

گراف، ابزاری کم نظیر برای آموزش بازنمایی و مدل سازی: پایه ی پیش دبستان تا دوازده

نسیم اصغری^{۱*}، احمد شاهورانی^۲، احمد رضا حقیقی^۳

۱- دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

۳- دانشگاه صنعتی ارومیه، گروه ریاضی، ایران

چکیده

در این مقاله سعی شده است تا شایستگی موضوع گراف برای تدریس در تمام سطوح مدرسه نشان داده شود. ادعا بر آن است که گراف می تواند به عنوان ابزاری برای تعریف، مدل سازی و اثبات به کار گرفته شود. به این منظور ابتدا با استدلال آموزشی و روانشناسی، امکان بهره گیری از آن در پایه پیش دبستان تا پایه دوازدهم نشان داده شده است و سپس از دریچه ی بازنمایی و مدل سازی که یکی از ملاک های اصلی در تعیین صلاحیت برای آموزش یک موضوع است، مورد ارزیابی قرار گرفته است. با تشریح جوانب مختلف بازنمایی و مدل سازی به وسیله ی گراف ها، مثال های مقتضی بررسی شده است.

کلمات کلیدی: گراف، بازنمایی و مدل سازی، فضای توپولوژیک.

۱ مقدمه

در راستای تحقق اهداف آموزش ریاضی و با توجه به امتیازات بارز گراف در جهت تحقق بخشیدن به این اهداف، ضروری است که شایستگی ورود آن در برنامه ی درسی با توجه به اهداف و استانداردهای آموزش ریاضی مورد بررسی قرار گیرد.

در بیانیه ی کنفرانس DIMACS تحت عنوان "چگونه تاثیر ایجاد کنیم" چنین آمده است:

در طول ۳۰ سال گذشته، ریاضیات گسسته به سرعت رشد کرده است و به حوزه ی بسیار مهم ریاضیات تبدیل شده است. در حوزه هایی مثل ارتباطات و محاسبات و هم چنین در رشته هایی چون مراقبت سلامتی، بیولوژی، شیمی، علوم مهندسی مکانیزه، حمل و نقل مورد استفاده قرار می گیرد. ریاضیات گسسته یک مجموعه از موضوعات ریاضی جالب است که شامل سه حوزه ی اصلی: ۱- ترکیبات، ۲- روابط بازگشتی و روش های تکرارپذیر، ۳- گراف های یال-رأسی است و شامل موضوعاتی چون شمول، تصمیم های تجاری، انتخاب ها، تخصیص، اطلاعات (شامل کد گذاری و رمزگشایی) و دستورالعمل های جدید در هندسه (شامل فراکتال ها و هندسه ی تاکسی) می باشد.

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Nas.Asghari@iauctb.ac.ir

به طور روز افزون، ریاضیات گسسته به زبانی برای بخش اعظم علوم تبدیل شده است و برای تصمیم گیری هایی که افراد به طور انفرادی در زندگی شان دارند یا در حرفه ی خودشان و یا به عنوان یک شهروند در جامعه دارند، ضروری است. از سوی دیگر در سند (2000) NCTM آمده است: "ریاضیات گسسته باید در تمام پایه ها تدریس شود و جزء برنامه ی درسی باشد."

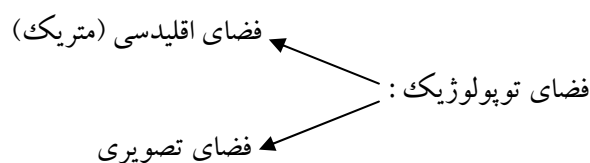
در این مقاله به این موضوع می پردازیم که نظریه ی گراف چگونه استاندارد بازنمایی و مدل سازی را برآورد می کند و به ابزاری برای تعریف، مدل سازی و اثبات تبدیل می شود.

۲ استدلال آموزشی برای جای دادن گراف در برنامه ی درسی از پیش دبستان تا پایه دوازدهم

گروه «بورباکی» سه ساخت عمده ی بنیادی را در ساخت های منطقی - ریاضی مورد تأیید قرار داده است

که عبارتند از:

- ۱- ساخت های جبری که الگوی بارز آن گروه است.
 - ۲- ساخت های توالی یا ترتیب که یکی از اشکال عمده ی آن شبکه است که درباره ی روابط است.
 - ۳- ساخت های توپولوژیک یا وضعی که مربوط به فضای پیوسته است.
- بنابر تقسیم بندی گروه بورباکی، ساخت های توپولوژیک یکی از سه ساخت عمده ی ریاضی است. پیازه در چهارچوب این الگوی ریاضی و همچنین با استفاده از نظرات "پوانکاره" در مورد هندسه توپولوژی، دریافت منسجمی از پدید آیی فضا در ذهن کودک را شرح می دهد. در این نما، پیازه مشاهدات نخستین خود را درباره فضای حسی - حرکتی باز می نگرد و نشان می دهد که فضای حسی - حرکتی از فضای توپولوژیک آغاز می گردد و به سوی فضایی تحول می یابد که در عین حال تصویری و اقلیدسی است. توپولوژی، توصیف و تبیین شکل های باز و بسته است، یعنی:



همان طور که می دانیم پیازه رشد کودک را به ۴ مرحله تقسیم می کند که دوره ی تولد تا ۲ سالگی را مرحله حسی - حرکتی و ۲-۷ سالگی را مرحله ی عملیاتی می نامد. او فضای توپولوژیک، اقلیدسی و تصویری را در دوره حسی - حرکتی چنین توصیف می کند: "توپولوژی ابتدایی ترین فصل هندسه را تشکیل می دهد. در این فضا جایی برای خطوط راست، فاصله، زاویه ها و جز آن وجود ندارد و فقط در مورد اجسام اتساع پذیر و قابل تغییر شکل به کار بسته می شود. بدین ترتیب فضای کودک در مراحل اول و دوم حسی - حرکتی فضای توپولوژیک است."

پیاژه آزمایش‌های متعددی برای بررسی جنبه‌های مختلف فضای توپولوژیک در کودک انجام داده است. در مرحله اول مفهوم مجاورت و جدایی را بررسی کرده است. آزمایشات او نشان می‌دهند اشکال اقلیدسی مانند دایره، مربع، مثلث، لوری و غیره در وهله‌های اول در نقاشی کودکان غلبه ندارند، بلکه به عکس، خصیصه‌های توپولوژیکی مجاورت، بسته بودن، محاط بودن و جز آن به چشم می‌خورند.

فضای توپولوژیک فضایی است در درون شکل، که خصیصه‌های درونی آن را بیان می‌کند و با روابط فضایی که رابطه‌ی یک شکل را با شکل دیگر نشان می‌دهد در تضاد است. طبق نظر پیاژه ساخته شدن فضا از سطح ساخته شدن اشیا و فضای درونی آن‌ها آغاز می‌شود. یکی از دلایلی که همه‌ی ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد، به علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان راس‌ها مطرح نیست، درک شهودی ساده‌تر است. گراف‌ها می‌توانند به فهم مطالب ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌هایی متناظر با آن‌ها، با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم و تصویرسازی مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند [۱].

۳ گراف به عنوان ابزار مدل‌سازی و بازنمایی موقعیت‌های ریاضی

روش‌هایی که از طریق آن‌ها، ایده‌های ریاضی نمایش داده می‌شوند از آن حیث که ایده‌ها را قابل فهم می‌سازند اساسی هستند. برای مثال ضرب با ارقام رومی، بسیار مشکل‌تر از همان ضرب با ارقام فارسی بر مبنای ده می‌باشد. زمانی که دانش آموزان به نمایش‌های ریاضی ایده‌ها دست می‌یابند، صاحب ابزارهایی می‌شوند که به طور معناداری ظرفیت و قابلیت آن‌ها را برای اندیشیدن ریاضی وار گسترش می‌دهد [۲].

اصطلاح "بازنمایی" با به نمایش در آوردن "هم به فرآیند و هم به تولید اشاره دارد. به عبارت دیگر به عمل به تسخیر در آوردن یک مفهوم یا رابطه‌ی ریاضی در بعضی از قالب‌ها و شکل‌ها و هم‌چنین به خود قالب و شکل اشاره دارد. بازنمایی اصطلاحی است که علاوه بر این که برای پردازش و تولید کردن مسایلی که در محیط بیرون قابل مشاهده هستند، به کار می‌رود، برای مسایلی که در ذهن فردی که مشغول انجام دادن ریاضیات است نیز به کار می‌رود [۲].

مدل یک شی است و می‌توان آن را به صورت سه‌تایی (S, M, R) توصیف کرد که S بیانگر موقعیت واقعی است، M یک مجموعه‌ای از اشیا ریاضی است و R یک رابطه بین S ، M . مدل‌سازی یک فرآیند است که طی آن مدل ساخته می‌شود [۲].

۳-۱ گراف به عنوان پشتیبانی قوی برای درک دانش آموزان از مفاهیم و روابط اساسی ریاضی

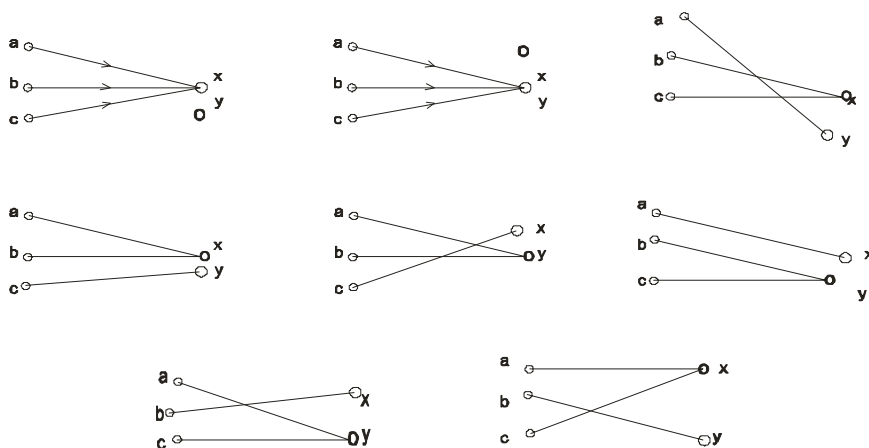
بازنمایی‌ها به عنوان عناصر اصلی در حمایت از درک دانش آموزان از مفاهیم و روابط ریاضی تلقی می‌شوند. قالب‌های بازنمایی از قبیل دیاگرام‌ها، نمایش‌های نموداری و علایم از دیر باز بخشی از ریاضیات مدرسه بوده‌اند. گراف‌ها می‌توانند به عنوان یک قالب مناسب برای بازنمایی مورد استفاده قرار گیرند. البته در مواردی

استفاده‌ی مناسب از گراف‌ها دیده می‌شود. مثلاً در نمایش تابع، که در آن دامنه، برد و تعریف تابع مشخص است، در واقع یک گراف دو بخشی به کار گرفته می‌شود [۳].

تابع یک مفهوم اساسی ریاضی است که دانش آموزان اغلب در فهم آن دچار مشکل می‌شوند اما با تصویرسازی آن به کمک گراف دو بخشی، دامنه، برد و نوع نگاشت برای آن‌ها ملموس خواهد بود. هم‌چنین با نمایش ترکیب دو تابع به صورت یک گراف سه بخشی، این مفهوم در ذهن دانش آموز به خوبی نقش می‌بندد. از موارد دیگری که می‌توان گراف‌ها را بکار بست در توصیف "اصل لانه کبوتری" است.

مثال ۱: اگر سه کبوتر a, b, c بخواهند دو لانه‌ی x, y را اشغال کنند، نشان دهید حداقل یک لانه‌ی کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار دارند (شکل ۱).

در شکل حالات ممکن قرار گرفتن ۳ کبوتر در ۲ لانه نشان داده شده است. به وسیله‌ی این گراف‌های دو بخشی دانش آموزان این اصل را به طور مجسم خواهند دید و کارآیی این اصل در حل مسایل مربوط به همنهشتی بر آن‌ها آشکار خواهد شد.



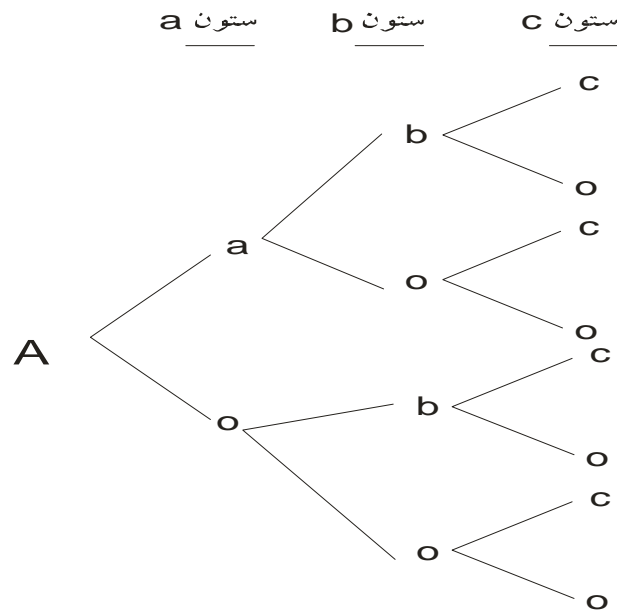
شکل ۱. نمایش اصل لانه‌ی کبوتری با گراف

اکنون به مثالی دیگر می‌پردازیم که در آن زیرمجموعه‌های یک مجموعه به وسیله‌ی گراف بازنمایی می‌شود.

مثال ۲: فرض کنید A یک مجموعه‌ی سه عضوی باشد (شکل ۲).

$$A = \{a, b, c\}$$

$$p(A) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$$

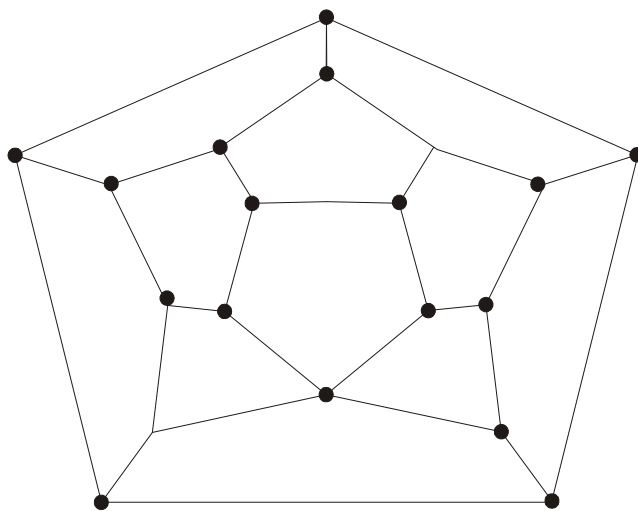


شکل ۲. بازنمایی زیرمجموعه‌های یک مجموعه با گراف

۲-۳ سازماندهی، ثبت، خلق و به کارگیری ایده‌های ریاضی به وسیله‌ی گراف‌ها

باید دانش آموزان را ترغیب کنیم تا ایده‌های خود را به روش‌هایی که برایشان قابل فهم است، درآوردند. نمایش‌ها و بازنمایی‌های غیر عادی و غیرمتعارف ساخته شده به وسیله‌ی دانش آموزان در جریان حل کردن مسایل و تحقیق ایده‌های ریاضی می‌تواند نقشی مهم در کمک به دانش آموزان برای فهم مسایل ایفا کند [۲-۵]. یکی از ابزارهای مفیدی که می‌تواند آن‌ها را در سازماندهی و ثبت مفروضات مساله کمک کند، گراف است. گراف‌ها بی‌تردید وسیله‌ای گویا و نیرومند جهت به تصویر کشیدن و نمایش عملکرد ذهنی دانش آموزان می‌باشند. یک کاربرد جالب توجه از گراف زمانی است که دانش آموز می‌خواهد اطلاعات مساله را سازماندهی و ثبت کند. در هر مساله تعدادی متغیر وجود دارد و ارتباط‌های بین آن‌ها تعریف شده است. در این حالت او می‌تواند متغیر را به عنوان راس و ارتباط‌ها را به صورت یال‌های گراف نمایش دهد. این بازنمایی به طور خارق‌العاده‌ای اطلاعات او را جمع‌بندی و به طور واحد برای او تصویرسازی می‌کند. حال او با این گراف گام اول و اساسی را در جهت حل مساله و کشف روش حل برخواهد داشت [۳]. می‌دانیم تصویرسازی عامل مهمی در حل مساله و همین‌طور خلق ایده‌های جدید ریاضی است، از این حیث گراف ابزار بی‌نظیری است که امکان تصویرسازی را به دانش آموز خواهد داد. یکی از مساله‌های معروف، مساله‌ی "فروشنده‌ی دوره‌گرد" است.

مثال: روستایی ۲۰ خانه دارد. یک فروشنده‌ی دوره‌گرد می‌خواهد از خانه‌ی A شروع کند و از هر خانه یک‌بار بگذرد و بیش از یک‌بار هم نگذرد و سرانجام به نقطه A بازگردد. مسیر او را مشخص کنید (شکل ۳).



شکل ۳. گراف فروشندهی دوره گرد

در این مساله، دانش آموز با در نظر گرفتن خانه‌ها به عنوان راس و مسیر حرکت از خانه‌ی A به خانه‌ی B به عنوان یال، گرافی را رسم می‌کند که اطلاعات مساله در آن گراف سازماندهی و ثبت شده است و به خوبی او را جهت انتخاب استراتژی مناسب راهنمایی می‌کند.

۳-۳ به کارگیری گراف‌ها برای مدل‌سازی و گزینش استراتژی حل مساله و تفسیر پدیده‌های ریاضی، پدیده‌های اجتماعی و طبیعی (فیزیکی)

اصطلاح "مدل" معانی بسیار گوناگونی دارد. اصطلاح مدل ریاضی که در این متن روی آن تمرکز شده است به معنای یک نمایش ریاضی از عناصر و روابط یک پدیده‌ی پیچیده‌ی ریاضی در یک قرائت ایده‌آل است [۲]. مدل‌های ریاضی می‌توانند برای شفاف کردن و ترجمه و تفسیر کردن یک پدیده و برای حل کردن مساله‌ها مورد استفاده قرار گیرند. مدل‌ها یک منظر و دیدگاه از یک پدیده‌ی دنیای واقعی در اختیار ما قرار می‌دهند. علاوه بر این که می‌توان مسایل و پدیده‌های ریاضی و اجتماعی و فیزیکی را به وسیله گراف‌ها مدل‌سازی کرد، هم‌چنین به کمک نظریه گراف می‌توان به حل آن‌ها پرداخت. یکی از موضوعات نظریه گراف که کارآیی خوبی در حل مسایل و تفسیر پدیده‌ها دارد، رنگ‌آمیزی است. یعنی ابتدا با یک گراف مسایل و پدیده‌های ریاضی و اجتماعی را مدل‌سازی کرده و سپس به کمک رنگ‌آمیزی آن را حل می‌کنیم و سپس به تفسیر آن می‌پردازیم. مساله‌ی زیر موضوعی برخاسته از موقعیت‌های روزانه است که دانش‌آموزان اغلب با آن سروکار دارند [۶-۲].

رنگ‌آمیزی یک گراف شامل تخصیص رنگ به رئوس است با این شرط که هر دو راس مجاور رنگ‌های متفاوت داشته باشند. عدد رنگی گراف، تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی یک گراف است. برای برخی گراف‌ها پیدا کردن عدد رنگی بسیار آسان است. اما یافتن عدد رنگی گراف‌های پیچیده به این راحتی نیست.

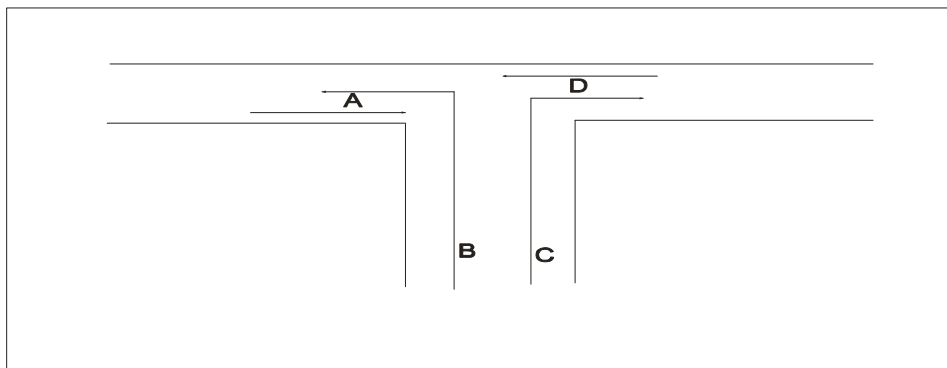
مثال ۳: آیا شما تاکنون در یک چهارراه ایستاده‌اید و از این که چگونه چراغ‌ها با زمان‌بندی مخصوص روشن می‌شوند متعجب شده‌اید؟ چه کسی هم‌زمان چراغ سبز و قرمز را تنظیم می‌کند؟ چند دوره‌ی زمانی متفاوت لازم است؟ در این مثال، می‌خواهیم طرح چراغ‌های راهنمایی را بیابیم [۶].

برای مدل‌سازی این مساله ابتدا باید ملاک چگونگی کارکردن چراغ‌ها را تعیین کنیم. اگر دو مسیر ترافیک همدیگر را قطع کنند، نباید اجازه داده شود که هم‌زمان عبور و مرور مجاز باشد. می‌توانیم این مساله را با یک گراف مدل‌سازی کنیم، طوری که روش، نمایان‌گر مسیرهای ترافیک باشند.

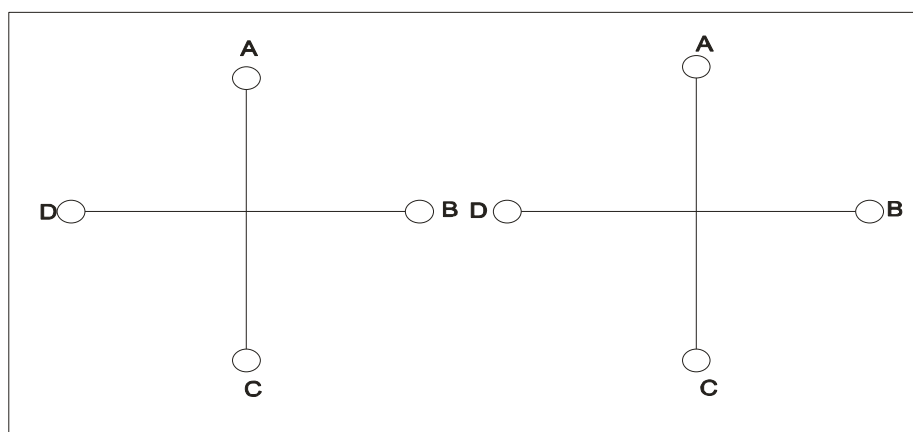
ما یک یال بین دو راس رسم می‌کنیم اگر مسیرهای ترافیکی که آن‌ها نمایش می‌دهند، همدیگر را قطع کنند. یک رنگ آمیزی از گراف، یک روش برای تنظیم چراغ‌هاست. این خواسته ما را بر آورده می‌کند. زیرا، این که دو راس که در یک یال مشترکند رنگ‌های متفاوت داشته باشند، معادل این است که دو مسیر ترافیکی که همدیگر را قطع می‌کنند، دوره‌های زمانی متفاوت داشته باشند. این جا رنگ‌ها نشان‌گر دوره‌های زمانی اند، زمانی که ترافیک باید جریان داشته باشد.

الف - شکل ۴ یک تقاطع را نشان می‌دهد که یک مسیر خروجی به یک خیابان دو طرفه از یک مرکز خرید دارد.

چهار مسیر برای حرکت وجود دارد. خودروهای خیابان اصلی می‌توانند به طور مستقیم حرکت کنند (دو مسیر) و خودروهای خروجی از مرکز خرید می‌توانند به هر دو طرف بچرخند (دو مسیر). گرافی که این تقاطع را نمایش می‌دهد، چهار راس خواهد داشت. این گراف با دو رنگ، قابل رنگ‌آمیزی است و در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۴. مسیر ترافیکی که یک خروجی به یک خیابان دو طرفه دارد



شکل ۵. گرافی که مسیر ترافیکی شکل ۴ را بازنمایی می کند.

این گراف ساده با دو رنگ می تواند رنگ شود. از این نمایش چنین بر می آید که برای ترافیک دو دوره ی زمانی ممکن است. یکی برای رفت و آمد خیابان اصلی و دیگری خروجی از مرکز خرید لازم است.

۴ بحث و نتیجه گیری

موضوع گراف زمینه و بستری کارآمد برای آموزش فرآیند بازنمایی است و ابزاری کم نظیر برای مدل سازی مسایل مبتلابه زندگی جامعه بشری در دوران کنونی است. اکثر زمینه های کاربردی در دورانی که ارتباطات، کارهای جمعی و فعالیت های شبکه ای نقش عظیمی در زندگی امروز دارد، به وسیله گراف ها قابل تبیین و مدل سازی ریاضی می شوند. بنابراین در آموزش نقش و اهمیت مضاعفی پیدا می کند. با استدلال آموزشی که آورده شده است، قابلیت و ضرورت استفاده از گراف ها از همان سال های آغازین آموزش بر ما روشن می شود.

منابع

- [۱] منصور، م.، دادستان، پ.، (۱۳۷۱). روانشناسی ژنتیک ۲ - از روان تحلیل گری تا رفتارشناسی، انتشارات دریا، چاپ دوم، ص ۲۸۶-۲۶۱.
- [2] National Council of teachers of Mathematics, (2000). Principles and Standards for School Mathematics.
- [3] Shahvarani, A., Asghary, N., Masumi, M. M., (2008). Graph Theory: Standard Point of NCTM. 11th International Congress on Mathematics Education, Mexico. <http://www.icme11.org/node/1468>.
- [4] Goldin, G. A., (1998). Representational systems, learning, and Problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.
- [5] Niman, J., (1975). Graph Theory in the Elementary School. Educational Studies in Mathematics, vol.6, 351-373.
- [6] Williams, J. (1992). Graph Coloring Used to Model Traffic Lights. The Mathematics Teacher journal 212-214.