مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۳ (پیاپی ۳۰)، پائیز۹۰، ص ص ۱۱۳-۹۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تراکم لایه ای واندازه درجه تراکم عمومی لایه ای

فرزاد رضائی بالف*[1]، رضاشاهوردی[1]، راحله سادات میرفندرسکی[2]
[1] دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر،دانشکده فنی ومهندسی،گروه ریاضی، قائم شهر، ایران
[2] دانشجوی کارشناسی ارشددانشگاه آزاد اسلامی واحدقائم شهر،تحصیلات تکمیلی،گروه ریاضی، قائم شهر، ایران

رسید مقاله: پنجم اردیبهشت ماه ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: پانزدهم مرداد ماه ۱۳۹۰

چکیده
مفهوم اقتصادی تراکم اخیرا در بسیاری از تحقیقات مربوط به تحلیل پوششی داده ها (DEA) بررسی شده و تراکم با روش های مختلف به دست آمده است. همچنین تراکم عمومی، تعیین واندازه درجه تراکم عمومی معرفی شده است [۱] . می دانیم ناکارایی یک واحد تصمیم گیرنده شرط لازم برای وجود تراکم آن واحد است، همچنین برای تعیین تراکم یک واحد، ابتدا تصویر آن واحد (در ماهیت خروجی) را باید روی مرز کارایی بیابیم و سپس تراکم تصویر را مورد ارزیابی قرار دهیم. حال سوال زیر پیش می آید: آیا همواره درعمل می توان یک واحد ناکارا را در ماهیت خروجی روی مرز کارایی تصویر کرد؟ از اینرو برای پاسخ به این پرسش ایده تراکم لایه ای را مطرح نمودیم. به بیان دیگر، هدف از به دست آوردن تراکم لایه ای این است که گاهی یک واحد تحت ارزیابی نمی تواند تمام ناکارایی خود را از بین ببرد. این مقاله به منظور ازبین بردن تراکم واحد ارزیابی شونده (DMU)، تراکم لایه ای را معرفی واندازه درجه تراکم عمومی را درلایه های مختلف محاسبه کرده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، تراکم، کارایی.

---

۱ مقدمه
تحلیل پوششی داده ها (DEA)، یک روش برنامه ریزی برای محاسبه کارایی نسبی یک گروه متجانس از واحدهای تصمیم گیرنده با چندین ورودی و چندین خروجی است. یکی از کاربردهای مهم تحلیل پوششی داده ها، مفهوم تراکم است. تراکم برای نخستین بار توسط فار و سون سون [۲] مطرح شد، و پس از آن توسط فار و گروسکوف [۳] شکل کامل تری بخود گرفت. فارمدلی در تحلیل پوششی داده ها برای ارزیابی تراکم ارایه کرد که تنها روش کاربردی جهت ارزیابی تراکم در مسایل عملی در آن زمان بود[۴]. این امر موجب گردید تا تحقیقات بیشتری در این زمینه برای محاسبه تراکم صورت گیرد، روش ارایه شده توسط فار دارای مشکلاتی بود، مثلا واحدی که تراکم نداشت را دارای تراکم معرفی می کرد، تا این که کوپر روشی کامل تری برای محاسبه تراکم ارایه کرد[۵].

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *frb_balf@yahoo.com*

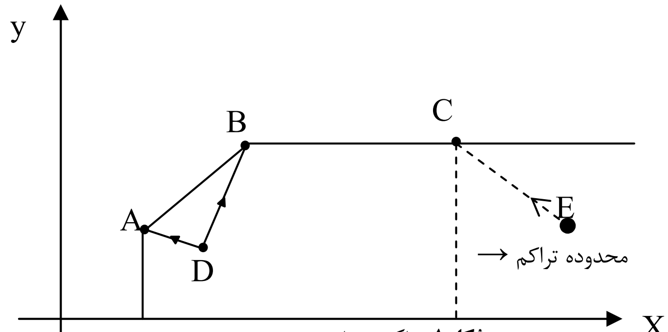
تحقیقات کوپر توسط براکت گسترش یافت و در نهایت روش BCSW (براکت – کوپر – شین – ونگ) نام گرفت [۶]. کوپر و همکارانش روش جدیدی برای محاسبه تراکم معرفی کردند که بر خلاف روش های قبلی (که ارزیابی تراکم منجر به حل دو مدل از مدل های DEA می گشت) در این روش تنها با حل یک مدل مقدار تراکم محاسبه می شد، به همین دلیل به روش تک مرحله ای معروف شد [۷]. از دیگر مدل های ارایه شده برای ارزیابی تراکم مدل New بود که توسط وی و یان معرفی گردید [۸]. درسال های اخیر نیز بسیاری از دانشمندان با مقالات متعدد در مورد تراکم بحث نمودند به عنوان مثال تن و ساهو یک دستورالعمل غیر پارامتریک برای اندازه گیری حساسیت شاخص تولید همراه با تراکم پیشنهاد دادند [۹].
همانطور که گفته شد تراکم با مجموعه تلاش های تحقیقاتی کوپر و همکارانش مورد بررسی جدی قرار گرفت ([۶]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۳]). آن ها در صدور تراکم بر مبنای تحلیل پوششی داده ها سهم عمده ای داشتند. اما یک نقطه ضعف در تحقیقات قبلی وجود داشت و آن این که برای محاسبه تراکم جواب های بهینه چندگانه مورد توجه قرارنگرفته بود (به عبارت دیگر تصویر یک واحد تحت ارزیابی روی مرزکارایی، یکتا بود). در صورتی که تصویریک واحد تصمیم گیرنده یکتا نباشد تراکم منحصر به فرد به دست نمی آید و این یک نقطه ضعف مطالعات قبلی بود. برای برطرف کردن این مشکل سویو شی و سکیتانی[۱] مقاله ای ارایه کردند که این ضعف را از بین برده است. مقاله آن ها روشی برای محاسبه درجه تراکم ارایه می دهد.
می دانیم در تحلیل پوششی داده ها برخی از واحدهای ناکارا می توانند تراکم اختیار کنند، به بیان دقیق تر شرط داشتن تراکم توسط یک واحد تصمیم گیرنده ناکارایی آن واحد است. حال اگر بخواهیم در یک سیستم بزرگ تراکم واحدها را محاسبه کنیم. ممکن است دچار مشکلاتی بشویم، به عبارت دیگر نتوا نیم برای محاسبه تراکم در ماهیت ورودی یک واحد تصمیم گیرنده، آن واحد را در عمل روی مرز کارایی (در ماهیت خروجی) تصویر کنیم. از این رو نیازمندیم در زیر سیستم ها روند را دنبال کنیم، به بیان دیگر برای محاسبه تراکم ناچاریم مجموعه امکان تولید را به نوعی محدودتر کنیم (کوچکتر می کنیم) این عمل به کمک فرایند لایه سازی محقق می شود.

۲ پیشینه تراکم

۲-۱ تعریف تراکم

یک واحد تصمیم گیرنده دارای تراکم است هر گاه کاهش در یک یا چند ورودی آن همراه با افزایش در یک یا چند خروجی آن باشد بدون این که ورودی و خروجی دیگر واحد ها بدتر شود و همچنین افزایش در یک یا چند ورودی آن همراه با کاهش در یک یا چند خروجی آن باشد بدون این که ورودی ها و خروجی های دیگر واحد ها بدتر شوند.

۲-۲ توصیف تراکم در ماهیت خروجی BCC



شکل ۱. تراکم در ماهیت خروجی

ازشکل ۱ واحد E دارای تراکم است، چون با کم کردن ورودی آن، خروجی آن می تواند افزایش یابد و با افزایش ورودی آن، خروجی آن در مجموعه امکان تولید امکان افزایش ندارد. حال اگر واحد D را مورد ارزیابی قرار دهیم، می بینیم این واحد دارای تراکم نیست، زیرا با کم کردن ورودی آن، خروجی آن افزایش پیدا کرده و همچنین با افزایش ورودی آن خروجی نیز افزایش پیدا می کند (واحدی مانند B که خروجی بالاتری دارد). مطابق شکل۱، در واقع تمام واحدهایی که ورودی بیشتر از C و خروجی کمتر از C دارند دارای تراکم می باشند.

۲-۳ تعیین تراکم باروش FGL درماهیت خروجی

این روش توسط فار و گروسکوف و لاول (FGL) مطرح شد [۴]. این روش فقط وجود و یا عدم وجود تراکم را مشخص می کند ولی مقدار تراکم را به دست نمی دهد. در ادامه روش FGL را در ماهیت خروجی برای DMU_k بررسی می کنیم.

روش FGL روی فرم پوششی مدلBCC در ماهیت خروجی با توجه به دو مجموعه امکان تولید p و p محدب در دو مرحله بیان شده، که در زیر ارایه می شود.

$$P=\{(x,y)\left|\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_j x_j \le x,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_j y_j \ge y,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j =1,\ \lambda_j \ge 0,\ j=1,\dots,n\right.\}$$

$$P_{convex}=\{(x,y)\left|\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_j x_j = x,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_j y_j \ge y,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j =1,\ \lambda_j \ge 0,\ j=1,\dots,n\right.\}$$

مرحله اول FGL

$$
\begin{aligned}
& Max\varphi = \varphi^{*} \\
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{ik}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \phi y_{rk}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \phi : URS, \; \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

مرحله دوم FGL

$$
\begin{aligned}
& Max \;\; \beta = \beta^{*} \\
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \beta y_{rk}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \beta : URS, \;\; \lambda_j \ge 0 \;\; , \qquad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

اگر مقدار بهینه مدل (۲-۱)، φ^{*} و مقدار بهینه مدل (۲-۲)، β^{*} بنامیم، آن گاه تعریف می کنیم.

$$
OC(\varphi^{*}, \beta^{*}) = \frac{\varphi^{*}}{\beta^{*}} \tag{3}
$$

که دراین صورت وجود یا عدم وجود تراکم به صورت زیرتعیین می گردد.

الف. اگر $OC(\phi^{*}, \beta^{*}) > 1$, $OC(\theta^{*}, \beta^{*}) > 1$ آن گاه درورودی های DMU_k تراکم وجود دارد.

ب. اگر $OC(\phi^{*}, \beta^{*}) = 1$, $OC(\theta^{*}, \beta^{*}) = 1$ آن گاه در ورودی های DMU_k تراکم وجود ندارد.

۲-٤ تعریف تراکم عمومی

یک DMU دارای تراکم عمومی است اگر و فقط اگر آن روی مرز P محدب باشد و در P محدب فعالیتی داشته باشیم که با بکارگیری منابع کمتر در یک یا چند ورودی آن DMU، نتایج بیشتری در یک یا چند خروجی ایجاد کند [۸].

۵-۲ تراکم عمومی با تصاویر چند گانه

برای تعیین تراکم عمومی از روش زیر که مرکب از دو مساله برنامه ریزی خطی است استفاده می کنیم [۱].

گام اول. $\delta > 0$ را بطور دلخواه انتخاب کنید (δ یک عدد حقیقی است) و مساله زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
& Max\ \varepsilon + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
& s.t. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4) \\
& -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + w \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} = 1, \\
& \beta y_{rk} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - w = \beta, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& v_i x_{ik} - \varepsilon \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \varepsilon \le \delta, \\
& s_r^+ \ge 0,\ u_r \ge 0,\ \lambda_j \ge 0,\ \ r = 1,\dots,s,\ \ j = 1,\dots,n,\ i = 1,\dots,m, \\
& v_i : URS,\ w : URS,\ \beta : URS,\ \varepsilon : URS.
\end{aligned}
$$

عدد حقیقی دلخواه (δ) ضامن وجود جواب بهینه (۴) است. چون ε کوچکترین مقدار $v_i x_{ik}\,(i=1,\dots,m)$ می باشد $\varepsilon = \min\{\min\{v_i x_{ik} \mid i=1,\dots,m\},\delta\}$ نشان می دهد عدد دلخواه δ از بالا کراندار است در نتیجه (۴) همیشه جواب بهینه دارد.

جواب بهینه (۴) را ($\lambda^*, \beta^*, s^{+^*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*$) در نظر بگیرید. تراکم عمومی نقطه تصویرشده از DMU_k یعنی

($x_k, \beta^* y_k$) را به صورت زیر تعیین کنید.

الف) اگر $\varepsilon^* > 0$ باشد پس ($x_k, \beta^* y_k$) تراکم عمومی دارد.

ب) اگر $\varepsilon^* < 0$ باشد پس ($x_k, \beta^* y_k$) تراکم عمومی ندارد.

ج) اگر $\varepsilon^* = 0$ و $\sum_{r=1}^{s} s_r^{+*} > 0$ پس ($x_k, \beta^* y_k$) تراکم عمومی دارد.

د) اگر $\varepsilon^* = 0$ و $\sum_{r=1}^{s} s_r^{+*} = 0$ پس برو به گام ۲

گام ۲. مساله زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
& Max\,\alpha \\
& s.t \\
& -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + w \le 0, && j=1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} = 1, && (5) \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - w = \beta^*, \\
& u_r y_{rk} - \alpha \ge 0, && r=1,\dots,s, \\
& v_i \ge 0,\quad u_r \ge 0,\quad \alpha \ge 0, && i=1,\dots,m,\quad r=1,\dots,s,\ w:URS.
\end{aligned}
$$

β^* از روی جواب بهینه (۴) به دست آمده است. کران پایین $u_r y_{rk}$ با α نشان داده شده بدین صورت که $\alpha = \min\{u_r y_{rk} \mid r=1,\dots,s\}$ و مساله (۲-۵) کران پایین را ماکزیمم می کند. بر مبنای بهینگی مقدار هدف (۵) تراکم عمومی DMU_k مانند زیر تعیین می شود.

الف) اگر $\alpha^* > 0$ پس $(x_k, \beta^* y_k)$ تراکم عمومی ندارد.

ب) اگر $\alpha^* = 0$ پس $(x_k, \beta^* y_k)$ تراکم عمومی دارد.

قضیه ۱. فرض کنید $\delta > 0$ و $(\lambda^*, \beta^*, s^{+^*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$ جواب بهینه مدل (۴) باشد. فرض کنید $\Delta^* = \sum_{r=1}^{s} s_r^{+^*}$. نشان دهید:

۱) اگر $\varepsilon^* < 0$ یا ($\varepsilon^* = 0$ و $\Delta^* > 0$) پس DMU_k تراکم عمومی دارد.

۲) اگر $\varepsilon^* > 0$ پس DMU_k تراکم عمومی ندارد.

۳) اگر $\varepsilon^* = 0$ و $\Delta^* = 0$ باشد، مقدار بهینه (۲-۵) را α^* قرار دهید. اگر $\alpha^* = 0$ باشد، DMU_k تراکم عمومی دارد در غیر این صورت تراکم عمومی ندارد.

اثبات. به مرجع [۱۴] مراجعه شود.

قضیه ۲. فرض کنید $\delta > 0$ و $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$ جواب بهینه مدل (۲-۴) باشد و مقدار بهینه (۲-۱) را φ^* قرار دهید. نشان دهید:

۱) اگر $\varepsilon^* \ge 0$ باشد آن گاه $\varphi^* = \beta^*$ بنابراین DMU_k طبق رابطه (۲-۳) تراکم ندارد.

۲) اگر $\varepsilon^* < 0$ آن گاه $\varphi^* > \beta^*$. بنابراین DMU_k طبق رابطه (۲-۳) تراکم دارد.

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود.

۲-۶ درجه تراکم عمومی

رابطه (۶) زیر درجه تراکم عمومی را نشان می دهد (به مرجع [۱] مراجعه کنید).

$$\beta^* = (\max \quad \min \left\{x_{ik} v_i^* \middle| i = 1 \ ,..., m\right\})^{-1} \tag{۶}$$

که (v^*, u^*, w^*) جواب بهینه دوال مدل (۲) می باشد.

قضیه۳. فرض کنید $\delta > 0$ و $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$ جواب بهینه مدل (۲-۴) باشد تعریف کنید:

$$\Omega = \left\{(v^{\#}, u^{\#}, w^{\#}) \ \middle| \ \text{یک جواب بهینه (۲-۲)} \ (v^{\#}, u^{\#}, w^{\#}) \right\}$$

اگر DMU_k تراکم عمومی داشته باشد آن گاه :

$$\varepsilon^* = \max_{(v^{\#}, u^{\#}, w^{\#}) \in \Omega} \min \left\{x_{ik} v_i^{\#} \middle| i = 1,..., m\right\} = \max_{(v^{\#}, u^{\#}, w^{\#}) \in \Omega} \min \left\{x_{ik} v_i^{\#} \middle| v_i^{\#} \le 0\right\}$$

و

$$\frac{\beta^*}{\varepsilon^*} = \beta^* (\max \ \min \left\{x_{ik} v_i^{\#} \middle| i = 1,..., m\right\})^{-1}$$

درجه تراکم عمومی (۶) را نشان می دهد[۱].

۳ تراکم لایه ای

در این قسمت قبل از هر چیز به بیان مرزهای کارایی لایه ای می پردازیم. می دانیم در تحلیل پوششی داده ها هر مجموعه امکان تولید یک مرز کارایی می سازد و با استفاده از آن کارایی واحدها و نیز تراکم واحدها سنجیده می شود. اگر مرز کارایی اصلی که متناظر با واحدهای کارا است را حذف کنیم، واحدهای باقیمانده (واحدهای ناکارا) یک مرز کارایی جدید لایه دوم را ایجاد می کنند. اگر این مرز لایه دوم را نیز حذف کنیم، مرز کارایی لایه سوم، شکل خواهد گرفت و *الی* آخر، تا جایی که هیچ واحدی باقی نماند.

قرار دهید $J^1 = \{1,...,n\}$. تعریف می کنیم $J^{h+1} = J^h - E_p^h$ که در آن $E_p^h = \left\{DMU_K \in J^h \middle| \beta_{kh}^* = 1\right\}$ و $E^h = \left\{DMU_K \in J^h \middle| \varphi_{kh}^* = 1\right\}$ که φ_{kh}^* مقدار بهینه مدل برنامه ریزی خطی (۷) و β_{kh}^* مقدار بهینه مدل برنامه ریزی خطی (۸) است.

.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{kh}^{*} = Max\ \varphi_{kh} \\
&s.t. \\
&\sum_{j \in J^h} \lambda_j x_{ij} \le x_{ik}, \qquad \forall i \in I, \\
&\sum_{j \in J^h} \lambda_j y_{ij} \ge \varphi_{kh}\, y_{rk} \quad \forall r \in O, \\
&\sum_{i \in J^h} \lambda_j = 1, \\
&\lambda_j \ge 0, \qquad \forall j \in J^h.
\end{aligned} \tag{۷}$$

وقتی h=1 باشد، مدل (۷) همان مدل BCC در ماهیت خروجی است. در ماهیت خروجی مدل BCC $\varphi_{kh} \ge 1$ و DMU_{kh} کاراست اگر و فقط اگر $\varphi_{kh}^{*} = 1$، در غیر این صورت DMU_{kh} ناکارا ست. مدل (۷) تمامی واحدها را به صورت مرحله ای در مجموعه E^h، طبقه بندی می کند. برای به دست آوردن تراکم لایه ای نیاز به مدل زیر داریم.

$$\begin{aligned}
&\beta_{kh}^{*} = Max\ \beta_{kh} \\
&s.t. \\
&\sum_{j \in J^h} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \qquad \forall i \in I, \\
&\sum_{j \in J^h} \lambda_j y_{rj} \ge \beta_{kh} y_{rk}, \qquad \forall r \in O, \\
&\sum_{i \in J^h} \lambda_j = 1, \\
&\lambda_j \ge 0, \qquad \forall j \in J^h.
\end{aligned} \tag{۸}$$

وقتی h=1 باشد مدل (۸) همان مدل P محدب در ماهیت خروجی است، در این مدل $\beta^{*} \ge 1$ است، واحد DMU_{kh} در P محدب کاراست اگر و فقط اگر $\beta_{kh}^{*} = 1$ باشد در غیر این صورت آن واحدی ناکاراست، این مدل تمام واحدها را به صورت مرحله ای در مجموعه های E_p^h طبقه بندی می کند.

حال تراکم را در لایه های مختلف با روش FGL به دست می آوریم. برای تعیین تراکم در هر لایه از رابطه $OC(\varphi_{kh}^{*}, \beta_{kh}^{*}) = \dfrac{\varphi_{kh}^{*}}{\beta_{kh}^{*}}$ استفاده می کنیم.

۱. اگر $OC(\varphi_{kh}^{*}, \beta_{kh}^{*}) > 1$ پس در ورودی های DMU_{kh} نسبت به E^h تراکم وجود دارد.

۲. اگر $OC(\varphi_{kh}^{*}, \beta_{kh}^{*}) = 1$ باشد پس در ورودی های DMU_{kh} نسبت به E^h تراکم وجود ندارد.

وقتی DMUهای کارا در لایه اول را حذف کنیم تعدادی از DMUهای متراکم (واحدهایی که تراکم دارند)که روی مرز P محدب قرار دارند، حذف می شوند. برای لایه بعدی دوباره رابطه را امتحان می کنیم. در هر مرحله وقتی از لایه ای به لایه دیگر می رویم DMUهای متراکم تغییر می کنند یعنی ممکن است یک DMUدر یک لایه تراکم داشته باشد (نداشته باشد) و در لایه بعد از آن تراکم نداشته باشد (داشته باشد) و این موضوع جالبی است که باید به آن توجه شود، که تاکنون نادیده گرفته شده است.

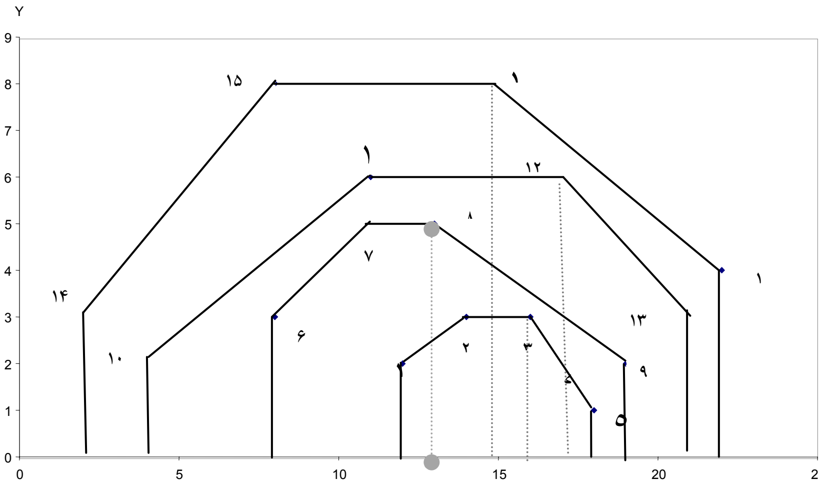
می دانیم ناکارایی یک واحد تصمیم گیرنده شرط لازم برای وجود تراکم آن واحد است، همچنین برای تعیین تراکم یک واحد، ابتدا تصویر آن واحد (در ماهیت خروجی) را باید روی مرز کارایی بیابیم و سپس تراکم تصویر آن واحد را مورد ارزیابی قرار دهیم. حال سوال زیر پیش می آید: آیا همواره درعمل می توان یک واحد ناکارا را در ماهیت خروجی روی مرز کارایی تصویر کرد؟ از اینرو برای پاسخ به این پرسش ایده تراکم لایه ای را مطرح نمودیم. به بیان دیگر، هدف از به دست آوردن تراکم لایه ای این است که گاهی یک DMU نمی تواند تمام ناکارایی خود را از بین ببرد، به عبارتی مقدار ناکارایی نسبت به لایه اول بالاست و در موقعیت عملی نمی تواند به یکباره آن را جبران کند. از اینرو ناکارایی و سپس تراکم آن را نسبت به لایه های مختلف در صورت وجود، به دست می آوریم، تا امکان دسترسی به آن بصورت عملی بیشتر باشد. برای درک بیشتر موضوع به شکل زیر توجه کنید.

٤ مثال عددی برای تعیین تراکم لایه ای

درمجموعه امکان تولید شکل (۲)، ۱۷ واحد تصمیم گیرنده داریم که آن را با جواب مدل (۷) و (۸) به صورت لایه ای در جداول ذیل آمده است.

جدول ۱. واحدهای تحت ارزیابی شامل یک ورودی و یک خروجی

DMU	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
X	۱۲	۱۴	۱۶	۱۷	۱۸	۸	۱۱	۱۳	۱۹	۴	۱۱	۱۷	۲۱	۲	۸	۱۵	۲۲
Y	۲	۳	۳	۲	۱	۳	۵	۵	۲	۲	۶	۶	۳	۳	۸	۸	۴



شکل ۲. مجموعه امکان تولید برای مدل های (۷) و(۸)

با به کارگیری مدل های ۷ و ۸ برروی جدول ۱ جدول زیر را می یابیم.

جدول ۲. تراکم و کارایی در لایه اول

کارایی با (۳-۲)	کارایی با (۳-۱)	حالت تراکم	β^*	φ^*	y	x	DMU
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۴	۴	۲	۱۲	۱
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۲/۶۶۶	۲/۶۶۶	۳	۱۴	۲
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۲/۴۷۶	۲/۶۶۶	۳	۱۶	۳
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۳/۴۲۸	۴	۲	۱۷	۴
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۶/۲۸۵	۸	۱	۱۸	۵
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۲/۶۶۶	۲/۶۶۶	۳	۸	۶
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۱/۶	۱/۶	۵	۱۱	۷
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۱/۶	۱/۶	۵	۱۳	۸
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۲/۸۵۷	۴	۲	۱۹	۹
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۲/۳۳۳	۲/۳۳۳	۲	۴	۱۰
ناکارا	ناکارا	تراکم ندارد	۱/۳۳۳	۱/۳۳۳	۶	۱۱	۱۱
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۱/۱۴۳	۱/۳۳۳	۶	۷	۱۲
ناکارا	ناکارا	تراکم دارد	۱/۵۲۴	۲/۶۶۶	۳	۲۱	۱۳
کارا	کارا	تراکم ندارد	۱	۱	۳	۲	۱۴
کارا	کارا	تراکم ندارد	۱	۱	۸	۸	۱۵
کارا	کارا	تراکم ندارد	۱	۱	۸	۱۵	۱۶
کارا	ناکارا	تراکم دارد	۱	۲	۴	۲۲	۱۷

با توجه به جدول (۲)، E_p^1, E^1 را به دست می آوریم $J^1=\{1,2,...,17\}$ ، $E^1=\{14,15,16\}$ ، $E_P^1=\{14,15,16,17\}$
برای به دست آوردن لایه دوم DMU های کارا در لایه اول را از مجموعه امکان P محدب حذف می کنیم.
قرار دهید: $J^2=J^1-E_P^1=\{1,2,...,13\}$

جدول ۳. تراکم و کارایی در لایه دوم

DMU	x	y	φ^*	β^*	حالت تراکم	کارایی با (۳-۱)	کارایی با (۳-۲)
۱	۱۲	۲	۳	۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۲	۱۴	۳	۲	۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۳	۱۶	۳	۲	۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۴	۱۷	۲	۳	۳	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۵	۱۸	۱	۶	۵/۲۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۶	۸	۳	۱/۴۲۸	۱/۴۲۸	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۷	۱۱	۵	۱/۲	۱/۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۸	۱۳	۵	۱/۲	۱/۲	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۹	۱۹	۲	۳	۲/۲۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۱۰	۴	۲	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۱	۱۱	۶	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۲	۱۷	۶	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۱۳	۲۱	۳	۲	۱	تراکم دارد	نا کارا	کارا

با توجه به جدول (۳)، E_p^2, E^2 را به دست می آوریم. $E_p^2=\{10,11,2,13\}$, $E^2=\{10,11,12\}$ قرار دهید:

$$J^{۳} = J^{۲} - E_p^{۲} = \{۱,۲,...,۹\}$$

جدول ٤. تراکم و کارایی در لایه سوم

DMU	x	y	φ^*	β^*	حالت تراکم	کارایی با (۳-۱)	کارایی با (۳-۲)
۱	۱۲	۲	۲/۵	۲/۵	تراکم ندارد	ناکارا	ناکارا
۲	۱۴	۳	۱/۶۶۶	۱/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۳	۱۶	۳	۱/۶۶۶	۱/۶۶۶	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۴	۱۷	۲	۲/۵	۱/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۵	۱۸	۱	۵	۲/۵	تراکم دارد	ناکارا	ناکارا
۶	۸	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۷	۱۱	۵	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۸	۱۳	۵	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۹	۱۹	۲	۲/۵	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۴)، E_p^3, E^3 را به دست می آوریم. $E_p^3=\{6,7,8,9\}$, $E^3=\{6,7,8\}$

آن گاه قرار دهید: $J^4 = J^3 - E_p^3 = \{1,2,3,4,5\}$

جدول ٥. تراکم و کارایی در لایه چهارم

DMU	x	y	φ^*	β^*	حالت تراکم	کارایی با (۳-۱)	کارایی با (۳-۲)
۱	۱۲	۲	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۲	۱۴	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۳	۱۶	۳	۱	۱	تراکم ندارد	کارا	کارا
۴	۱۷	۲	۱/۵	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا
۵	۱۸	۱	۳	۱	تراکم دارد	ناکارا	کارا

با توجه به جدول (۵)، E_p^4, E^4 را به دست می آوریم. $E^4=\{1,2,3\}$, $E_p^4=\{1,2,3,4,5\}$

پس از بررسی تمام واحدها، که در چهار لایه دسته بندی شده اند و همچنین با توجه به شکل (۱) و جداول (۲) و (۳) و (۴) و (۵) مجموعه امکآن های تولید به چهارمجموعه با مرز کارایی زیر تفکیک می شوند.

مرز لایه اول: $E_p^{1} = \{14,15,16,17\}$

مرز لایه دوم: $E_p^{2} = \{10,11,12,13\}$

مرز لایه سوم: $E_p^{3} = \{6,7,8,9\}$

مرز لایه چهارم: $E_p^{4} = \{1,2,3,4,5\}$

۱. در لایه اول DMU های $\{3,4,5,9,12,13,17\}$ تراکم دارند.

۲. در لایه دوم DMU های $\{5,9,13\}$ تراکم دارند.

۳. در لایه سوم DMU های $\{2,3,4,5,9\}$ تراکم دارند.

۴. در لایه چهارم DMU های $\{4,5\}$ تراکم دارند.

توجه به چند نکته ضروری است.

۱. DMU_2 فقط در لایه سوم تراکم دارد و در بقیه لایه ها تراکم ندارد.

۲. DMU_3 در لایه اول و سوم تراکم دارد و در لایه دوم و چهارم تراکم ندارد.

۳. DMU_4 در لایه های اول و سوم و چهارم تراکم دارد.

۴. DMU_5 در همه لایه ها تراکم دارد.

۵. DMU_9 در لایه اول و دوم و سوم تراکم دارد.

۶. DMU_{13} در لایه اول و دوم تراکم دارد.

۷. DMU_{17}, DMU_{12} در لایه اول تراکم دارد.

به این DMU ها که در برخی لایه ها تراکم دارند و در برخی دیگر لایه ها تراکم ندارند باید توجه نمود.
برخی DMU ها مانند DMU_5 در همه لایه ها تراکم دارند. یعنی با کوچک کردن فضای امکان تولید، همچنان تراکم دارد، این چنین واحدهایی مطلوب نیستند و در بررسیهای عملی واحدهایی با این ویژگی را نادیده می گیریم.

۵ اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف

برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف، مدل (۹) را برای هر واحدهای موجود در هر لایه به کار می بریم تا درجه تراکم عمومی هر DMU_k را برای هر لایه به دست آوریم با توجه به قضیه ۱ و قضیه ۲ داریم.

- اگر $0 > {}^*\varepsilon$ باشد، DMU_k هم تراکم دارد و هم تراکم عمومی دارد.

- اگر $0 < {}^*\varepsilon$ باشد، DMU_k تراکم ندارد و تراکم عمومی هم ندارد.

- اگر $\varepsilon^* = 0$ باشد، تراکم ندارد و برای تعیین تراکم عمومی به Δ^* توجه می کنیم.
- اگر $\Delta^* > 0$ باشد، پس تراکم عمومی دارد و اگر $\Delta^* = 0$ باشد پس مدل (۵-۲) را برای تعیین α^* به کار می بریم.
- اگر $\alpha^* = 0$ باشد، DMU_k تراکم عمومی دارد.
- اگر $\alpha^* > 0$ باشد، DMU_k تراکم عمومی ندارد.

$$
\begin{aligned}
&\nabla_h = \max \ \varepsilon + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
&s.t. \\
&-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + w \le 0, \qquad j \in J^h, \\
&\sum_{j \in J^h}^{m} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \\
&\sum_{j \in J^h}^{m} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \beta y_{rk}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} = 1, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - w = \beta, \\
&\sum_{j \in J^h}^{m} \lambda_j = 1, \\
&v_i x_{ik} - \varepsilon \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
&\varepsilon \le \delta, \\
&s_r^+ \ge 0,\ u_r \ge 0,\ \lambda_j \ge 0,\ v_i : URS,\ \ w : URS,\ \beta : URS,\ \ \varepsilon : URS,\ \ r = 1,\dots,s,\ \ i = 1,\dots,m,\ \ j \in J^h.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

اگر $\varepsilon^* = 0$, $\Delta^* = 0$ باشد برای به دست آوردن α^* مدل زیر را به کار می بریم.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \alpha \\
&s.t. \\
&-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + w \le 0, \qquad j \in J^h, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} = 1, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - w = \beta^*, \\
&u_r y_{rk} - \alpha \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s, \\
&v_i \ge 0, \quad u_r \ge 0, \quad \alpha \ge 0, \quad w : URS, \quad i = 1,\dots,m, \ \ r = 1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

که β^* از بهینه (۹) به دست آمده است.

اگر $(\lambda^*, \beta^*, s^{+*}, v^*, u^*, w^*, \varepsilon^*)$ جواب بهینه مدل (۹) باشد طبق قضیه ۳، $(\frac{\beta^*}{\varepsilon^*})_h$ درجه تراکم عمومی DMU_{kh} در لایه های مختلف می باشد.

٦ مثال عددی برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی در لایه های مختلف

دوباره ۱۷ واحد تصمیم گیرنده در مثال ۴ را برای اندازه گیری درجه تراکم عمومی به کار می بریم. چهارلایه ایجاد می شود که آن ها را بررسی می کنیم.

برای تعیین درجه تراکم عمومی واحدهای هر لایه، ابتدا مدل (۹) را برای آن واحدهای آن لایه می نویسیم، برای تعیین تراکم و تراکم عمومی از قضیه ۱ و قضیه ۲ استفاده می کنیم اگر برای DMU_{kh} ای $\varepsilon^* = 0$, $\Delta^* = 0$ باشد مدل (۱۰) را نیز برای تعیین α^* به کار برده و با توجه به قضیه ۳ درجه تراکم عمومی را برای DMU هایی که تراکم عمومی دارند به دست می آوریم.

جدول ٦. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه اول

DMU	x	y	ε^*	β^*	Δ^*	α^*	تراکم	تراکم عمومی	درجه تراکم عمومی $\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$
۱	۱۲	۲	۰	۴	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۲	۱۴	۳	۰	۲/۶۶۶	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۳	۱۶	۳	-۳/۰۴۷	۲/۴۷۶	۰	–	دارد	دارد	-۰/۸۱۳
۴	۱۷	۲	-۴/۸۵۷	۳/۴۲۸	۰	–	دارد	دارد	-۰/۷۰۶
۵	۱۸	۱	-۱۰/۲۸۶	۶/۲۸۶	۰	–	دارد	دارد	-۰/۶۱۱
۶	۸	۳	۲/۲۲۲	۲/۶۶۶	۰	–	ندارد	ندارد	–
۷	۱۱	۵	۰	۱/۶	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۸	۱۳	۵	۰	۱/۶	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۹	۱۹	۲	-۵/۴۲۸	۲/۸۵۷	۰	–	دارد	دارد	-۰/۵۲۶
۱۰	۴	۲	۱/۶۶۶	۲/۳۳۳	۰	–	ندارد	ندارد	–
۱۱	۱۱	۶	۰	۱/۳۳۳	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۱۲	۱۷	۶	-۱/۶۱۹	۱/۱۴۳	۰	–	دارد	دارد	-۰/۷۰۶
۱۳	۲۱	۳	-۴	۱/۵۲۴	۰	–	دارد	دارد	-۰/۳۸۱
۱۴	۲	۳	۰/۵۵۵	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۱۵	۸	۸	۰/۸۳۳۳	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۱۶	۱۵	۸	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۱۷	۲۲	۴	-۳/۱۴۳	۱	۰	–	دارد	دارد	-۰/۳۱۸

جدول ۷. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه دوم

DMU	x	y	ε^*	β^*	Δ^*	α^*	تراکم	تراکم عمومی	درجه تراکم عمومی $\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$
۱	۱۲	۲	۰	۳	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۲	۱۴	۳	۰	۲	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۳	۱۶	۳	۰	۲	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۴	۱۷	۲	۰	۳	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۵	۱۸	۱	-۱۳/۵	۵/۲۵	۰	–	دارد	دارد	-۰/۳۸۹
۶	۸	۳	۱/۵۲۴	۱/۴۲۸	۰	–	ندارد	ندارد	–
۷	۱۱	۵	۱/۲۵۷	۱/۲	۰	–	ندارد	ندارد	–
۸	۱۳	۵	۰	۱/۲	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۹	۱۹	۲	-۷/۱۲۵	۲/۲۵	۰	–	دارد	دارد	-۰/۳۱۶
۱۰	۴	۲	۱/۱۴۳	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۱۱	۱۱	۶	۱/۰۴۸	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۱۲	۱۷	۶	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۱۳	۲۱	۳	-۵/۲۵	۱	۰	–	دارد	دارد	-۰/۱۹

جدول ۸. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه سوم

DMU	x	y	ε^*	β^*	Δ^*	α^*	تراکم	تراکم عمومی	درجه تراکم عمومی $\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$
۱	۱۲	۲	۰	۲/۵	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۲	۱۴	۳	-۲/۳۳۳	۱/۵	۰	–	دارد	دارد	-۰/۶۴۳
۳	۱۶	۳	-۲/۶۶۶	۱/۶۶۶	۰	–	دارد	دارد	-۰/۶۲۵
۴	۱۷	۲	-۴/۲۵	۱/۵	۰	–	دارد	دارد	-۰/۳۵۳
۵	۱۸	۱	-۹	۲/۵	۰	–	دارد	دارد	-۰/۲۷۷
۶	۸	۳	۱/۷۷۷	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۷	۱۱	۵	۱/۴۶۶۶	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۸	۱۳	۵	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۹	۱۹	۲	-۴/۷۵	۱	۰	–	دارد	دارد	-۰/۲۱

جدول ۹. بررسی درجه تراکم عمومی در لایه چهارم

DMU	x	y	ε^*	β^*	Δ^*	α^*	تراکم	تراکم عمومی	درجه تراکم عمومی $\frac{\beta^*}{\varepsilon^*}$
۱	۱۲	۲	۳	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۲	۱۴	۳	۲/۳۳۳	۱	۰	–	ندارد	ندارد	–
۳	۱۶	۳	۰	۱	۰	۱	ندارد	ندارد	–
۴	۱۷	۲	-۸/۵	۱	۰	–	دارد	دارد	-۰/۱۱۸
۵	۱۸	۱	-۱۸	۱	۰	–	دارد	دارد	-٪۵۵

درجه تراکم عمومی DMU های متراکم در لایه های مختلف را در جدول زیر بیان می کنیم.

جدول ۱۰. مقایسه درجه تراکم عمومی در چهارلایه

DMU	لایه اول	لایه دوم	لایه سوم	لایه چهارم
۲	–	–	-۰/۶۴۳	–
۳	-۰/۸۱۳	–	-۰/۶۲۴	–
۴	-۰/۷۰۶	–	-۰/۳۵۳	-۰/۱۱۸
۵	-۰/۶۱۱	-۰/۳۸۹	-۰/۲۷۷	-۰/۰۵۵
۹	-۰/۵۲۶	-۰/۳۱۶	-۰/۲۱	–
۱۲	-۰/۷۰۶	–	–	–
۱۳	-۰/۳۸۱	-۰/۱۹	–	–
۱۷	-۰/۳۱۸	–	–	–

علامت منفی درجه تراکم عمومی، مربوط به علامت ε^* می باشد که دلیلی بر وجود تراکم عمومی است. با توجه به سطرها
می بینیم هر DMU در صورت داشتن تراکم عمومی، با محدود شدن مجموعه امکان تولید یا به عبارتی با پیشروی لایه ها، درجه تراکم عمومی افزایش پیدا می کند در هر لایه، هر چه DMU از حد شروع تراکم در ورودی، فاصله بیشتری داشته باشد درجه تراکم عمومی بیشترمی شود.

۷ نتیجه گیری

به علت پراکندگی واحدها در مجموعه امکان تولید برای سیستمهای بزرگ، ممکن است درتعیین تراکم یک واحد، بخصوص واحدی که نمی تواند تمام ناکارایی خود را ازبین ببرد و خود را به مرز کارایی برساند، با مشکلاتی روبرو شویم. از این رو مجموعه امکان تولید را به کمک فرایند لایه سازی به مجموعه هایی کوچکتر تبدیل نموده و تراکم و تراکم عمومی را در لایه ها ی مختلف بررسی می کنیم، به بیان دقیق تردر این روش بجای استفاده از یک مجموعه امکان تولید بزرگ از چند مجموعه امکان تولید کوچک استفاده می شود. به نوعی می توان ایده ای مشابه به بحث برنامه ریزی پویا را بکار گرفت، ازاین رو بخاطرارتباط تنگاتنگ این روش (روش لایه ای استفاده شده در این مقاله) با روش برنامه ریزی پویا، مولفین پیشنهاد می کنند که درآینده بر روی این ارتباط توجه شده و تمرکز لازم صورت گیرد.
یک مثال عددی نشان می دهد که هر چه مجموعه امکان تولید کوچکتر شود، درجه تراکم عمومی نیز افزایش می یابد. همچنین مثال بکاررفته نشان از وجود واحدهایی دارد که با محدود شدن مجموعه امکان تولید همچنان تراکم خود را حفظ می کنند، که این واحدها مطلوب نیستند.

منابع

[۱۴] میرفندرسکی،راحله سادات،۱۳۸۹، تراکم وبازده به مقیاس باتصاویر بهینه چندگانه، دانشگاه آزاداسلامی واحدقائم شهر، پایان نامه کارشناسی ارشد، پیوست الف،۱۰۵.

[1] Sueyoshi, T., Sekitani, k., 2009. DEA Congestion and returns to scale under on occurrence of multiple optimal projections. European Journal of operational Research 194, 592-607
[2] Fare, R., Sven sson, L., 1980. Congestion of production factors. Economet rica 48, 1745-1753.
[3] Fare, R., Grosskopfs., 1983, Measuring congestion in production, zeit schrilft fur Nationaokonomie, 275-271.
[4] Fare, R., Grosskoph, S., Lovell, C.A.K., 1985. The Measurement of Efficiency of production.kluwer – Nijh off Publishing, Boston, USA.
[5] Cooper, W.W., Thompson, R.G., Thrall.R.M., 1996, Introduction: extension and new developments in DEA, An nals of operations Research 66, 3-450.
[6] Brockett, P.L., Cooper, W.W., shin, H.C., Wang, Y., 1998. Inefficiency and congestion in Chinese production befor and after the 1978 economic reforms. Socio –Economic planning Science 32, 1-200.
[7] Cooper, W.W., Deng, H., Huang, Z.M., Li, S.L., 2002, A one –model approach to congestion in data envelopment analysis European Journal of operational Research 36(4), 231-238.
[8] Wei, Q.L., Yan, H., 2003, Congestion and returns to Scale in data envelopment analysis, European Journal of operational Research 153, 641-650.
[9] Tone, K., Sahoo, B.K., 2004. Degree of Scale economies and Congestion: A Unified DEA approach. European Journal of operational Research 158,755-772

[10] Cooper, W.W., seiford, L.M., Zhu, J., 2000. A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. Socio –Economic planning Science 34, 1-25.
[11] Cooper, W.W., Bisheng, G., Li, S., 2001a. Comparisons and evaluations of alternative approaches to the treatment of Congestion in DEA. European Journal of operational Research 132, 62-74.
[12] Cooper, W.W., Deng, H., Gu, B., Li, S., Thrall, R.m, 2001 b. using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981-1997). Socio – Economic planning Sciences 35, 1-16.
[13] Cooper, W.W., Gu, B., Li, S., 2001C. Note: Alternative treatments of Congestion in DEA A response to the Cherchye, Kuosmanen and post critique. European Journal of operational Research 132, 81-87.