و2و0)	(7و5و0)	(6و2و0)	(7و4و0)

توابع عضویت مرتبط با هر خروجی فازی به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{v}_{15}}(\bar{v}_{15}) &= \frac{1}{2}(\bar{v}_{15} - 4) \quad \bar{v}_{15} \in [4, 6] & \mu_{\bar{v}_{25}}(\bar{v}_{25}) &= \frac{1}{5}(\bar{v}_{25} - 2) \quad \bar{v}_{25} \in [2, 7] \\ \mu_{\bar{v}_{45}}(\bar{v}_{45}) &= \frac{1}{4}(\bar{v}_{45} - 3) \quad \bar{v}_{45} \in [3, 7] & \mu_{\bar{v}_{35}}(\bar{v}_{35}) &= \frac{1}{2}(\bar{v}_{35} - 4) \quad \bar{v}_{35} \in [4, 6] \end{aligned}$$

گام 2. به کارگیری تحلیل پوششی داده ها به منظور یافتن گزینه هدف در این گام از اعداد فازی گام 1 ، با استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی، مقادیری غیر فازی استخراج می گردد. برای این منظور از حل مدل (4) خواهیم داشت:

رتبه	1	2	3	4
$M(\tilde{v}_r) = x^m + \frac{1}{4}(v_{r(n+1)}^l - v_{r(n+1)}^m)$	5.62	5.06	5.62	6.25

بنابراین گزینه مجازی تولید شده در این گام به صورت زیر خواهد بود.

$$(M(\tilde{v}_1), M(\tilde{v}_2), M(\tilde{v}_3), M(\tilde{v}_4)) = (5.62, 5.06, 5.62, 6.25) \quad (6)$$

گام 3. مقایسه هر گزینه با گزینه هدف تولید شده در گام 2 در این گام هریک از گزینه ها بطور جداگانه با گزینه مجازی (6) مقایسه می گردند. به عنوان مثال مدل برنامه ریزی خطی متناظر با گزینه اول به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } z_1 &= 5u_1 + 2u_2 + 6u_3 + 7u_4 & (7) \\ \text{s.t.} & \\ 5.62u_1 + 5.06u_2 + 5.62u_3 + 6.25u_4 &\leq 1, \\ u_1 - u_2 &\geq \varepsilon, \\ u_2 - u_3 &\geq \varepsilon, \\ u_3 - u_4 &\geq \varepsilon, \\ u_4 &\geq \varepsilon. \end{aligned}$$

با فرض $\varepsilon = 0.018132$ و $d(r, \varepsilon) = \varepsilon$ مقدار بهینه $z_1^* = 0.816$ برای مدل فوق به دست می آید. جدول زیر مقادیر بهینه و رتبه هر گزینه مورد بررسی در این مثال را نشان می دهد:

جدول 3. رتبه بندی گزینه ها توسط مدل پیشنهادی و روش کوک و کرس [3]

گزینه	رتبه	رتبه	رتبه	گزینه
	$d(i, \varepsilon) = \varepsilon$	مدل پیشنهادی	رتبه	$(d(i, \varepsilon) = \varepsilon)$ مدل کوک و کرس
	$\varepsilon_{\max} = 0.01639344$	$\varepsilon_{\max} = 0.018132$		
1	0.849	4	0.816	4
2	1	1	0.961	1
3	0.981	2	0.943	2
4	0.943	3	0.907	3

با مقایسه نتیجه مدل پیشنهادی با روش کوک و کرس در جدول 3 تفاوتی در رتبه بندی مشاهده نمی شود ولی همانطور که اشاره شد، یکی از مزیت های مدل پیشنهادی کارایی محاسباتی آن، مخصوصاً برای مسایل با ابعاد بزرگ، است.

5 نتیجه گیری

برای تجمیع آراء رأی دهندگان و رتبه بندی گزینه ها در یک سیستم رأی گیری ترجیحی روش های متعددی پیشنهاد شده است، که در آن تلاش می شود امتیازی را برای هر گزینه حاصل نموده و براساس آن رتبه بندی منصفانه ای به دست آید. این مقاله در یک الگوریتم چهار مرحله ای، در ابتدا گزینه هدف را با استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی محاسبه می نماید. سپس از ادغام مدل کوک و کرس و روشی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری کارا موسوم به اندرسن و پترسن [7] و با استفاده از مقایسه زوجی هر گزینه با مرز کارایی ایجاد شده توسط قید حاصل از گزینه هدف، که برای همه گزینه ها یکسان است، الگوریتمی کارا برای رتبه بندی گزینه ها در یک تصمیم گیری ارائه گردید. در این مقاله مفهوم فازی برای داده هایی به کار گرفته شد که ماهیتاً غیر فازی هستند.

منابع

- [1] Hwang, C.L., Lin, M.J., (1987). Group decision making under multiple criteria, Lecture Notes in Economics and Mathematics System. No.281, Springer Verlag, Berlin
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
- [3] Cook, W.D., Kress, M., (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings, *Management Science* 36(11), 1302-1310.
- [4] Zerafat Angiz, L. M., Emrouznejad, A., Mustafa, A., Al-Eraqi, A. S., (2010). Aggregating preference ranking with fuzzy data envelopment analysis. *Knowledge-Based Systems* 23, 512-519.
- [5] Dubois, D., Prade, H., (1979). Fuzzy real algebra: Some results. *Fuzzy Sets and Systems* 2, 327-348.
- [6] Hashimoto, A., (1997). A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note. *European Journal of Operational Research* 97(3), 600-604.
- [7] Andersen, P., Petersen, N.C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science* 39 (10), 1261-1294.

