

حل تحلیلی مدل ریاضی جریان الکترواستمیک در لوله‌ی نانو با تقریب دبای-هاکل

مهران خاکی جامعی^۱، محسن ربانی^{۲*}، مرتضی عباسی^۳

۳-۱- گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

۲- گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

چکیده

در این مقاله ابتدا به معرفی مدل ریاضی مساله جریان الکترواستمیک سیال داخل لوله که قطر کانال در اندازه نانومتر و طول آن در اندازه میکرومتر است، پرداخته می شود که در آن معادلات اساسی جریان، شامل معادله‌ی پواسون-بولتزمن و معادله‌ی ناویر-استوکس هستند که به صورت بی بعد مورد مطالعه قرار گرفتند. قطر کانال از طول EDL (Electric Double Layer) به مراتب بزرگتر بوده و لذا می توان از تقریب دبای-هاکل استفاده نمود. الکترولیت مورد مطالعه محلول نمک طعام با یون‌های مثبت و منفی و مونوالانت هستند. معادلات دیفرانسیل حاکم کوپل بوده که با استفاده از تقریب دبای-هاکل تبدیل به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی شده و پس از آن به کمک نرم افزار میپل حل شد. برای بررسی روایی حل، جواب‌ها با حل عددی موجود در مراجع که فرض دبای-هاکل را اعمال نکردند مقایسه شده است. مقایسه انجام شده، دقت بسیار خوب روش مورد استفاده را نشان می دهد. با بررسی جواب‌ها دیده می شود که تغییرات سرعت در نزدیکی دیواره‌ها بسیار زیاد بوده و در قسمت مرکزی جریان به صورت یکنواخت تبدیل می شود. اختلاف غلظت یون‌های مثبت و منفی در دیواره‌ها حداکثر بوده که با شیب زیادی مقادیر آن‌ها به هم نزدیک می شوند و به فاصله‌ی کمی از دیواره تا مرکز کانال به صورت یکنواخت می باشند.

کلمات کلیدی: جریان الکترواستمیک، حل تحلیلی، پواسون-بولتزمن، دبای-هاکل، نانوکانال.

۱ مقدمه

بی شک پیشرفت برق آسای علم در قرن حاضر منشاء تحولات بسیاری در زندگی انسان شده است که در این راستا سهم مطالعه‌ی علوم مختلف در ابعاد میکرو و نانو را می توان یکی از موثرترین آن‌ها دانست. صنعت میکرو در زمینه‌ی سیالات، در سال ۱۹۷۸ ابتدا توسط شرکت Canon در ساخت پرینترهای جوهر افشان به کار گرفته شد. با گسترش این صنعت در انواع مکانیزم‌های مکانیکی و الکتریکی، استفاده از عبارت‌های میکروالکترو-

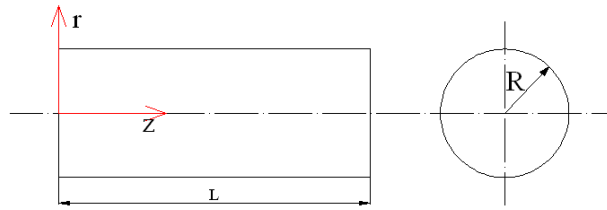
* عهده دار مکاتبات

آدرس پست الکترونیکی: mrabbani@iausari.ac.ir

مکانیک (MEM) و نانو الکترومکانیک (NEM) رسماً رواج پیدا کرد. اصطلاح MEM و NEM اولین بار در سال ۱۹۸۲ در شهر سولتلیک به صورت رسمی مورد استفاده قرار گرفت [۱]. پس از آن استفاده از MEMها در انواع میکرو شیرها، میکرو کانالها، میکرو پمپها، سیستم‌های حرارتی کوچک و نظایر آن به سرعت فراگیر شد [۲-۴]. کلیه‌ی این تجهیزات تحت عنوان میکرو سیالات نام برده می‌شوند [۵-۶]. میکرو پمپها یکی از مهم‌ترین دستگاه‌ها در زمینه میکروسیالات هستند که کاربردهای فراوانی در مهندسی پزشکی و ژنتیک دارند [۷-۹]. تحریک الکترواستاتیکی یکی از انواع مکانیزم‌های تحریک در میکرو پمپها است که به دلیل مصرف انرژی کم و کنترل راحت از کاربرد بسیار فراوانی در این زمینه برخوردار است. در این مدل برای حرکت سیال، از محلول‌های مختلف مانند محلول نمک طعام در آب استفاده شده و یون‌های مثبت و منفی موجود در الکترولیت با تحریک میدان الکتریکی سبب حرکت سیال می‌شوند. این گونه مسایل مدت زمان بسیار است که مورد توجه محققین قرار گرفته است. اولین کار در این زمینه توسط برگین و ناکاچ [۱۰] انجام شد. آن‌ها فرض کردند که دانسیته یون‌ها در محلول از توزیع بولتزمن پیروی می‌کند. پس از آن رایس و وایت هد [۱۱] آنالیزی برای جریان الکترواستاتیک داخل لوله موئین ارائه دادند. بارسیلون و همکارانش [۱۲] برای حل معادلات پواسن-نرست - پلانک در مسایل کانال‌های با جریان یون از روش آشفستگی غیر تحلیلی و عددی استفاده کردند. در این زمینه کارهای مشابه دیگری توسط دیگر محققان به ثبت رسیده است [۱۳-۱۵]. معادلات دیفرانسیل حاکم به این مساله با مشتقات جزئی و کوپل هستند. به همین خاطر اکثر این تحقیق‌ها به صورت عددی و یا تجربی انجام شدند [۱۶-۱۸]. در این پژوهش برای توزیع پتانسیل الکتریکی از توزیع بولتزمن و برای معادله‌ی مومنتم از ناویر-استوکس اصلاح شده در مختصات استوانه‌ای استفاده شده است. شرایط مرزی سرعت در ابعاد مورد مطالعه در این پژوهش، استفاده از شرط عدم لغزش و برای دانسیته یونی، تعادل الکتروشیمیایی است [۱۹]. در این کار معادلات دیفرانسیل حاکم، به صورت بی‌بعد تبدیل شدند. پارامترهای مقیاسی در بی‌بعد کردن معادلات به گونه‌ای انتخاب شدند که شکل بدون بعد معادله توزیع پتانسیل الکتریکی و معادله‌ی مومنتم مانند هم شده و در حالت خاص شرایط مرزی بدون بعد نیز مشابه هم شدند. تحت این شرایط پاسخ معادله‌ی توزیع پتانسیل الکتریکی و سرعت منطبق بر هم می‌شوند و بنابراین فقط یکی از این دو معادله می‌بایستی حل شوند. معادلات دیفرانسیل فوق، با استفاده از تقریب دبای-هاکل [۲۰]، تبدیل به یک معادله‌ی دیفرانسیل برای توزیع پتانسیل الکتریکی شدند. حل این معادله توسط نرم افزار میپل انجام شد و پس از آن توزیع غلظت یونی و تنش برشی به دست آمد. نتایج تحلیلی به دست آمده با نتایج عددی حاصل از روش تفاضل محدود در مرجع [۲۱] مقایسه شدند.

۲ مدل ریاضی

سیال الکترولیت داخل کانال استوانه‌ای به شعاع R و طول L عبور می‌کند. شکل زیر شماتیک کانال فوق را نشان می‌دهد.



شکل ۱. شماتیک کانال استوانه‌ای عبور جریان

معادلات اساسی جریان الکترواسمیتیک شامل توزیع بولتزمن دانسیته یونی، معادله توزیع پتانسیل الکتریکی پواسون، بقاء جرم برای جزء آیون‌ها و ناویراستوکس می‌باشد.

$$\rho_i(r^*) = \rho_i^0 e^{\frac{-z_i e \phi^*(r^*)}{kT}}, \quad (1)$$

$$\nabla^r \phi^*(r^*) = -\frac{1}{\epsilon_e} \rho_e(r^*) = -\frac{1}{\epsilon_e} e \sum_i z_i \rho_i(r^*), \quad (2)$$

$$-CD \nabla^r X_i + C \frac{D_i}{RT} F X_i \vec{\nabla}^* \cdot (X_i \vec{E}^*) + C \vec{\nabla}^* \cdot (X_i \vec{u}^*) = 0, \quad (3)$$

$$\rho_f (\vec{v}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{v}^* = -\vec{\nabla}^* p^* - F_{x_i} + \mu \nabla^r \vec{v}^*, \quad (4)$$

که در آن بالانویس ستاره، نشانه‌ی بعد دار بودن کمیت‌ها بوده و ρ_i دانسیته یون آیون، ϕ^* پتانسیل الکتریکی، z_i مولاریته، C غلظت مولار کل یون‌ها و حلال، $C = c_{solvent} + \sum_i c_i$ ، $K = C_p / C_v$ ، T دما، R ثابت گازها، r^* بردار جابه‌جایی، X_i کسر مولی جزء آیون، v سرعت، ρ_f دانسیته سیال، μ ویسکوزیته سیال و نیروی ناشی از میدان الکتریکی هستند. با استفاده از پارامترهای بدون بعد زیر:

$$\phi = \frac{\phi^*}{\phi}, \quad r = \frac{r^*}{R}, \quad z = \frac{z^*}{L},$$

$$\epsilon_1 = \frac{R}{L}, \quad \phi_c = \frac{kT}{e} = \frac{RT}{F},$$

معادلات (۱) تا (۴) را می‌توان به صورت بی‌بعد به شکل زیر نوشت:

$$X_i(r) = X_i^o e^{-z_i \phi(r)}, \quad (5)$$

$$\nabla^r \phi = -\frac{\beta}{\epsilon_r} \sum_i z_i X_i, \quad (6)$$

$$\vec{\nabla}^r X_i + z_i \vec{\nabla}^* \cdot (X_i \vec{\nabla} \phi) - \text{Re.Sc} \cdot \vec{\nabla}^* \cdot (X_i \vec{u}) = 0, \quad (7)$$

$$\text{Re} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{\beta}{\epsilon_r} \sum_i z_i X_i + \vec{\nabla}^r \vec{V}, \quad (8)$$

که در معادلات فوق،

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z, \\ \nabla^r &= \frac{\partial^r}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} + \varepsilon_1^r \frac{\partial^r}{\partial z^r}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{R}{L}, \varepsilon = \frac{\lambda}{R}, \beta = \frac{c}{I}, \lambda = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{\varepsilon_e RT}{I}},\end{aligned}$$

و F عدد فارده هستند. در جریان الکترواستاتیک $Re \ll 1$ بوده و می‌توان از جملات با ضریب رینولدز صرف نظر نمود. در این پژوهش تحریک سیال الکترواستاتیک خالص بوده و بنابراین گرادیان فشار صفر می‌باشد. بنابراین با توجه به تقارن محوری و $\varepsilon_1 = \frac{R}{L} \ll 1$ ، پس از ساده سازی، معادلات (۶) الی (۸) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d^r \phi}{dr^r} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\beta}{\varepsilon^r} \sum_i X_i e^{-z_i \phi}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dX_i}{dr} + z_i X_i \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{dX_i}{dr} + z_i X_i \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^r u}{dr^r} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{\beta}{\varepsilon^r} \sum_i X_i e^{-z_i \phi}. \quad (11)$$

در شرایطی که از محلول مونوالانت مانند نمک طعام استفاده شود، معادلات (۹) تا (۱۱) را می‌شود به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^r \phi}{dr^r} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\beta}{\varepsilon^r} (X_+ - X_-), \quad (12)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dX_+}{dr} + X_+ \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{dX_+}{dr} + X_+ \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dX_-}{dr} - X_- \frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{dX_-}{dr} - X_- \frac{d\phi}{dr} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^r u}{dr^r} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{\beta}{\varepsilon^r} (X_+ - X_-). \quad (15)$$

۳ تقریب دبابی-هاکل

در محلول‌های رقیق با پتانسیل الکتریکی کم تراکم یون‌ها در نزدیکی دیواره‌ها زیاد بوده و وقتی به سمت

مرکز کانال جابه‌جا می‌شویم تراکم یونی کم می‌شود. تحت این شرایط، $\ll 1$ می‌باشد که به آن

محدودیت دبابی می‌گویند. با اعمال این محدودیت و نوشتن دو جمله‌ی اول بسط تیلور برای تابع نمایشی در معادله‌ی (۵) و سپس جایگذاری آن در معادله‌ی (۱۲) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\beta}{\epsilon^2} (X_+ - X_- - (X_+ + X_-)\phi), \quad (16)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{\beta}{\epsilon^2} (X_+ - X_- - (X_+ + X_-)u). \quad (17)$$

شرایط مرزی معادلات (۱۳)، (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(R) = 0, \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (18)$$

$$X_+(R) = X_+, \quad \left. \frac{dX_+}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (19)$$

$$X_-(R) = X_-, \quad \left. \frac{dX_-}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (20)$$

$$u(R) = 0, \quad \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (21)$$

معادلات (۱۶) و (۱۷) و شرایط مرزی (۱۸) و (۲۱) مانند هم بوده بنابراین کافی است فقط یکی از آنها حل شود. از طرفی این دو معادله از حالت کوپل خارج شده و به تنهایی قابل حل هستند و از آنجا که تغییرات کسر مولی بر حسب پتانسیل الکتریکی در معادله‌ی (۵) مشخص است، پس حل معادلات (۱۳) و (۱۴) ضرورتی ندارد.

۴ حل تحلیلی معادله‌ی (۱۶)

برای مقایسه‌ی حل تحلیلی ارایه شده، با حل عددی در مرجع [۲۱]، معادله‌ی (۱۶) را برای شرایط مرزی $X_+ = 0.0276$ و $X_- = 0.0254$ و شعاع $R = 10 \text{ nm}$ حل خواهیم کرد. در این شرایط خواهیم داشت:

$$\lambda = 0.8 \text{ nm}, \epsilon = \frac{\lambda}{R} = 0.08, I = 294/68 \frac{\text{mole}}{\text{m}^3}, \beta = 188/68.$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله‌ی (۱۶) داریم:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = -6/485875 + 156/250625\phi. \quad (22)$$

حل معادله‌ی (۲۲) با شرایط مرزی (۲۱) توسط نرم افزار میپل به صورت زیر خواهد شد:

$$u(r) = -\frac{11}{265} \frac{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89} r\right)}{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89}\right)} + \frac{11}{265}. \quad (23)$$

تغییرات تنش برشی بی بعد مشتق معادله‌ی (۲۳) می باشد.

$$\tau(r) = -\frac{11\sqrt{89}}{200} \frac{\text{BesselII}\left(1, \frac{53}{40} \sqrt{89} r\right)}{\text{BesselII}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89}\right)}. \quad (24)$$

با استفاده از معادله‌ی (۵) توابع جزء مولی کاتیون و آنیون به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:

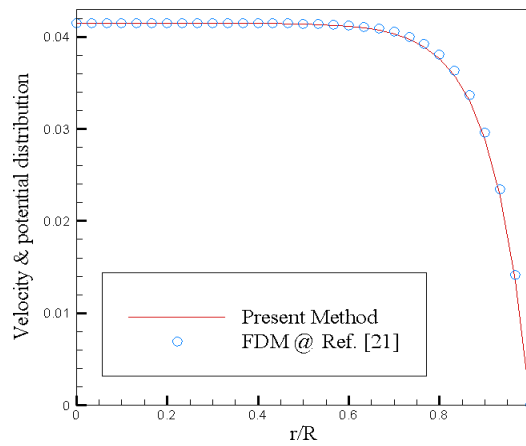
$$X_+(r) = 0.00276e^{-\frac{11}{265} \frac{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89} r\right)}{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89}\right)}}, \quad (25)$$

$$X_-(r) = 0.00254e^{-\frac{11}{265} \frac{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89} r\right)}{\text{BesselI}\left(0, \frac{53}{40} \sqrt{89}\right)} + \frac{11}{265}}. \quad (26)$$

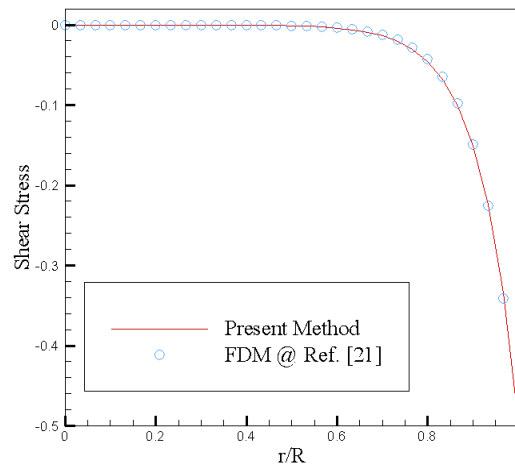
توابع به دست آمده در این قسمت را به روش ترسیمی با مقادیر بدست آمده به روش تفاضل محدود [۲۱] مقایسه نموده تا روایی حل تایید شود.

۴ نتایج

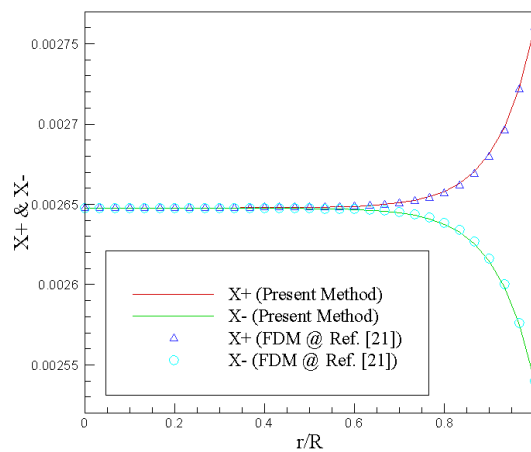
معادله‌ی (۲۲) تا (۲۵) تابع تغییرات سرعت و پتانسیل الکتریکی، تنش برشی و کسر مولی کاتیون و آنیون را در جریان الکترواستاتیک، به صورت بی بعد بر حسب شعاع بی بعد نشان می دهند. شکل های ۳ تا ۵ این تغییرات را با مقادیر عددی مقایسه می کنند.



شکل ۲. مقایسه توزیع پتانسیل و سرعت داخل لوله در دو روش تفاضل محدود و روش تحلیلی ارائه شده با $R=10\text{ nm}$

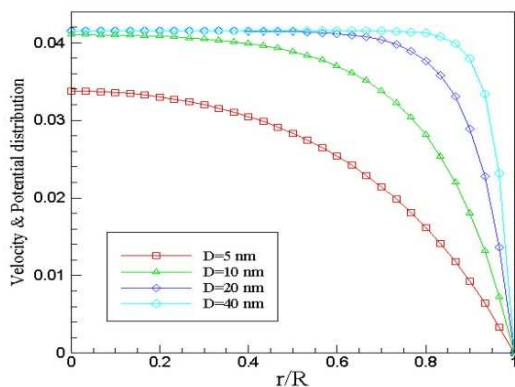


شکل ۳. مقایسه توزیع تنش برشی داخل لوله در دو روش تفاضل محدود و روش تحلیلی ارائه شده با $R=10\text{ nm}$



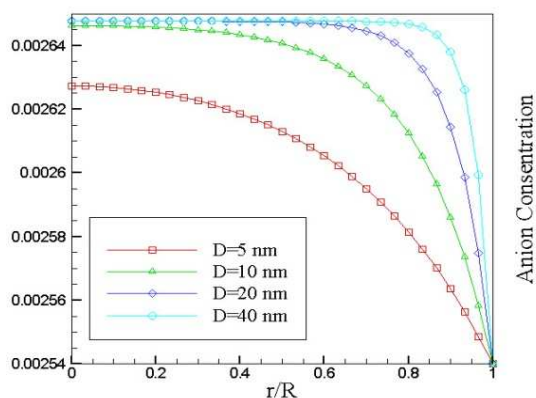
شکل ۴. مقایسه توزیع کسر مولی کاتیون و آنیون داخل لوله در دو روش تفاضل محدود و روش تحلیلی ارائه شده با $R=10\text{ nm}$

با بررسی شکل‌های ۲ تا ۴ دیده می‌شود توابع به دست آمده دارای انطباق بسیار خوبی با مقادیر عددی، به روش تفاضل محدود، موجود در مرجع [۲۱] می‌باشند. با حل معادله‌ی (۱۶) برای مقادیر مختلف شعاع لوله توابع سرعت و پتانسیل الکتریکی، تنش برشی، کسر مولی کاتیون و آنیون به دست می‌آید. شکل‌های زیر اثر تغییرات شعاع را برای این توابع نشان می‌دهد.

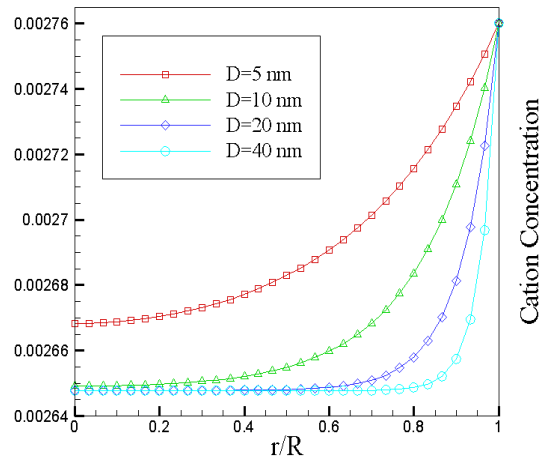


شکل ۵. توزیع سرعت و پتانسیل الکتریکی داخل لوله بر حسب شعاع، نسبت به قطرهای مختلف با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده

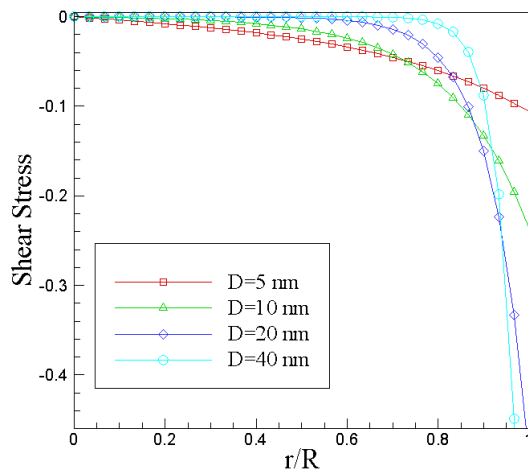
شکل ۵ تغییرات سرعت و پتانسیل الکتریکی سیال را بصورت بدون بعد نسبت به قطر لوله نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش قطر لوله سرعت حداکثر افزایش یافته و همچنین پروفیل سرعت نزدیک به سرعت یکنواخت می‌شود.



شکل ۶. توزیع کسر مولی آنیون داخل لوله بر حسب قطرهای مختلف با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده



شکل ۷. توزیع کسر مولی کاتیون داخل لوله بر حسب شعاع، نسبت به قطرهای مختلف با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده



شکل ۸. توزیع تنش برشی داخل لوله بر حسب شعاع، نسبت به قطرهای مختلف با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده

شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب تغییرات کسر مولی منفی و مثبت را داخل لوله بر حسب تغییرات قطر لوله نشان می‌دهد. افزایش قطر لوله باعث می‌شود توزیع یون‌ها داخل لوله یکنواخت‌تر شده اما تغییرات غلظت یون‌ها در نزدیکی دیواره‌ها شدیدتر شود. این پدیده سبب می‌شود، اختلاف یون‌ها در نزدیکی دیواره‌ها بیشتر شود، بنابراین تحریک سیال افزایش یافته و باعث افزایش بیشتر سرعت سیال در نزدیکی دیواره می‌شود. شکل ۸ تغییرات تنش برشی بی‌بعد را نسبت به قطر لوله نشان می‌دهد. به علت این که در لوله‌های با قطر بیشتر، شدت تغییرات سرعت سیال در نزدیکی دیواره بیشتر است، تنش برشی در لوله‌های با قطر بیشتر در نزدیکی دیواره بیشتر می‌شود. اما در لوله‌های با قطر بیشتر در فاصله کمی از جداره‌ی لوله تا مرکز لوله، جریان یکنواخت بوده که سبب می‌شود در این فاصله تنش برشی به صفر برسد.

۵ نتیجه گیری و جمع بندی

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد، تا مقدار خاصی از پتانسیل الکتریکی روی دیواره‌ها، استفاده از تقریب دبی-هاکل جواب‌های معتبر می‌دهد. بررسی شکل‌های ۵ الی ۷ نیز نشان می‌دهد با افزایش قطر کانال توزیع سرعت یکنواخت تر شده، دبی عبوری بیشتر می‌شود. به علت این که تحریک سیال توسط پتانسیل الکتریکی انجام می‌شود، کنترل انتقال سیال به این روش بسیار ساده می‌باشد. این نوع پمپ‌ها قسمت‌های متحرک ندارند بنابراین دارای عمر بسیار زیاد هستند. هدف اصلی این پژوهش ارایه حل تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان الکترواسمیتیک بوده که این معادلات شدیداً غیر خطی و کوپل هستند. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش ارایه شده بسیار کارآمد بوده و بر اساس آن در این مسایل می‌توان از حل عددی اجتناب کرد.

منابع

- [1] Chang, L, Progress in MEMS and Micro Systems Research. Micro and Nanotechnology Laboratory 208N. Wright Street Urbana, IL 61821.
- [2] Khoo, M., Liu, C., (2000). A novel micro machined magnetic membrane micro fluid pump. IEEE, 0-7803-6465-1/00, 2394-2397.
- [3] Starkey, D. E., Han, A., Bao, J. J., Ahn, C. H., Wehmeyer, K. R., Prenger, M. C., Halsall, H. B., Heineman, W. R., (2001). Fluorogenic assay for β -glucuronidase using microchip-based capillary electrophoresis. Journal of Chromatography B, 33-4.
- [4] Nonner, W., Gillespie, D., Henderson, D., Eisenberg, R., (2001). Ion accumulation in a biological calcium channel: effects of solvent and confining. Journal of Physical Chemistry, 6427-6436.
- [5] Anderson, R. C., Bogdan, G. J., Barniv, Z., Dawes, T. D., Winkler, J., and Roy, K., (1997). Microfluidic biochemical analysis system. IEEE Transducers, 477-480.
- [6] Rasmusson, M., Wall, S., (1997). Electrostatic characterization of Al-modified, nanosized silica particles. Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects, 169-181.
- [7] Stein D, Kruithof M., Dekker, C., (2004). Surface-charge-governed ion transport in nano fluidic channels. Phys Rev Lett, 93-98.
- [8] Daiguji, H., Yang, P. D., Majumdar, A., (2004). Ion transport in nano fluidic channels. Nano Letters, 137-142.
- [9] Karnik, R., Fan, R., Yue, M., (2005). Electrostatic control of ions and molecules in nano fluidic transistors. Nano Letters, 943-948.
- [10] Burgeen, D., Nakache, F. R., (1964). Electrokinetic flow in ultrafine capillary slits. The Journal of Physical Chemistry, 1084-1091.
- [11] Rice, C. L., Whitehead, R., (1965). Electro kinetic flow in a narrow capillary. Journal of Physical Chemistry, 4017-4024.
- [12] Barcion, V., Chen, D. P., Eisenberg, R. S., Jerome, J. W., (1997). Qualitative properties of steady-state Poisson-Nernst-Planck systems: perturbation and simulation study. SIAM Journal on Applied Mathematics, 631-648.
- [13] Newman, J. S., (1973). Electrochemical Systems. Prentiss-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 138-240.
- [14] Hunter, R. J., (1981). Zeta Potential in Colloid Science. Academic Press: London, 59-124.
- [15] Probstein, R. F., (1989). Physicochemical Hydrodynamics. Butterworths: Boston, 161-200.
- [16] Gao, Y., Wong, T., Chai, J., Yang, C., Ooi, K., (2005). Numerical simulation of two-fluid electroosmotic flow in microchannels. International Journal of Heat and Mass Transfer, 48(25-26), 5103-5111.
- [17] Hadigol, M., Nosrati, R., Nourbakhsh, A., Raisee, M., (2011). Numerical study of electroosmotic micromixing of non-Newtonian fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166(17-18), 965-971.
- [18] Franzoni, E., Sandrolini, F., Bandini, S., (2011). An experimental fixture for continuous monitoring of electrical effects in moist masonry walls. Construction and Building Materials, 25, 2023-2029.
- [19] Friedl, W., Reijenga, J. C., Kenndler, E., (1995). Ionic strength and charge number correction for mobilities of multivalent organic anions in capillary electrophoresis. Journal of Chromatography A,

- 709(1), 163-170.
- [20] Debye, P., Huckel, E., (1923). The Interionic Attraction Theory of Deviations from Ideal Behavior in Solution. *Z. Phys*, 24, 185-193.
- [21] Bhattacharyya, S., Nayak, A. K., (2007). Electro-osmotic transport in charged cylindrical micro- and nano-channels. *International Journal of Engineering Science*, 45, 55-74.